BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Entraînement	7

Exercice 1

Compléter une courbe par symétrie

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une fonction f est définie sur $[-4; 4]$ et **impaire**. On connaît seulement son expression sur $[0; 4]$:

- $f(x) = 2x$ pour x dans $[0; 1]$;
- $f(x) = 3 - x$ pour x dans $[1; 4]$.

1.

Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(4)$, puis tracer la courbe de f sur $[0;4]$. Compléter la courbe sur $[-4;0]$ en justifiant.

INDICE

Début : sur $[0;4]$, la courbe est formée de deux segments. **Outil :** la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

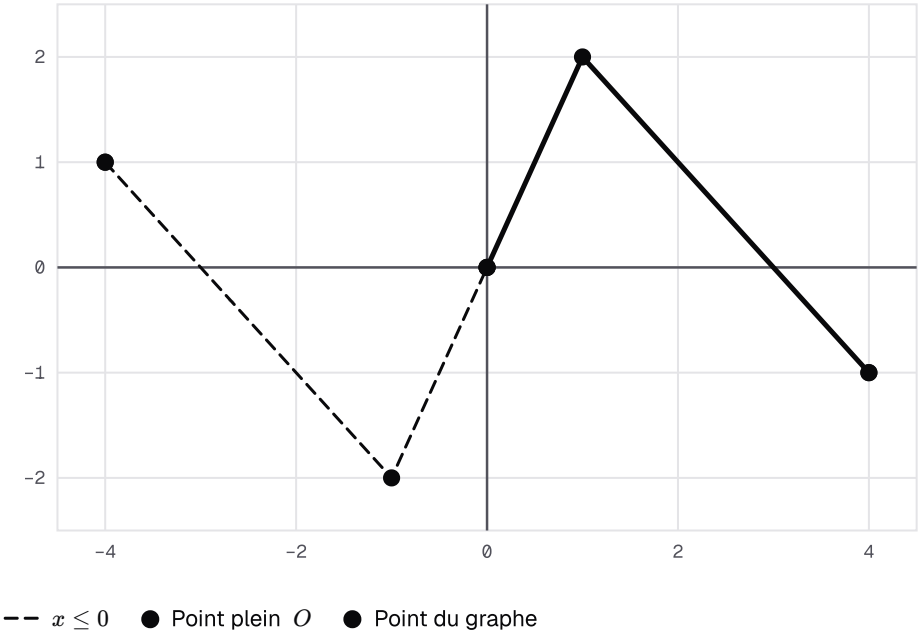
CORRIGÉ

Valeurs. Sur $[0;1]$, $f(x)=2x$; sur $[1;4]$, $f(x)=3-x$. Donc $f(0)=0$, $f(1)=2$ et $f(4)=3-4=-1$.

Courbe sur $[0;4]$. Sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;4]$, f est affine : sa courbe y est un segment. Elle joint $(0,0)$ à $(1,2)$, puis $(1,2)$ à $(4,-1)$.

Symétrie. La fonction f est impaire et le repère est orthogonal. D'après l'interprétation graphique de la parité, l'origine O est un centre de symétrie de la courbe. Le symétrique de $(1,2)$ par rapport à O est $(-1,-2)$; celui de $(4,-1)$ est $(-4,1)$.

Conclusion. Sur $[-4;4]$, la courbe de f est la ligne brisée qui joint, dans l'ordre, $(-4,1)$, $(-1,-2)$, $(0,0)$, $(1,2)$ et $(4,-1)$.



La courbe de f tracée sur [0 ; 4] en trait plein, puis complétée sur [–4 ; 0] en pointillés par la symétrie de centre O.

2.

Dresser le tableau de variations de f sur $[-4;4]$.

INDICE

Outil : une fonction impaire a, sur l'intervalle symétrique, le même sens de variation que sur l'intervalle de départ.

