BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

La hauteur d'un ballon

Un ballon est lancé verticalement depuis le sol. Sa hauteur, en mètres, au bout de t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t$, pour t dans $[0 ; 4]$.

On a calculé quelques valeurs de h.

t	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
$h(t)$	0	$8{,}75$	15	$18{,}75$	20	$18{,}75$	15	$8{,}75$	0

Place ces neuf points dans un repère, avec 1 cm pour $0{,}5$ s en abscisse et 1 cm pour 2 m en ordonnée. Trace la courbe de h en les joignant par une ligne régulière.



Les neuf points du tableau de la hauteur du ballon, joints par une ligne régulière de t = 0 à t = 4.

1. 1 pts

a) Calculer $h(0)$ et $h(4)$, puis interpréter ces deux valeurs.

b) Vérifier par le calcul les valeurs $h(1)$ et $h(3)$ du tableau.

INDICE

Pour a) : une hauteur nulle signifie que le ballon est au sol. **Pour b) :** remplace t par sa valeur, la puissance d'abord.

CORRIGÉ

a) $h(0) = 0$ et :

$$\begin{aligned} h(4) &= -5 \times 16 + 80 \\ &= 0. \end{aligned}$$

La hauteur est nulle aux instants 0 et 4 : le ballon part du sol à l'instant 0 et y revient au bout de 4 secondes.

b) $h(1) = -5 + 20 = 15$ et :

$$\begin{aligned} h(3) &= -5 \times 9 + 60 \\ &= -45 + 60 = 15. \end{aligned}$$

Les valeurs 15 inscrites dans le tableau pour $t = 1$ et $t = 3$ sont exactes.

2. 1,5 pts

a) Vérifier que, pour tout t de $[0;4]$, $h(t) = 20 - 5(t-2)^2$.

b) En déduire que $h(t) \leq 20$ pour tout t de $[0;4]$, puis donner le maximum de h sur $[0;4]$. Interpréter.

INDICE

Pour a) : développe $(t-2)^2$ avec une identité remarquable. **Pour b) :** étudie le signe de $h(t) - 20$; un carré est positif ou nul.

CORRIGÉ

a) Soit t dans $[0;4]$. D'après l'identité remarquable $(t-2)^2 = t^2 - 4t + 4$:

$$\begin{aligned} &20 - 5(t-2)^2 \\ &= 20 - 5(t^2 - 4t + 4) \\ &= 20 - 5t^2 + 20t - 20 \\ &= -5t^2 + 20t \\ &= h(t). \end{aligned}$$

b) D'après a), pour tout t de $[0;4]$, $h(t) - 20 = -5(t-2)^2$. Un carré est positif ou nul ; multiplié par -5, qui est négatif, il devient négatif ou nul. Donc $h(t) - 20 \leq 0$, soit $h(t) \leq 20$.

De plus, $h(2) = 20 - 5 \times 0 = 20$, et 2 appartient à $[0;4]$: la valeur 20 est atteinte.

Conclusion. Pour tout t de $[0;4]$, $h(t) \leq 20$, et le maximum de h sur $[0;4]$ est 20, atteint en 2. Le ballon monte au plus à 20 m, hauteur atteinte au bout de 2 secondes.

3. 1,25 pts

a) À l'aide de la courbe, conjecturer l'ensemble des instants où le ballon est à au moins 15 m du sol.

b) Confirmer cette conjecture en résolvant l'inéquation $h(t) \geq 15$ à l'aide de la question 2.

INDICE

Pour a) : trace la droite d'équation $y = 15$ et repère où la courbe est au-dessus. **Pour b) :** l'inéquation devient $(t-2)^2 \leq 1$; pense à la valeur absolue.

CORRIGÉ

a) La droite d'équation $y = 15$ passe par les points placés $(1, 15)$ et $(3, 15)$. Entre eux, la courbe semble au-dessus de cette droite ; avant 1 et après 3, au-dessous. On conjecture que le ballon est à au moins 15 m du sol pour t dans $[1\,;3]$.

b) D'après la question 2, pour tout t de $[0\,;4]$, $h(t) \geq 15$ équivaut à $20 - 5(t-2)^2 \geq 15$, soit $5(t-2)^2 \leq 5$. On divise par 5, qui est positif : $(t-2)^2 \leq 1$.

Or $(t-2)^2 = |t-2|^2$, et un nombre positif ou nul a un carré inférieur ou égal à 1 exactement lorsqu'il est inférieur ou égal à 1. L'inéquation équivaut donc à $|t-2| \leq 1$, c'est-à-dire $-1 \leq t-2 \leq 1$, soit $1 \leq t \leq 3$.

Conclusion. L'intervalle $[1\,;3]$ est inclus dans $[0\,;4]$: l'ensemble des solutions de $h(t) \geq 15$ est $[1\,;3]$. Le ballon est à au moins 15 m du sol de 1 s à 3 s, ce qui confirme la conjecture.

4. 1,25 pts

a) À l'aide de la courbe, donner deux intervalles de longueur $0{,}5$ qui semblent contenir chacun une solution de l'équation $h(t) = 10$, puis une valeur approchée lue de chaque solution.

b) Résoudre cette équation par le calcul. Donner les solutions exactes, puis leurs valeurs approchées au centième, à la calculatrice.

