BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

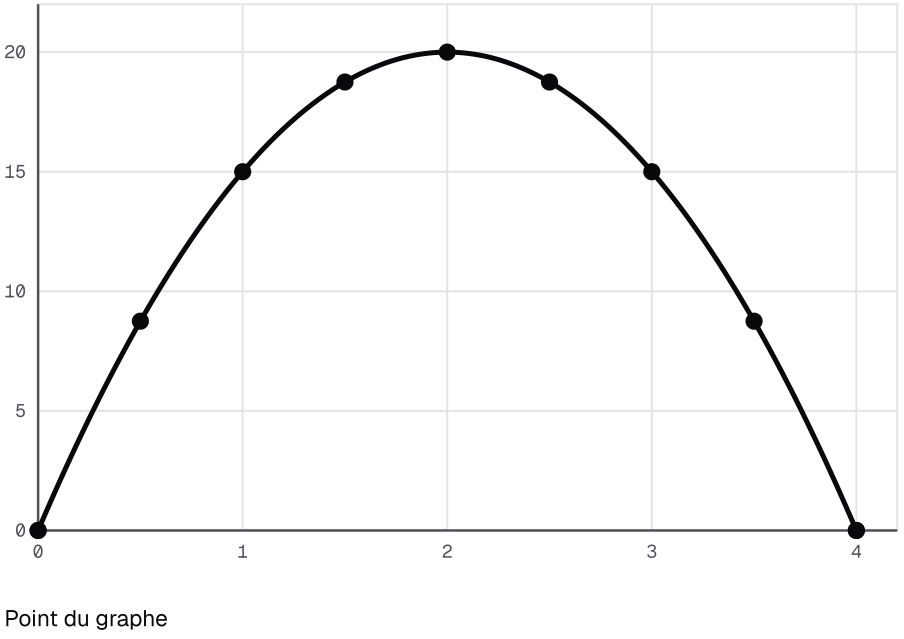
La hauteur d'un ballon

Un ballon est lancé verticalement depuis le sol. Sa hauteur, en mètres, au bout de t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t$, pour t dans $[0;4]$.

On a calculé quelques valeurs de h.

t	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$h(t)$	0	$8{,}75$	15	$18{,}75$	20	$18{,}75$	15	$8{,}75$	0

Place ces neuf points dans un repère, avec 1 cm pour $0{,}5$ s en abscisse et 1 cm pour 2 m en ordonnée. Trace la courbe de h en les joignant par une ligne régulière.



Les neuf points du tableau de la hauteur du ballon, joints par une ligne régulière de t = 0 à t = 4.

1. — 1 pts

a) Calculer $h(0)$ et $h(4)$, puis interpréter ces deux valeurs.

b) Vérifier par le calcul les valeurs $h(1)$ et $h(3)$ du tableau.

INDICE

Pour a) : une hauteur nulle signifie que le ballon est au sol. **Pour b) :** remplace t par sa valeur, la puissance d'abord.

2. 1,5 pts

a) Vérifier que, pour tout t de $[0;4]$, $h(t) = 20 - 5(t-2)^2$.

b) En déduire que $h(t) \leq 20$ pour tout t de $[0;4]$, puis donner le maximum de h sur $[0;4]$. Interpréter.

INDICE

Pour a) : développe $(t-2)^2$ avec une identité remarquable. **Pour b) :** étudie le signe de $h(t) - 20$; un carré est positif ou nul.

3. 1,25 pts

a) À l'aide de la courbe, conjecturer l'ensemble des instants où le ballon est à au moins 15 m du sol.

b) Confirmer cette conjecture en résolvant l'inéquation $h(t) \geq 15$ à l'aide de la question 2.

INDICE

Pour a) : trace la droite d'équation $y = 15$ et repère où la courbe est au-dessus. **Pour b) :** l'inéquation devient $(t-2)^2 \leq 1$; pense à la valeur absolue.

4. 1,25 pts

a) À l'aide de la courbe, donner deux intervalles de longueur $0{,}5$ qui semblent contenir chacun une solution de l'équation $h(t) = 10$, puis une valeur approchée lue de chaque solution.

b) Résoudre cette équation par le calcul. Donner les solutions exactes, puis leurs valeurs approchées au centième, à la calculatrice.

INDICE

Pour a) : trace la droite d'équation $y = 10$ et repère entre quels points placés elle coupe la courbe.
Pour b) : l'équation devient $(t-2)^2 = 2$.

Exercice 2 5 pts

Une fonction paire, son minimum et un majorant

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que, pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2+1}$.

1. 0,75 pts

a) Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.

b) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.

INDICE

Pour a) : compare x^2+1 à 1. **Pour b) :** simplifie les fractions obtenues.