CORRIGÉ

Sur $[0;4]$**.** Sur $[0;1]$, $f(x)=2x$: c'est une fonction affine de coefficient $2>0$, donc f est croissante sur $[0;1]$. Sur $[1;4]$, $f(x)=3-x$, de coefficient $-1<0$: f est décroissante sur $[1;4]$.

Sur $[-4;0]$**.** La fonction f est impaire. D'après la propriété « parité et sens de variation », elle a le même sens de variation sur deux intervalles formés de réels opposés : f est croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $[-4;-1]$.

Images. $f(-4)=-f(4)=1$ et $f(-1)=-f(1)=-2$.

Conclusion. Le tableau de variations de f sur $[-4;4]$ est le suivant. Il garde deux flèches $\nearrow$ de suite : f est croissante sur $[-1;0]$ et sur $[0;1]$.

x	-4		-1		0		1		4
variations de f	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

3.

Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $[-4;4]$.

INDICE

Début : résous d'abord sur $[0;1]$, puis sur $[1;4]$. **Ensuite :** si $f(a)=0$, alors $f(-a)=-f(a)=0$.

CORRIGÉ

Sur $[0;4]$**.** On utilise l'expression de f sur chaque intervalle.

- Sur $[0;1]$: $2x=0$ donne $x=0$.
- Sur $[1;4]$: $3-x=0$ donne $x=3$, qui appartient bien à $[1;4]$.

Sur $[-4;0]$**.** Soit x dans $[-4;0]$. Alors $-x$ est dans $[0;4]$ et, comme f est impaire, $f(x)=-f(-x)$. Ainsi $f(x)=0$ équivaut à $f(-x)=0$, c'est-à-dire, d'après l'étude sur $[0;4]$, à $-x=0$ ou $-x=3$: $x=0$ ou $x=-3$.

Conclusion. Les solutions sont -3, 0 et 3. La courbe complète le confirme : elle rencontre l'axe des abscisses en trois points.

Exercice 2

Un taux de variation qui change de signe

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$, définie sur l'intervalle $[0; 2]$.

1.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0; 2]$. Vérifier que $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)$. En déduire le taux de variation T de f entre x_1 et x_2.

INDICE

Début : développe le second membre, en distribuant x_1, puis $-x_2$. **Ensuite :** divise par $x_1 - x_2$, qui n'est pas nul.

CORRIGÉ

Notons $Q = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3$.

Développement. On distribue x_1, puis x_2 :

$$\begin{aligned} x_1Q &= x_1^3 + x_1^2x_2 \\ &\quad + x_1x_2^2 - 3x_1, \\ x_2Q &= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \\ &\quad + x_2^3 - 3x_2. \end{aligned}$$

En soustrayant, les termes $x_1^2x_2$ et $x_1x_2^2$ disparaissent :

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)Q &= x_1^3 - 3x_1 \\ &\quad - (x_2^3 - 3x_2) \\ &= f(x_1) - f(x_2). \end{aligned}$$

Taux. Comme $x_1 \neq x_2$, on peut diviser par $x_1 - x_2$: le taux de variation $T = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ est égal à Q.

Conclusion. On a bien $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3)$, et :

$$T = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3.$$

2.

Calculer d'abord T pour $x_1 = 0{,}5$ et $x_2 = 1$. Étudier ensuite le signe de T lorsque x_1 et x_2 sont dans $[0;1]$, puis lorsqu'ils sont dans $[1;2]$. En déduire le sens de variation de f sur chacun de ces intervalles.

INDICE

Premier indice : si $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$, alors $a^2 \leq 1$ et $ab \leq 1$; compare donc chaque terme de $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ à 1.

Second indice : comme $x_1 \neq x_2$, l'un des deux est différent de 1 ; un des trois termes est alors strictement inférieur à 1.

CORRIGÉ

Un exemple. Pour $x_1 = 0{,}5$ et $x_2 = 1$:

$$\begin{aligned} T &= 0{,}25 + 0{,}5 + 1 - 3 \\ &= -1{,}25. \end{aligned}$$

Ce taux est négatif.