INDICE

Pour a) : trace la droite d'équation $y = 10$ et repère entre quels points placés elle coupe la courbe.
Pour b) : l'équation devient $(t-2)^2 = 2$.

CORRIGÉ

a) La droite d'équation $y = 10$ coupe la courbe entre les points placés d'abscisses $0{,}5$ et 1, dont les ordonnées $8{,}75$ et 15 encadrent 10 : une solution semble se trouver dans $[0{,}5\,;\,1]$. Elle la coupe aussi entre les points d'abscisses 3 et $3{,}5$, d'ordonnées 15 et $8{,}75$: une autre solution semble se trouver dans $[3\,;\,3{,}5]$.

On lit $t \approx 0{,}6$ et $t \approx 3{,}4$; le calcul de b) contrôlera ces lectures.

b) D'après la question 2, pour tout t de $[0\,;\,4]$:

$$\begin{aligned} & h(t) = 10 \\ \Leftrightarrow\ & 20 - 5(t-2)^2 = 10 \\ \Leftrightarrow\ & (t-2)^2 = 2 \\ \Leftrightarrow\ & t - 2 = \sqrt{2} \\ \text{ou}\ & t - 2 = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les réels $2 - \sqrt{2}$ et $2 + \sqrt{2}$ appartiennent à $[0\,;\,4]$, car $0 < \sqrt{2} < 2$.

Conclusion. Les solutions de $h(t) = 10$ sont $2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ et $2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$. Elles confirment les lectures de a).

Exercice 2 5 pts

Une fonction paire, son minimum et un majorant

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que, pour tout réel x, $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$.

1. 0,75 pts

a) Justifier que $D_f = \mathbb{R}$.

b) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.

INDICE

Pour a) : compare $x^2 + 1$ à 1. **Pour b) :** simplifie les fractions obtenues.

CORRIGÉ

a) Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) $f(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$, $f(1) = \dfrac{0}{2} = 0$ et $f(3) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

2. 0,75 pts

a) Calculer $f(-x)$ pour tout réel x.

b) En déduire la parité de f et une propriété de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Pour a) : $(-x)^2 = x^2$. **Pour b) :** le repère est orthogonal.

CORRIGÉ

a) L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$, donc :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

b) Pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$: la fonction f est paire. Le repère est orthogonal ; d'après l'interprétation graphique de la parité, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. 1,25 pts

a) Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0;+\infty[$. Vérifier que le taux de variation de f entre x_1 et x_2 vaut $T=\dfrac{2(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.

INDICE

Pour a) : avec l'écriture admise, $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2}{x_2^2+1}-\dfrac{2}{x_1^2+1}$. **Pour b) :** étudie le signe du numérateur et du dénominateur de T.

CORRIGÉ

a) Notons $P=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$, produit de deux nombres strictement positifs. D'après l'écriture admise, les termes 1 s'éliminent dans la différence. On réduit au dénominateur commun P, puis on factorise par l'identité $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} &f(x_1)-f(x_2)\\ &=\frac{2}{x_2^2+1}-\frac{2}{x_1^2+1}\\ &=\frac{2(x_1^2-x_2^2)}{P}\\ &=\frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{P}. \end{aligned}$$

On divise par x_1-x_2, qui n'est pas nul : $T=\dfrac{2(x_1+x_2)}{P}$. En remplaçant P par son expression, on obtient l'écriture de T annoncée.

b) Le dénominateur P de T est strictement positif. Les réels x_1 et x_2 sont positifs ou nuls et distincts, donc $x_1+x_2>0$. Ainsi $T>0$.

Conclusion. D'après la propriété du taux de variation, f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

4. 1 pts

a) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty;0]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[-3;3]$.

b) Vérifier que $f(x)+1=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ pour tout réel x. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pour a) : la fonction f est paire ; utilise la propriété « parité et sens de variation ». **Pour b) :** compare $f(x)$ à $f(0)=-1$.

CORRIGÉ

a) La fonction f est paire et croissante sur $[0;+\infty[$. D'après la propriété « parité et sens de variation », le sens d'une fonction paire s'inverse sur l'intervalle des réels opposés : f est décroissante sur $]-\infty;0]$. Avec $f(-3)=f(3)=\dfrac{4}{5}$ et $f(0)=-1$:

x	-3		0		3
variations de f	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{4}{5}$

b) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x)+1\\ &=\frac{x^2-1+x^2+1}{x^2+1}\\ &=\frac{2x^2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Ce quotient a un numérateur positif ou nul et un dénominateur strictement positif : il est positif ou nul. Donc, pour tout réel x, $f(x)+1\geq 0$, soit $f(x)\geq -1$. Enfin, $f(0)=-1$.

Conclusion. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1, atteint en 0.

5. 1,25 pts

a) Justifier que $f(x) < 1$ pour tout réel x. Le réel 1 est-il le maximum de f sur $\mathbb{R}$?

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$. Interpréter le résultat sur $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Pour a) : utilise l'écriture admise dans l'énoncé. **Pour b) :** le dénominateur est positif ; étudie le signe de $(x-1)(x+1)$.

