BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Compléter une courbe par symétrie

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une fonction f est définie sur $[-4; 4]$ et **impaire**. On connaît seulement son expression sur $[0; 4]$:

- $f(x) = 2x$ pour x dans $[0; 1]$;
- $f(x) = 3 - x$ pour x dans $[1; 4]$.

1.

Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(4)$, puis tracer la courbe de f sur $[0; 4]$. Compléter la courbe sur $[-4; 0]$ en justifiant.

INDICE

Début : sur $[0; 4]$, la courbe est formée de deux segments. **Outil :** la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

2.

Dresser le tableau de variations de f sur $[-4; 4]$.

INDICE

Outil : une fonction impaire a, sur l'intervalle symétrique, le même sens de variation que sur l'intervalle de départ.

3.

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[-4; 4]$.

INDICE

Début : résous d'abord sur $[0; 1]$, puis sur $[1; 4]$. **Ensuite :** si $f(a) = 0$, alors $f(-a) = -f(a) = 0$.

Exercice 2

Un taux de variation qui change de signe

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$, définie sur l'intervalle $[0; 2]$.

1.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0; 2]$. Vérifier que $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)$. En déduire le taux de variation T de f entre x_1 et x_2.

INDICE

Début : développe le second membre, en distribuant x_1, puis $-x_2$. **Ensuite :** divise par $x_1 - x_2$, qui n'est pas nul.

2.

Calculer d'abord T pour $x_1 = 0{,}5$ et $x_2 = 1$. Étudier ensuite le signe de T lorsque x_1 et x_2 sont dans $[0; 1]$, puis lorsqu'ils sont dans $[1; 2]$. En déduire le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles.

INDICE

Premier indice : si $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$, alors $a^2 \leq 1$ et $ab \leq 1$; compare donc chaque terme de $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ à 1.

Second indice : comme $x_1 \neq x_2$, l'un des deux est différent de 1 ; un des trois termes est alors strictement inférieur à 1.

3.

Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2]$. En déduire le minimum de f sur $[0; 2]$.

INDICE

Calcule $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. **Outil :** une fonction décroissante puis croissante atteint son minimum au changement de sens.

Exercice 3

Une racine carrée sur un intervalle symétrique

On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D_g, puis étudier la parité de g.

INDICE

Début : il faut $9 - x^2 \geq 0$, soit $x^2 \leq 9$. **Rappel :** $x^2 \leq 9$ équivaut à $|x| \leq 3$.

2.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0; 3]$. Vérifier que le taux de variation de g entre x_1 et x_2 vaut $T = \dfrac{-(x_1 + x_2)}{\sqrt{9 - x_1^2} + \sqrt{9 - x_2^2}}$. En déduire le sens de variation de g sur $[0; 3]$.

INDICE

Outil : multiplie $g(x_1) - g(x_2)$ par son expression conjuguée, puis utilise $(x_1^2 - x_2^2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. **Point délicat :** le dénominateur n'est pas nul.

3.

En déduire le sens de variation de g sur $[-3; 0]$, dresser son tableau de variations sur $[-3; 3]$ et donner son maximum.

INDICE

Outil : pour une fonction paire, le sens de variation s'inverse sur l'intervalle symétrique.

Exercice 4

Un maximum établi grâce à un carré

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1.

Justifier que $D_f = \mathbb{R}$, puis que f est impaire.

INDICE

Outil : pour tout réel x, $x^2 \geq 0$. **Ensuite :** calcule $f(-x)$.

2.

Vérifier que, pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : réduis $1 - f(x)$ au même dénominateur. **Ensuite :** un carré est positif ou nul ; calcule $f(1)$.

3.

En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Le maximum est-il atteint en un autre réel que 1 ?