Sur $[0;1]$. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0;1]$. On peut multiplier membre à membre des inégalités entre nombres positifs : si $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$, alors $ab \leq 1$. Ainsi $x_1^2 \leq 1$, $x_1x_2 \leq 1$ et $x_2^2 \leq 1$.

Les deux réels sont distincts : l'un d'eux, disons x_1, est différent de 1. Alors $0 \leq x_1 < 1$, d'où $x_1^2 \leq x_1 < 1$. En additionnant les trois inégalités, dont une stricte :

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 < 3,$$

donc $T < 0$. D'après la propriété du taux de variation, f est strictement décroissante sur $[0;1]$.

Sur $[1;2]$. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[1;2]$. Si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, le produit membre à membre donne $ab \geq 1$. Ainsi $x_1^2 \geq 1$, $x_1x_2 \geq 1$ et $x_2^2 \geq 1$. L'un des deux réels, disons x_1, est différent de 1 : $x_1 > 1$, d'où $x_1^2 \geq x_1 > 1$. En additionnant, la somme $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ dépasse strictement 3, donc $T > 0$.

Conclusion. D'après la propriété du taux de variation, f est strictement décroissante sur $[0;1]$ et strictement croissante sur $[1;2]$.

3.

Dresser le tableau de variations de f sur $[0;2]$. En déduire le minimum de f sur $[0;2]$.

INDICE

Calcule $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$. **Outil :** une fonction décroissante puis croissante atteint son minimum au changement de sens.

CORRIGÉ

Images. $f(0)=0$, $f(1)=1-3=-2$ et $f(2)=8-6=2$.

Tableau. D'après la question 2 :

x	0		1		2
variations de f	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Minimum. La fonction f est décroissante sur $[0;1]$, puis croissante sur $[1;2]$. D'après la propriété « extremum et changement de sens de variation », elle atteint son minimum sur $[0;2]$ au changement de sens, en 1.

Conclusion. Le minimum de f sur $[0;2]$ est $f(1)=-2$, atteint en 1.

Exercice 3

Une racine carrée sur un intervalle symétrique

On considère la fonction $g : x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$.

1.

Déterminer l'ensemble de définition D_g, puis étudier la parité de g.

INDICE

Début : il faut $9 - x^2 \geq 0$, soit $x^2 \leq 9$. **Rappel :** $x^2 \leq 9$ équivaut à $|x| \leq 3$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. La racine existe lorsque $9 - x^2 \geq 0$, soit $x^2 \leq 9$. Pour un réel x, $x^2 \leq 9$ équivaut à $|x| \leq 3$, c'est-à-dire $-3 \leq x \leq 3$.

Parité. L'ensemble $[-3; 3]$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout x de cet ensemble, $-x$ y appartient aussi, et :

$$\begin{aligned} g(-x) &= \sqrt{9 - (-x)^2} \\ &= \sqrt{9 - x^2} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $D_g = [-3; 3]$ et la fonction g est paire.

2.

Soit x_1 et x_2 deux réels distincts de $[0;3]$. Vérifier que le taux de variation de g entre x_1 et x_2 vaut $T = \dfrac{-(x_1+x_2)}{\sqrt{9-x_1^2}+\sqrt{9-x_2^2}}$. En déduire le sens de variation de g sur $[0;3]$.

INDICE

Outil : multiplie $g(x_1)-g(x_2)$ par son expression conjuguée, puis utilise $(x_1^2-x_2^2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$. **Point délicat :** le dénominateur n'est pas nul.

CORRIGÉ

Dénominateur. Posons $S=\sqrt{9-x_1^2}+\sqrt{9-x_2^2}$. Les deux racines sont positives ou nulles. Sur $[0;3]$, $\sqrt{9-x^2}$ ne s'annule qu'en 3, et $x_1 \neq x_2$: un seul des deux réels, au plus, vaut 3. L'une des racines au moins est donc strictement positive, et $S>0$.