CORRIGÉ

a) Pour tout réel x, $x^2+1>0$, donc $\dfrac{2}{x^2+1}>0$. D'après l'écriture admise, $f(x)=1-\dfrac{2}{x^2+1}<1$. Aucune image n'est égale à 1 : le réel 1 majore f sur $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas le maximum de f.

b) Le dénominateur x^2+1 est strictement positif, donc $f(x)$ a le signe de son numérateur : $f(x)\leq 0$ équivaut à $x^2-1\leq 0$, soit $(x-1)(x+1)\leq 0$.

D'après la règle des signes, ce produit est négatif ou nul exactement lorsque $x-1\leq 0$ et $x+1\geq 0$; l'autre cas, $x-1\geq 0$ et $x+1\leq 0$, est impossible. Cela donne $-1\leq x\leq 1$.

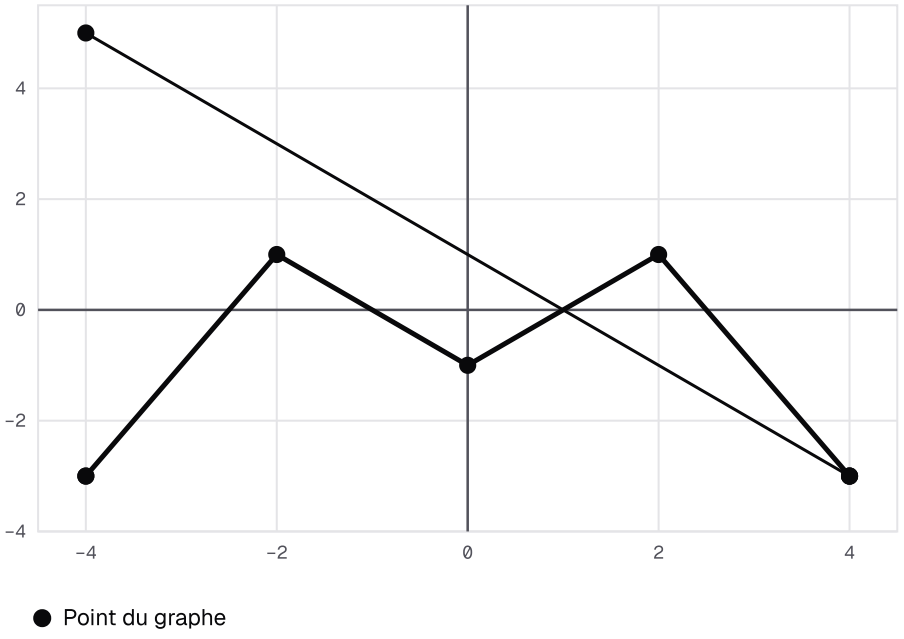
Conclusion. L'ensemble des solutions est $[-1;1]$: pour ces réels, et pour eux seuls, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de l'axe des abscisses ou sur cet axe.

Exercice 3 5 pts

Une courbe en forme de M

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une fonction f est définie sur $[-4; 4]$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est formée de quatre segments, qui relient successivement les points $(-4, -3)$, $(-2, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 1)$ et $(4, -3)$.

On note Δ la droite d'équation $y = -x + 1$, courbe de la fonction $g : x \mapsto -x + 1$. Trace $\mathcal{C}_f$ et Δ sur ton cahier.



La courbe en forme de M, faite de quatre segments, et la droite Δ d'équation y = −x + 1.

1. 1 pts

a) Lire $f(-2)$, $f(0)$ et $f(4)$, puis les antécédents de 1 par f.

b) Lire les antécédents de 0 par f, puis contrôler par le calcul ceux qui sont négatifs.

INDICE

Pour a) : les points cherchés sont des sommets. **Pour b) :** la droite d'équation $y = 0$ coupe chaque segment une fois ; sur le premier segment, l'ordonnée augmente de 2 par unité.

CORRIGÉ

a) Les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses -2, 0 et 4 sont des sommets : $f(-2) = 1$, $f(0) = -1$ et $f(4) = -3$.

Les seuls points de $\mathcal{C}_f$ d'ordonnée 1 sont les sommets $(-2, 1)$ et $(2, 1)$: le réel 1 a deux antécédents, -2 et 2.

b) La droite d'équation $y = 0$ coupe chacun des quatre segments une fois. On lit quatre antécédents de 0, voisins de $-2{,}5$, -1, 1 et $2{,}5$.

Contrôle des antécédents négatifs.

- De $(-4, -3)$ à $(-2, 1)$, l'ordonnée augmente de 2 par unité : elle vaut 0 en $-4 + 1{,}5 = -2{,}5$.
- De $(-2, 1)$ à $(0, -1)$, elle diminue de 1 par unité : elle vaut 0 en -1.

Conclusion. Le réel 0 a quatre antécédents par f ; les deux négatifs valent exactement $-2{,}5$ et -1.

2. 1 pts

a) Justifier que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) En déduire la parité de f, puis vérifier que $f(-3) = f(3)$.

INDICE

Pour a) : compare chaque sommet à son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. **Pour b) :** utilise l'interprétation graphique de la parité, avec un repère orthogonal.

CORRIGÉ

a) Dans un repère orthogonal, le symétrique du point (x, y) par rapport à l'axe des ordonnées est le point $(-x, y)$.