2. 0,75 pts

a) Calculer $f(-x)$ pour tout réel x.

b) En déduire la parité de f et une propriété de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Pour a) : $(-x)^2 = x^2$. **Pour b) :** le repère est orthogonal.

3. 1,25 pts

a) Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0; +\infty[$. Vérifier que le taux de variation de f entre x_1 et x_2 vaut $T = \dfrac{2(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

INDICE

Pour a) : avec l'écriture admise, $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{2}{x_2^2+1} - \dfrac{2}{x_1^2+1}$. **Pour b) :** étudie le signe du numérateur et du dénominateur de T.

4. 1 pts

a) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty; 0]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 3]$.

b) Vérifier que $f(x) + 1 = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ pour tout réel x. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pour a) : la fonction f est paire ; utilise la propriété « parité et sens de variation ». **Pour b) :** compare $f(x)$ à $f(0) = -1$.

5. 1,25 pts

a) Justifier que $f(x) < 1$ pour tout réel x. Le réel 1 est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$. Interpréter le résultat sur $\mathcal{C}_f$.

INDICE

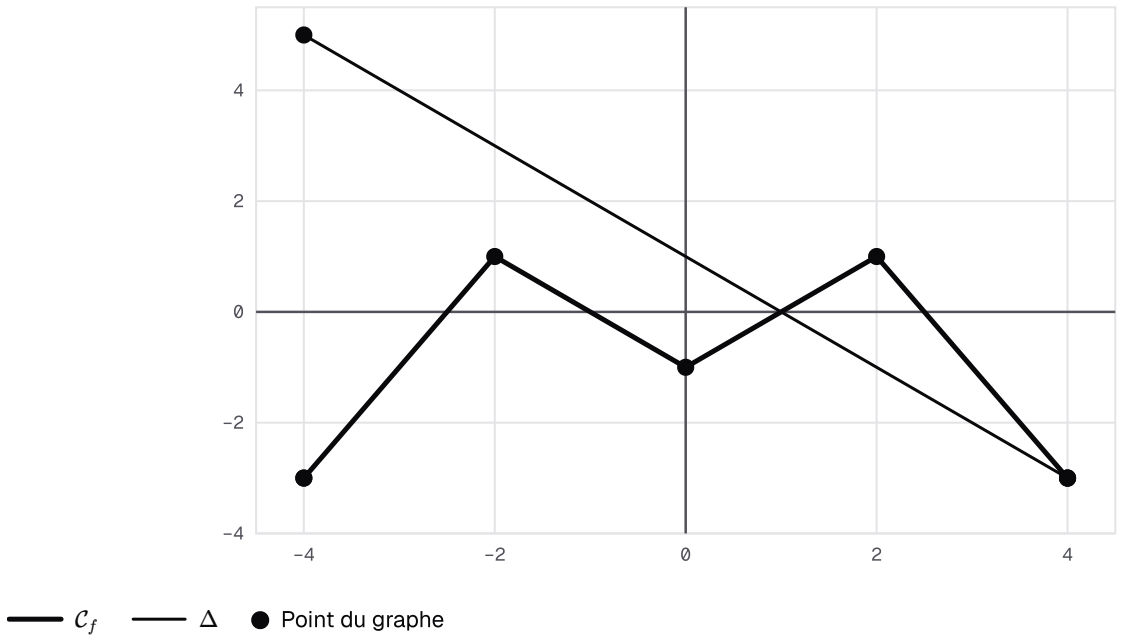
Pour a) : utilise l'écriture admise dans l'énoncé. **Pour b) :** le dénominateur est positif ; étudie le signe de $(x-1)(x+1)$.

Exercice 3 — 5 pts

Une courbe en forme de M

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une fonction f est définie sur $[-4; 4]$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est formée de quatre segments, qui relient successivement les points $(-4, -3)$, $(-2, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$ et $(4, -3)$.

On note Δ la droite d'équation $y = -x + 1$, courbe de la fonction $g : x \mapsto -x + 1$. Trace $\mathcal{C}_f$ et Δ sur ton cahier.



La courbe en forme de M, faite de quatre segments, et la droite Δ d'équation y = −x + 1.

1. — 1 pts

a) Lire $f(-2)$, $f(0)$ et $f(4)$, puis les antécédents de 1 par f.

b) Lire les antécédents de 0 par f, puis contrôler par le calcul ceux qui sont négatifs.

INDICE

Pour a) : les points cherchés sont des sommets. **Pour b) :** la droite d'équation $y = 0$ coupe chaque segment une fois ; sur le premier segment, l'ordonnée augmente de 2 par unité.