Expression conjuguée. On multiplie $g(x_1)-g(x_2)$ par S, puis on divise par S. D'après l'identité $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\begin{aligned} & g(x_1)-g(x_2) \\ &= \frac{(9-x_1^2)-(9-x_2^2)}{S} \\ &= \frac{x_2^2-x_1^2}{S} \\ &= \frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{S}. \end{aligned}$$

Taux. On divise par x_1-x_2, qui n'est pas nul :

$$T=\frac{-(x_1+x_2)}{S}.$$

C'est l'expression annoncée.

Signe. Les réels x_1 et x_2 sont positifs ou nuls et distincts, donc $x_1+x_2>0$. Avec $S>0$, on obtient $T<0$.

Conclusion. D'après la propriété du taux de variation, g est strictement décroissante sur $[0;3]$.

3.

En déduire le sens de variation de g sur $[-3;0]$, dresser son tableau de variations sur $[-3;3]$ et donner son maximum.

INDICE

Outil : pour une fonction paire, le sens de variation s'inverse sur l'intervalle symétrique.

CORRIGÉ

Sens sur $[-3;0]$. La fonction g est paire et décroissante sur $[0;3]$. D'après la propriété « parité et sens de variation », le sens d'une fonction paire s'inverse sur l'intervalle des réels opposés : g est croissante sur $[-3;0]$.

Images. $g(-3)=g(3)=\sqrt{0}=0$ et $g(0)=\sqrt{9}=3$.

Tableau.

x	-3		0		3
variations de g	0	↗	3	↘	0

Maximum. La fonction g est croissante sur $[-3;0]$, puis décroissante sur $[0;3]$: d'après la propriété « extremum et changement de sens de variation », son maximum est atteint en 0.

Conclusion. La fonction g est croissante sur $[-3;0]$; son maximum sur $[-3;3]$ est $g(0)=3$, atteint en 0.

Exercice 4

Un maximum établi grâce à un carré

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1.

Justifier que $D_f = \mathbb{R}$, puis que f est impaire.

INDICE

Outil : pour tout réel x, $x^2 \geq 0$. **Ensuite :** calcule $f(-x)$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$, donc $x^2+1 \geq 1 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais.

Parité. L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)}{(-x)^2+1} \\ &= -\frac{2x}{x^2+1} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $D_f = \mathbb{R}$ et la fonction f est impaire.

2.

Vérifier que, pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$. En déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : réduis $1 - f(x)$ au même dénominateur. **Ensuite :** un carré est positif ou nul ; calcule $f(1)$.

CORRIGÉ

Calcul. Soit x un réel. On réduit au même dénominateur, puis on reconnaît l'identité $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$:

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Signe. Le numérateur est un carré, donc positif ou nul ; le dénominateur est strictement positif. Ainsi $1 - f(x) \geq 0$: pour tout réel x, $f(x) \leq 1$.

Valeur atteinte. $f(1) = \dfrac{2}{1+1} = 1$.

Conclusion. Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 1, atteint en 1.

3.

En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Le maximum est-il atteint en un autre réel que 1 ?

INDICE

Outil : pour tout réel x, $f(x) = -f(-x)$ et $f(-x) \leq 1$. **Pour la seconde question :** quand le carré $(x-1)^2$ est-il nul ?

CORRIGÉ

Minimum. Soit x un réel. La question 2, appliquée au réel $-x$, donne $f(-x) \leq 1$. On multiplie par -1, négatif : le sens de l'inégalité change, et $-f(-x) \geq -1$. Or f est impaire, donc $-f(-x) = f(x)$: ainsi $f(x) \geq -1$. De plus, $f(-1) = -f(1) = -1$.

Maximum atteint ailleurs ? D'après la question 2, pour tout réel x, $f(x) = 1$ équivaut à $1 - f(x) = 0$, soit $(x-1)^2 = 0$, soit $x = 1$.