- Les sommets $(-4, -3)$ et $(4, -3)$ sont symétriques l'un de l'autre, de même que $(-2, 1)$ et $(2, 1)$.
- Le sommet $(0, -1)$ est sur l'axe.

Le symétrique d'un segment est le segment qui joint les symétriques de ses extrémités : chaque segment de $\mathcal{C}_f$ a pour symétrique un autre segment de $\mathcal{C}_f$. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) L'ensemble $D_f = [-4; 4]$ est symétrique par rapport à 0 et le repère est orthogonal. D'après l'interprétation graphique de la parité, la fonction f est paire.

Vérification. De $(2, 1)$ à $(4, -3)$, l'ordonnée diminue de 2 par unité : $f(3) = 1 - 2 = -1$. De $(-4, -3)$ à $(-2, 1)$, elle augmente de 2 par unité : $f(-3) = -3 + 2 = -1$. Donc $f(-3) = f(3)$.

3. 1 pts

a) Dresser le tableau de variations de f sur $[-4;4]$.

b) En déduire le maximum et le minimum de f sur $[-4;4]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Pour a) : la courbe change trois fois de sens. **Pour b) :** sur chaque intervalle du tableau, f est monotone ; compare les valeurs aux changements de sens et aux bornes.

CORRIGÉ

a) La courbe monte de $(-4,-3)$ à $(-2,1)$, descend jusqu'à $(0,-1)$, remonte jusqu'à $(2,1)$, puis redescend jusqu'à $(4,-3)$.

x	-4		-2		0		2		4
variations de f	-3	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	-3

b) Sur chacun des intervalles du tableau, f est monotone : ses valeurs y restent comprises entre les images des deux bornes. Il suffit donc de comparer les valeurs du tableau : -3, 1, -1, 1 et -3.

Conclusion. Le maximum de f sur $[-4;4]$ est 1, atteint en -2 et en 2. Le minimum est -3, atteint en -4 et en 4 ; la valeur -1, prise en 0, est plus grande que -3.

4. 1,25 pts

a) Lire les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et Δ.

b) Vérifier que, sur $[0;2]$, l'image $f(x)$ s'écrit $x-1$, et que, sur $[2;4]$, elle s'écrit $5-2x$. En déduire les réels x de $[0;4]$ pour lesquels $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux.

c) Justifier que $\mathcal{C}_f$ et Δ n'ont aucun point commun d'abscisse comprise entre -4 et 0.

INDICE

Pour b) : contrôle chaque expression aux extrémités du segment. **Pour c) :** sur $[-4;-2]$, $f(x)=2x+5$; sur $[-2;0]$, $f(x)=-x-1$. Distingue ces deux cas.

CORRIGÉ

a) On lit deux points communs à $\mathcal{C}_f$ et Δ, d'abscisses voisines de 1 et de 4.

b) Sur chaque segment, f est affine : on contrôle chaque expression aux extrémités.

- $0-1=-1$ et $2-1=1$: la droite d'équation $y=x-1$ passe par $(0,-1)$ et $(2,1)$.
- $5-2\times 2=1$ et $5-2\times 4=-3$: la droite d'équation $y=5-2x$ passe par $(2,1)$ et $(4,-3)$.

On résout ensuite $f(x)=g(x)$ sur chaque intervalle.

- Sur $[0;2]$: $x-1=-x+1$ équivaut à $2x=2$, soit $x=1$, qui appartient bien à $[0;2]$.
- Sur $[2;4]$: $5-2x=-x+1$ équivaut à $-x=-4$, soit $x=4$, qui appartient bien à $[2;4]$.

Sur $[0;4]$, $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux pour $x=1$ et pour $x=4$ seulement.

c) Soit x dans $[-4;0]$. Alors $-x$ est dans $[0;4]$ et, comme f est paire, $f(x)=f(-x)$. D'après b) :

- sur $[-4;-2]$, $-x$ est dans $[2;4]$, donc $f(x)=5-2(-x)=2x+5$;
- sur $[-2;0]$, $-x$ est dans $[0;2]$, donc $f(x)=-x-1$.

On résout $f(x)=g(x)$ dans chaque cas.

- Sur $[-4;-2]$: $2x+5=-x+1$ équivaut à $3x=-4$, soit $x=-\dfrac{4}{3}$, qui n'appartient pas à $[-4;-2]$.
- Sur $[-2;0]$: $-x-1=-x+1$ équivaut à $-1=1$, ce qui est impossible.

Conclusion. L'équation $f(x)=g(x)$ n'a aucune solution dans $[-4;0]$: $\mathcal{C}_f$ et Δ n'ont aucun point commun d'abscisse comprise entre -4 et 0.

5. 0,75 pts

a) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, puis $f(x) < g(x)$, sur $[-4; 4]$.

b) Contrôler ces résultats par le calcul, en étudiant le signe de $f(x) - g(x)$ sur chacun des intervalles $[-4; -2]$, $[-2; 0]$, $[0; 2]$ et $[2; 4]$.

INDICE

Pour a) : repère où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ. **Attention :** les abscisses 1 et 4 comptent pour l'inégalité large seulement. **Pour b) :** utilise les expressions de f trouvées à la question 4.