2. — 1 pts

a) Justifier que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) En déduire la parité de f, puis vérifier que $f(-3) = f(3)$.

INDICE

Pour a) : compare chaque sommet à son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. **Pour b) :** utilise l'interprétation graphique de la parité, avec un repère orthogonal.

3. 1 pts

a) Dresser le tableau de variations de f sur $[-4;4]$.

b) En déduire le maximum et le minimum de f sur $[-4;4]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Pour a) : la courbe change trois fois de sens. **Pour b) :** sur chaque intervalle du tableau, f est monotone ; compare les valeurs aux changements de sens et aux bornes.

4. 1,25 pts

a) Lire les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et Δ.

b) Vérifier que, sur $[0;2]$, l'image $f(x)$ s'écrit $x-1$, et que, sur $[2;4]$, elle s'écrit $5-2x$. En déduire les réels x de $[0;4]$ pour lesquels $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux.

c) Justifier que $\mathcal{C}_f$ et Δ n'ont aucun point commun d'abscisse comprise entre -4 et 0.

INDICE

Pour b) : contrôle chaque expression aux extrémités du segment. **Pour c) :** sur $[-4;-2]$, $f(x)=2x+5$; sur $[-2;0]$, $f(x)=-x-1$. Distingue ces deux cas.

5. 0,75 pts

a) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$, puis $f(x)<g(x)$, sur $[-4;4]$.

b) Contrôler ces résultats par le calcul, en étudiant le signe de $f(x)-g(x)$ sur chacun des intervalles $[-4;-2]$, $[-2;0]$, $[0;2]$ et $[2;4]$.

INDICE

Pour a) : repère où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ. **Attention :** les abscisses 1 et 4 comptent pour l'inégalité large seulement. **Pour b) :** utilise les expressions de f trouvées à la question 4.

Exercice 4 — 5 pts

Une fonction impaire connue par la moitié de son tableau

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une fonction f est définie sur $[-6;6]$ et **impaire**. On ne connaît pas son expression, seulement son tableau de variations sur $[0;6]$:

x	0		2		6
variations de f	$f(0)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

On sait de plus que f est strictement croissante sur $[0;2]$, strictement décroissante sur $[2;6]$, et que $f(4) = 0$.

1. — 0,75 pts

a) En appliquant la définition d'une fonction impaire avec $x = 0$, justifier que $f(0) = 0$.

b) En déduire $f(-2)$, $f(-4)$ et $f(-6)$.

INDICE

Pour a) : que vaut -0 ? **Pour b) :** pour tout x de $[-6;6]$, $f(-x) = -f(x)$.

2. — 1,25 pts

a) En déduire le sens de variation de f sur $[-2;0]$ et sur $[-6;-2]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[-6;6]$.

b) Donner le maximum et le minimum de f sur $[-6;6]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Pour a) : utilise la propriété « parité et sens de variation » ; pour une fonction impaire, le sens se conserve. **Pour b) :** sur chaque intervalle du tableau, f est monotone ; compare les valeurs aux changements de sens et aux bornes.

3. — 1 pts

a) Sans chercher leurs valeurs, comparer $f(0{,}5)$ et $f(1{,}5)$, puis $f(-5)$ et $f(-3)$.

b) Justifier que $f(1) > 0$ et que $f(3) > 0$. En déduire une comparaison de $f(1)$ et $f(-3)$.

INDICE

Pour a) : repère dans le tableau l'intervalle qui contient les deux réels, puis sers-toi du sens de f sur cet intervalle. **Pour b) :** compare $f(1)$ à $f(0)$, puis $f(3)$ à $f(4)$; utilise ensuite $f(-3) = -f(3)$.

4. 1,25 pts

a) Déterminer le signe de $f(x)$ pour x dans $[0;6]$, en distinguant les intervalles $[0;2]$, $[2;4]$ et $[4;6]$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ sur $[-6;6]$. Interpréter le résultat sur $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Pour a) : compare $f(x)$ à $f(0) = 0$ sur $[0;2]$, et à $f(4) = 0$ sur $[2;6]$. **Pour b) :** pour x dans $[-6;0]$, $f(x) = -f(-x)$, avec $-x$ dans $[0;6]$.

5. 0,75 pts

a) Justifier que l'équation $f(x) = 5$ n'a aucune solution sur $[-6;6]$.

b) On définit la fonction g sur $[-6;6]$ par $g(x) = f(x) + 1$. Calculer $g(0)$, $g(2)$ et $g(-2)$. La fonction g est-elle paire ? impaire ?