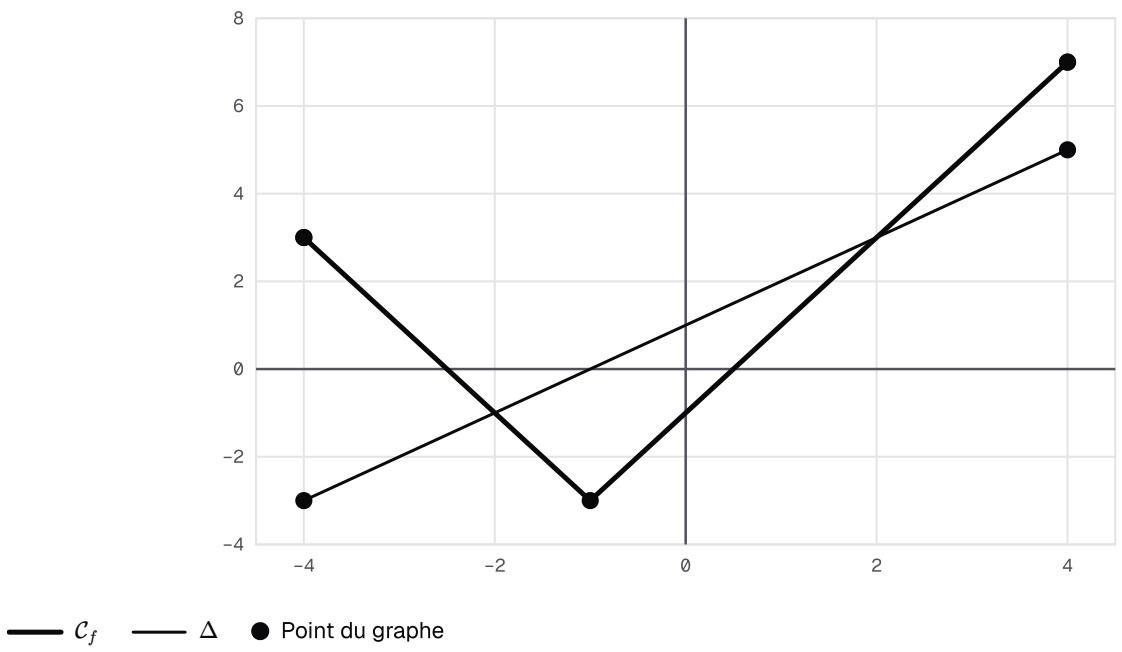
Conclusion. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1, atteint en -1. Le maximum 1 n'est atteint qu'en 1.

Exercice 5

Une courbe et une droite : équation et inéquations

Une fonction f est définie sur $[-4;4]$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est formée de deux segments : le premier va de $(-4,3)$ à $(-1,-3)$, le second de $(-1,-3)$ à $(4,7)$. On note Δ la droite d'équation $y=x+1$, courbe de la fonction $g : x \mapsto x+1$.

Trace $\mathcal{C}_f$ et Δ dans un même repère.



La courbe de f, formée de deux segments, et la droite Δ d'équation y = x + 1, dans un même repère.

1.

Vérifier que, pour x dans $[-4;-1]$, l'image $f(x)$ vaut $-2x-5$, et que, pour x dans $[-1;4]$, elle vaut $2x-1$.

INDICE

Outil : une fonction affine est connue par deux de ses valeurs ; contrôle les extrémités de chaque segment.

CORRIGÉ

Sur chaque segment, f est affine, et une fonction affine est connue par deux de ses valeurs. Il suffit de contrôler chaque expression aux deux extrémités du segment.

Premier segment. $-2\times(-4)-5=3$ et $-2\times(-1)-5=-3$: la droite d'équation $y=-2x-5$ passe par $(-4,3)$ et $(-1,-3)$.

Second segment. $2\times(-1)-1=-3$ et $2\times 4-1=7$: la droite d'équation $y=2x-1$ passe par $(-1,-3)$ et $(4,7)$.

Conclusion. Pour x dans $[-4;-1]$, l'image $f(x)$ vaut $-2x-5$; pour x dans $[-1;4]$, elle vaut $2x-1$.

2.