CORRIGÉ

a) On lit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ entre les abscisses 1 et 4, et au-dessous pour les abscisses de -4 à 1, 1 exclu. L'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$ semble être $[1; 4]$; celui de $f(x) < g(x)$, $[-4; 1[$.

b) Avec les expressions de la question 4, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ dans quatre cas.

- Sur $[-4; -2]$: $f(x) - g(x) = 3x + 4$; comme $x \leq -2$, $3x + 4 \leq -2 < 0$.
- Sur $[-2; 0]$: $f(x) - g(x) = -x - 1 + x - 1 = -2$, strictement négatif.
- Sur $[0; 2]$: $f(x) - g(x) = 2x - 2$, positif ou nul exactement lorsque $x \geq 1$.
- Sur $[2; 4]$: $f(x) - g(x) = 4 - x$, positif ou nul car $x \leq 4$.

Conclusion. Le calcul confirme la lecture : l'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$ est $[1; 4]$; celui de $f(x) < g(x)$ est $[-4; 1[$.

Exercice 4 5 pts

Une fonction impaire connue par la moitié de son tableau

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une fonction f est définie sur $[-6;6]$ et **impaire**. On ne connaît pas son expression, seulement son tableau de variations sur $[0;6]$:

x	0		2		6
variations de f	$f(0)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2

On sait de plus que f est strictement croissante sur $[0;2]$, strictement décroissante sur $[2;6]$, et que $f(4)=0$.

1. 0,75 pts

a) En appliquant la définition d'une fonction impaire avec $x=0$, justifier que $f(0)=0$.

b) En déduire $f(-2)$, $f(-4)$ et $f(-6)$.

INDICE

Pour a) : que vaut -0 ? **Pour b) :** pour tout x de $[-6;6]$, $f(-x)=-f(x)$.

CORRIGÉ

a) Le réel 0 appartient à $[-6;6]$, et $-0=0$. La définition d'une fonction impaire, appliquée à $x=0$, donne $f(-0)=-f(0)$, soit $f(0)=-f(0)$. Donc $2f(0)=0$, et $f(0)=0$.

b) La même définition, appliquée à 2, 4 et 6, donne $f(-2)=-f(2)=-4$, $f(-4)=-f(4)=0$ et $f(-6)=-f(6)=-(-2)=2$.

2. 1,25 pts

a) En déduire le sens de variation de f sur $[-2;0]$ et sur $[-6;-2]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[-6;6]$.

b) Donner le maximum et le minimum de f sur $[-6;6]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Pour a) : utilise la propriété « parité et sens de variation » ; pour une fonction impaire, le sens se conserve. **Pour b) :** sur chaque intervalle du tableau, f est monotone ; compare les valeurs aux changements de sens et aux bornes.

CORRIGÉ

a) Les intervalles $[-2;0]$ et $[-6;-2]$ sont formés des opposés des réels de $[0;2]$ et de $[2;6]$. La fonction f est impaire : d'après la propriété « parité et sens de variation », elle a le même sens de variation sur deux intervalles formés de réels opposés. Elle est donc strictement croissante sur $[-2;0]$ et strictement décroissante sur $[-6;-2]$. Avec les images de la question 1 :

x	-6		-2		0		2		6
variations de f	2	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	-2

b) Sur chaque intervalle du tableau, f est monotone, et ses valeurs y restent entre les images des bornes. Il suffit de comparer 2, -4, 0, 4 et -2.

Conclusion. Le maximum de f sur $[-6;6]$ est 4, atteint en 2 ; le minimum est -4, atteint en -2.

3. 1 pts

a) Sans chercher leurs valeurs, comparer $f(0{,}5)$ et $f(1{,}5)$, puis $f(-5)$ et $f(-3)$.

b) Justifier que $f(1)>0$ et que $f(3)>0$. En déduire une comparaison de $f(1)$ et $f(-3)$.

INDICE

Pour a) : repère dans le tableau l'intervalle qui contient les deux réels, puis sers-toi du sens de f sur cet intervalle. **Pour b) :** compare $f(1)$ à $f(0)$, puis $f(3)$ à $f(4)$; utilise ensuite $f(-3)=-f(3)$.

CORRIGÉ

a) Les réels $0{,}5$ et $1{,}5$ appartiennent à $[0;2]$, où f est strictement croissante : elle y conserve l'ordre. Comme $0{,}5<1{,}5$, on a $f(0{,}5)<f(1{,}5)$.

Les réels -5 et -3 appartiennent à $[-6;-2]$, où f est strictement décroissante : elle y renverse l'ordre. Comme $-5<-3$, on a $f(-5)>f(-3)$.

b) Les réels 0 et 1 sont dans $[0;2]$, avec $0<1$: $f(0)<f(1)$, soit $f(1)>0$.

Les réels 3 et 4 sont dans $[2;6]$, où f est strictement décroissante, avec $3<4$: $f(3)>f(4)$, soit $f(3)>0$.

La fonction f est impaire, donc $f(-3)=-f(3)<0$.

Conclusion. $f(-3)<0<f(1)$, donc $f(-3)<f(1)$.