INDICE

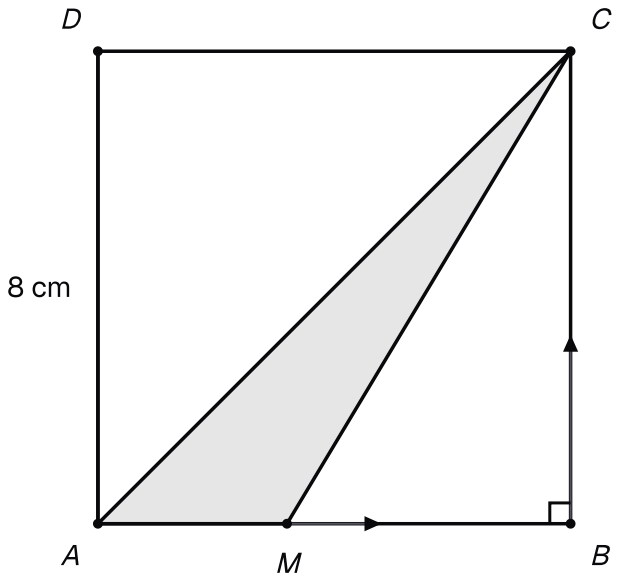
Pour a) : utilise le maximum trouvé à la question 2. **Pour b) :** un seul réel bien choisi suffit pour réfuter une parité.

Exercice 5 — 5 pts

L'aire d'un triangle dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 8 cm. Un point M part de A à l'instant 0 et avance à la vitesse constante de 2 cm par seconde : il parcourt le côté $[AB]$ jusqu'à B, puis le côté $[BC]$ jusqu'à C, où il s'arrête.

On note x le temps écoulé, en secondes, depuis le départ de M, et $f(x)$ l'aire, en cm², du triangle AMC. Lorsque M est en A ou en C, ce triangle est aplati et son aire est nulle.



Le carré ABCD de côté 8 cm, le point M en route sur [AB] et le triangle AMC dont on étudie l'aire.

1. — 1 pts

a) Justifier que f est définie sur $[0;8]$. Où se trouve le point M lorsque $x=4$? lorsque $x=6$?

b) Calculer $f(1)$, $f(4)$ et $f(6)$.

INDICE

Pour a) : en x secondes, M parcourt $2x$ cm ; le chemin de A à C par B est formé de deux côtés du carré. **Pour b) :** si M est sur $[AB]$, prends $[AM]$ pour base, de hauteur BC ; si M est sur $[BC]$, prends $[MC]$ pour base, de hauteur AB.

2. — 1,25 pts

a) Vérifier que $f(x)=8x$ pour x dans $[0;4]$, et que $f(x)=64-8x$ pour x dans $[4;8]$.

b) Vérifier que les deux expressions donnent la même image en 4. En déduire que $\mathcal{C}_f$ est formée de deux segments, dont on donnera les extrémités, puis la tracer avec 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 4 unités en ordonnée.

INDICE

Pour a) : pour x dans $[0;4]$, $AM=2x$; pour x dans $[4;8]$, $BM=2x-8$, donc $MC=8-(2x-8)$.
Pour b) : sur un intervalle, la courbe d'une fonction affine est un segment.

3. 1 pts

a) En déduire le sens de variation de f sur $[0;4]$ et sur $[4;8]$, puis dresser son tableau de variations sur $[0;8]$.

b) Déterminer le maximum de f sur $[0;8]$ et l'instant où il est atteint. Interpréter pour le triangle AMC.

INDICE

Pour a) : le signe du coefficient de x d'une fonction affine donne son sens de variation. **Pour b) :** utilise la propriété « extremum et changement de sens de variation ».

4. 1 pts

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 24$, puis l'inéquation $f(x) > 24$, sur $[0;8]$.

b) Confirmer ces résultats par le calcul, sur $[0;4]$ puis sur $[4;8]$. Pendant combien de secondes l'aire du triangle AMC dépasse-t-elle 24 cm², et pour quelles positions de M ?

INDICE

Pour a) : trace la droite d'équation $y = 24$. **Attention :** l'inégalité est stricte. **Pour b) :** résous $8x = 24$ et $8x > 24$ sur $[0;4]$, puis $64 - 8x = 24$ et $64 - 8x > 24$ sur $[4;8]$.

5. 0,75 pts

a) Pour x dans $[4;8]$, exprimer en fonction de x l'aire $g(x)$, en cm², du triangle ABM, puis vérifier que $f(x) + g(x) = 32$.

b) En déduire l'instant et la position de M sur $[BC]$ pour lesquels les triangles AMC et ABM ont la même aire.

INDICE

Pour a) : le triangle ABM est rectangle en B. **Pour b) :** remplace $g(x)$ par $32 - f(x)$ dans l'égalité $f(x) = g(x)$.