INDICE

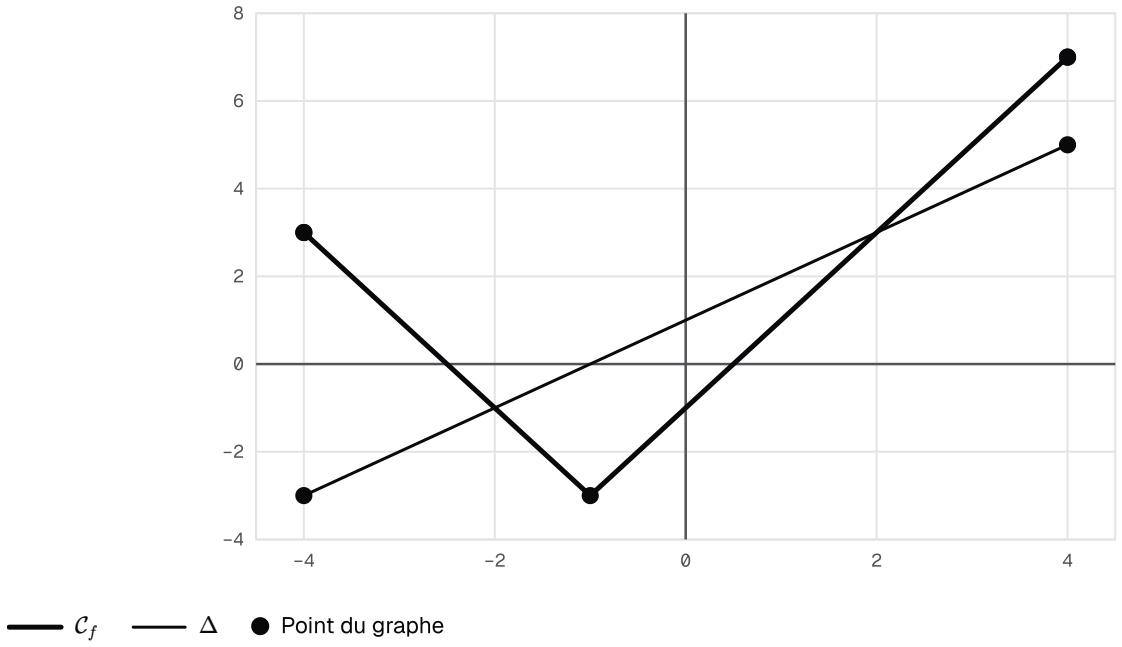
Outil : pour tout réel x, $f(x) = -f(-x)$ et $f(-x) \leq 1$. **Pour la seconde question :** quand le carré $(x-1)^2$ est-il nul ?

Exercice 5

Une courbe et une droite : équation et inéquations

Une fonction f est définie sur $[-4;4]$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est formée de deux segments : le premier va de $(-4,3)$ à $(-1,-3)$, le second de $(-1,-3)$ à $(4,7)$. On note Δ la droite d'équation $y=x+1$, courbe de la fonction $g : x \mapsto x+1$.

Trace $\mathcal{C}_f$ et Δ dans un même repère.



La courbe de f, formée de deux segments, et la droite Δ d'équation y = x + 1, dans un même repère.

1.

Vérifier que, pour x dans $[-4;-1]$, l'image $f(x)$ vaut $-2x-5$, et que, pour x dans $[-1;4]$, elle vaut $2x-1$.

INDICE

Outil : une fonction affine est connue par deux de ses valeurs ; contrôle les extrémités de chaque segment.

2.

Lire les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et Δ, puis trouver par le calcul les réels x pour lesquels $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux.

INDICE

Outil : sur la figure, la droite coupe chaque segment une fois. **Pour le calcul :** distingue les deux intervalles.

3.

Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) \geq g(x)$ et $f(x) < g(x)$ sur $[-4; 4]$.

INDICE

Outil : repère où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ. **Point délicat :** les abscisses -2 et 2 sont solutions de l'inégalité large seulement.

Exercice 6

Coût et recette d'un atelier de lampes

Un petit atelier fabrique et vend des lampes, au plus 50 par jour. Chaque jour, il paie 200 dirhams de frais fixes, plus 15 dirhams par lampe fabriquée. Chaque lampe est vendue 25 dirhams. On note x le nombre de lampes fabriquées et vendues en un jour, avec x dans $[0; 50]$.

1.

Exprimer le coût $C(x)$ et la recette $R(x)$, en dirhams. Calculer $C(10)$ et $R(10)$, puis interpréter.

INDICE

Début : le coût est la somme des frais fixes et du prix des x lampes.

2.

Dans un repère, C et R sont représentées par deux segments. Donner leurs extrémités et tracer ces segments sur ton cahier, avec 1 cm pour 5 lampes en abscisse et 1 cm pour 100 dirhams en ordonnée. Lire l'abscisse de leur point commun, puis contrôler par le calcul.

INDICE

Outil : calcule les images de 0 et de 50. **Pour le contrôle :** résous $25x = 15x + 200$.

3.

Résoudre graphiquement l'inéquation $R(x) \geq C(x)$ sur $[0; 50]$, puis confirmer par le calcul. Combien de lampes l'atelier doit-il vendre pour ne pas perdre d'argent ?

INDICE

Outil : repère où le segment de R est au-dessus de celui de C. **Attention :** l'inégalité est large.

Exercice 7

Racines carrées, valeur absolue : égales ou non ?

On considère les fonctions :

- $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $g : x \mapsto x - 2$ et $k : x \mapsto |x - 2|$;
- $u : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{x+1}$.

1.

Déterminer D_f, puis justifier que $f = k$.

INDICE

Outil : reconnais une identité remarquable sous la racine. **Rappel :** pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

2.

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

INDICE

Outil : $D_f = D_g$; cherche un réel où les images diffèrent, par exemple un réel inférieur à 2.

3.

Déterminer D_u et D_v. Les fonctions u et v sont-elles égales ?

INDICE

Pour D_u : étudie le signe du produit $x(x+1)$ avec la règle des signes. **Pour D_v :** chaque racine pose sa propre condition.