4. 1,25 pts

a) Déterminer le signe de $f(x)$ pour x dans $[0;6]$, en distinguant les intervalles $[0;2]$, $[2;4]$ et $[4;6]$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)<0$ sur $[-6;6]$. Interpréter le résultat sur $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Pour a) : compare $f(x)$ à $f(0)=0$ sur $[0;2]$, et à $f(4)=0$ sur $[2;6]$. **Pour b) :** pour x dans $[-6;0]$, $f(x)=-f(-x)$, avec $-x$ dans $[0;6]$.

CORRIGÉ

a) On utilise $f(0)=0$ et $f(4)=0$, en distinguant trois cas.

- Sur $[0;2]$: f est strictement croissante, donc $f(x)>f(0)=0$ pour $0<x\leq 2$.
- Sur $[2;4]$: f est strictement décroissante, donc $f(x)>f(4)=0$ pour $2\leq x<4$.
- Sur $[4;6]$: f est encore strictement décroissante, donc $f(x)<f(4)=0$ pour $4<x\leq 6$.

Ainsi, sur $[0;6]$: $f(x)>0$ pour x dans $]0;4[$, $f(x)<0$ pour x dans $]4;6]$, et $f(0)=f(4)=0$.

b) Sur $[0;6]$, d'après a), $f(x)<0$ exactement pour x dans $]4;6]$.

Soit x dans $[-6;0]$. Alors $-x$ est dans $[0;6]$ et $f(x)=-f(-x)$, car f est impaire. Donc $f(x)<0$ équivaut à $f(-x)>0$, c'est-à-dire, d'après a), à $-x$ dans $]0;4[$, soit x dans $]-4;0[$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $]-4;0[\cup]4;6]$: pour ces abscisses, et seulement pour elles, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de l'axe des abscisses.

5. 0,75 pts

a) Justifier que l'équation $f(x) = 5$ n'a aucune solution sur $[-6; 6]$.

b) On définit la fonction g sur $[-6; 6]$ par $g(x) = f(x) + 1$. Calculer $g(0)$, $g(2)$ et $g(-2)$. La fonction g est-elle paire ? impaire ?

INDICE

Pour a) : utilise le maximum trouvé à la question 2. **Pour b) :** un seul réel bien choisi suffit pour réfuter une parité.

CORRIGÉ

a) D'après la question 2, le maximum de f sur $[-6; 6]$ est 4 : pour tout x de $[-6; 6]$, $f(x) \leq 4$, et $4 < 5$. Aucune image ne vaut 5, donc l'équation $f(x) = 5$ n'a aucune solution : la droite d'équation $y = 5$ ne rencontre pas $\mathcal{C}_f$.

b) $g(0) = 0 + 1 = 1$, $g(2) = 4 + 1 = 5$ et $g(-2) = -4 + 1 = -3$.

L'ensemble $[-6; 6]$ est symétrique par rapport à 0. On teste le réel 2.

- $g(-2) = -3$ et $g(2) = 5$, donc $g(-2) \neq g(2)$: g n'est pas paire.
- $-g(2) = -5$, donc $g(-2) \neq -g(2)$: g n'est pas impaire.

La valeur $g(0) = 1$ le confirme pour l'imparité : d'après la question 1, une fonction impaire définie en 0 y prend la valeur 0.

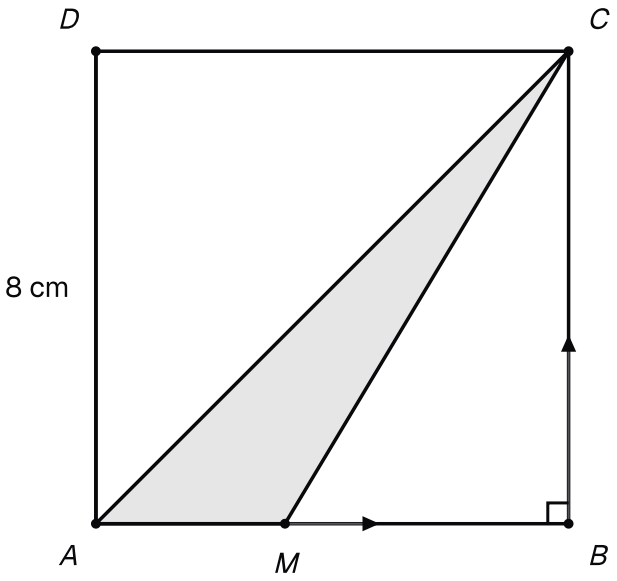
Conclusion. La fonction g n'est ni paire ni impaire.

Exercice 5 5 pts

L'aire d'un triangle dans un carré

$ABCD$ est un carré de côté 8 cm. Un point M part de A à l'instant 0 et avance à la vitesse constante de 2 cm par seconde : il parcourt le côté $[AB]$ jusqu'à B, puis le côté $[BC]$ jusqu'à C, où il s'arrête.

On note x le temps écoulé, en secondes, depuis le départ de M, et $f(x)$ l'aire, en cm², du triangle AMC. Lorsque M est en A ou en C, ce triangle est aplati et son aire est nulle.



Le carré ABCD de côté 8 cm, le point M en route sur [AB] et le triangle AMC dont on étudie l'aire.

1. 1 pts

a) Justifier que f est définie sur $[0;8]$. Où se trouve le point M lorsque $x=4$? lorsque $x=6$?

b) Calculer $f(1)$, $f(4)$ et $f(6)$.

INDICE

Pour a) : en x secondes, M parcourt $2x$ cm ; le chemin de A à C par B est formé de deux côtés du carré. **Pour b) :** si M est sur $[AB]$, prends $[AM]$ pour base, de hauteur BC ; si M est sur $[BC]$, prends $[MC]$ pour base, de hauteur AB.

CORRIGÉ

a) En x secondes, M parcourt $2x$ cm. Le chemin de A à C par B mesure $8+8=16$ cm ; il est parcouru en $16\div 2=8$ secondes, puis M s'arrête. Le temps x va donc de 0 à 8, et à chaque x de $[0;8]$ correspond une seule position de M, donc une seule aire : $D_f=[0;8]$.

Pour $x=4$, M a parcouru 8 cm : il est en B. Pour $x=6$, il a parcouru 12 cm, donc $BM=12-8=4$: M est le milieu de $[BC]$.

b) L'aire d'un triangle est la moitié du produit d'une base par la hauteur associée.

- Pour $x=1$, M est sur $[AB]$ avec $AM=2$; la hauteur issue de C est $BC=8$: $f(1)=\dfrac{2\times 8}{2}=8$.
- Pour $x=4$, M est en B et le triangle ABC est rectangle en B : $f(4)=\dfrac{8\times 8}{2}=32$.
- Pour $x=6$, $MC=8-4=4$; la hauteur issue de A est $AB=8$: $f(6)=\dfrac{4\times 8}{2}=16$.

2. 1,25 pts

a) Vérifier que $f(x) = 8x$ pour x dans $[0;4]$, et que $f(x) = 64 - 8x$ pour x dans $[4;8]$.

b) Vérifier que les deux expressions donnent la même image en 4. En déduire que $\mathcal{C}_f$ est formée de deux segments, dont on donnera les extrémités, puis la tracer avec 1 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 4 unités en ordonnée.

INDICE

Pour a) : pour x dans $[0;4]$, $AM = 2x$; pour x dans $[4;8]$, $BM = 2x - 8$, donc $MC = 8 - (2x - 8)$.
Pour b) : sur un intervalle, la courbe d'une fonction affine est un segment.

CORRIGÉ

a) Pour x dans $[0;4]$, M est sur $[AB]$ avec $AM = 2x$. On prend $[AM]$ pour base ; la hauteur issue de C est $BC = 8$:

$$f(x) = \frac{2x \times 8}{2} = 8x.$$

Pour x dans $[4;8]$, M est sur $[BC]$ avec $BM = 2x - 8$, donc $MC = 8 - (2x - 8) = 16 - 2x$. On prend $[MC]$ pour base ; la hauteur issue de A est $AB = 8$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(16 - 2x) \times 8}{2} \\ &= 4(16 - 2x) \\ &= 64 - 8x. \end{aligned}$$

b) $8 \times 4 = 32$ et $64 - 8 \times 4 = 32$: les deux expressions donnent la même image, $f(4) = 32$. Sur $[0;4]$ comme sur $[4;8]$, f est affine : sa courbe y est un segment. De plus, $f(0) = 0$ et $f(8) = 64 - 64 = 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est formée du segment qui joint $(0,0)$ à $(4,32)$, puis du segment qui joint $(4,32)$ à $(8,0)$.

3. 1 pts

a) En déduire le sens de variation de f sur $[0;4]$ et sur $[4;8]$, puis dresser son tableau de variations sur $[0;8]$.

b) Déterminer le maximum de f sur $[0;8]$ et l'instant où il est atteint. Interpréter pour le triangle AMC.

INDICE

Pour a) : le signe du coefficient de x d'une fonction affine donne son sens de variation. **Pour b) :** utilise la propriété « extremum et changement de sens de variation ».

CORRIGÉ

a) Une fonction affine de coefficient strictement positif est strictement croissante ; de coefficient strictement négatif, strictement décroissante. Sur $[0;4]$, $f(x)=8x$ avec $8>0$: f est strictement croissante. Sur $[4;8]$, $f(x)=64-8x$ avec $-8<0$: f est strictement décroissante.

x	0		4		8
variations de f	0	↗	32	↘	0

b) La fonction f croît sur $[0;4]$, puis décroît sur $[4;8]$. D'après la propriété « extremum et changement de sens de variation », $f(4)=32$ est le maximum de f sur $[0;8]$, atteint en 4.

Conclusion. L'aire du triangle AMC est la plus grande, 32 cm², à l'instant 4 secondes, lorsque M est en B : c'est la moitié de l'aire du carré, qui vaut 64 cm².

4. 1 pts

a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 24$, puis l'inéquation $f(x) > 24$, sur $[0; 8]$.

b) Confirmer ces résultats par le calcul, sur $[0; 4]$ puis sur $[4; 8]$. Pendant combien de secondes l'aire du triangle AMC dépasse-t-elle 24 cm², et pour quelles positions de M ?

INDICE

Pour a) : trace la droite d'équation $y = 24$. **Attention :** l'inégalité est stricte. **Pour b) :** résous $8x = 24$ et $8x > 24$ sur $[0; 4]$, puis $64 - 8x = 24$ et $64 - 8x > 24$ sur $[4; 8]$.

CORRIGÉ

a) La droite d'équation $y = 24$ coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points, d'abscisses voisines de 3 et de 5 ; entre ces abscisses, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la droite. Les solutions de $f(x) = 24$ semblent être 3 et 5. L'inégalité $f(x) > 24$ est stricte, les bornes sont exclues : l'ensemble de ses solutions semble être $]3; 5[$.

b) On distingue deux cas.

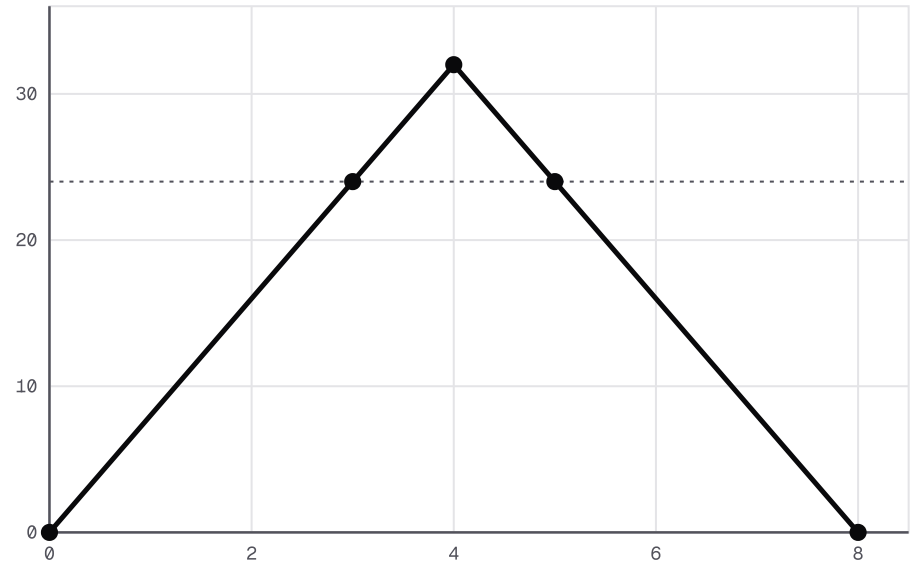
- Sur $[0; 4]$: $8x = 24$ équivaut à $x = 3$, qui appartient à $[0; 4]$; $8x > 24$ équivaut à $x > 3$, soit x dans $]3; 4]$.
- Sur $[4; 8]$: $64 - 8x = 24$ équivaut à $x = 5$, qui appartient à $[4; 8]$; $64 - 8x > 24$ équivaut à $x < 5$, soit x dans $[4; 5[$.

Les solutions de $f(x) = 24$ sont 3 et 5. L'ensemble des solutions de $f(x) > 24$ est la réunion :

$$]3; 4] \cup [4; 5[=]3; 5[.$$

Positions de M. Pour x dans $]3; 4]$, M est sur $[AB]$ avec $AM = 2x > 6$. Pour x dans $[4; 5[$, M est sur $[BC]$ avec $BM = 2x - 8 < 2$.

Conclusion. L'aire du triangle AMC dépasse 24 cm² pendant $5 - 3 = 2$ secondes : lorsque M est sur $[AB]$ avec $AM > 6$, ou sur $[BC]$ avec $BM < 2$.



La courbe de f, deux segments de (0, 0) à (4, 32) puis à (8, 0), et la droite y = 24 qui la coupe aux abscisses 3 et 5.

5. 0,75 pts

a) Pour x dans $[4;8]$, exprimer en fonction de x l'aire $g(x)$, en cm², du triangle ABM, puis vérifier que $f(x)+g(x)=32$.

b) En déduire l'instant et la position de M sur $[BC]$ pour lesquels les triangles AMC et ABM ont la même aire.

INDICE

Pour a) : le triangle ABM est rectangle en B. **Pour b) :** remplace $g(x)$ par $32-f(x)$ dans l'égalité $f(x)=g(x)$.

CORRIGÉ

a) Pour x dans $[4;8]$, M est sur $[BC]$ et le triangle ABM est rectangle en B, avec $AB=8$ et $BM=2x-8$:

$$g(x)=\frac{8(2x-8)}{2}=8x-32.$$

Avec l'expression de f sur $[4;8]$:

$$\begin{aligned} &f(x)+g(x)\\ &=64-8x+8x-32\\ &=32. \end{aligned}$$

C'est attendu : les triangles AMC et ABM forment ensemble le triangle ABC, d'aire 32 cm².

b) D'après a), pour x dans $[4;8]$, $g(x)=32-f(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} &f(x)=g(x)\\ \Leftrightarrow\ &f(x)=32-f(x)\\ \Leftrightarrow\ &f(x)=16\\ \Leftrightarrow\ &64-8x=16\\ \Leftrightarrow\ &x=6. \end{aligned}$$

Le réel 6 appartient bien à $[4;8]$.

Conclusion. Les triangles AMC et ABM ont la même aire, 16 cm², à l'instant 6 secondes, lorsque M est le milieu de $[BC]$. On retrouve $f(6)=16$ (question 1).