Lire les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et Δ, puis trouver par le calcul les réels x pour lesquels $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux.

INDICE

Outil : sur la figure, la droite coupe chaque segment une fois. **Pour le calcul :** distingue les deux intervalles.

CORRIGÉ

Lecture. On lit deux points communs à $\mathcal{C}_f$ et Δ, d'abscisses voisines de -2 et de 2.

Calcul. On résout $f(x) = g(x)$ sur chaque intervalle, avec l'expression de la question 1.

- Sur $[-4;-1]$: $-2x-5 = x+1$ équivaut à $-3x = 6$, soit $x = -2$, qui appartient bien à $[-4;-1]$.
- Sur $[-1;4]$: $2x-1 = x+1$ équivaut à $x = 2$, qui appartient bien à $[-1;4]$.

Conclusion. $f(x)$ et $g(x)$ sont égaux pour $x = -2$ et pour $x = 2$ seulement. Comme $g(-2) = -1$ et $g(2) = 3$, les points communs sont $(-2,-1)$ et $(2,3)$.

3.

Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) \geq g(x)$ et $f(x) < g(x)$ sur $[-4;4]$.

INDICE

Outil : repère où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ. **Point délicat :** les abscisses -2 et 2 sont solutions de l'inégalité large seulement.

CORRIGÉ

Lecture. La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $[-4;-2]$ et sur $[2;4]$, au-dessous entre -2 et 2.

Contrôle par le calcul. On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur chaque intervalle.

- Sur $[-4;-1]$: $f(x) - g(x) = -2x - 5 - x - 1 = -3x - 6$. Ce nombre est positif ou nul exactement lorsque $x \leq -2$.
- Sur $[-1;4]$: $f(x) - g(x) = 2x - 1 - x - 1 = x - 2$. Ce nombre est positif ou nul exactement lorsque $x \geq 2$.

Conclusion. Les abscisses -2 et 2 des points communs comptent pour l'inégalité large, pas pour l'inégalité stricte. L'ensemble des solutions de $f(x) \geq g(x)$ est $[-4;-2] \cup [2;4]$; celui de $f(x) < g(x)$ est $]-2;2[$.

Exercice 6

Coût et recette d'un atelier de lampes

Un petit atelier fabrique et vend des lampes, au plus 50 par jour. Chaque jour, il paie 200 dirhams de frais fixes, plus 15 dirhams par lampe fabriquée. Chaque lampe est vendue 25 dirhams. On note x le nombre de lampes fabriquées et vendues en un jour, avec x dans $[0;50]$.

1.

Exprimer le coût $C(x)$ et la recette $R(x)$, en dirhams. Calculer $C(10)$ et $R(10)$, puis interpréter.

INDICE

Début : le coût est la somme des frais fixes et du prix des x lampes.

CORRIGÉ

Coût. Il additionne les frais fixes, 200 dirhams, et le prix des x lampes, $15x$ dirhams : $C(x) = 15x + 200$.

Recette. Chaque lampe rapporte 25 dirhams : $R(x) = 25x$.

Images. $C(10) = 150 + 200 = 350$ et $R(10) = 250$.

Conclusion. Pour 10 lampes, la recette, 250 dirhams, reste inférieure au coût, 350 dirhams : l'atelier perd 100 dirhams ce jour-là.

2.

Dans un repère, C et R sont représentées par deux segments. Donner leurs extrémités et tracer ces segments sur ton cahier, avec 1 cm pour 5 lampes en abscisse et 1 cm pour 100 dirhams en ordonnée. Lire l'abscisse de leur point commun, puis contrôler par le calcul.

INDICE

Outil : calcule les images de 0 et de 50. **Pour le contrôle :** résous $25x = 15x + 200$.

CORRIGÉ

Extrémités.

- $C(0) = 200$ et $C(50) = 950$: le segment de C va de $(0, 200)$ à $(50, 950)$.
- $R(0) = 0$ et $R(50) = 1250$: le segment de R va de $(0, 0)$ à $(50, 1250)$.

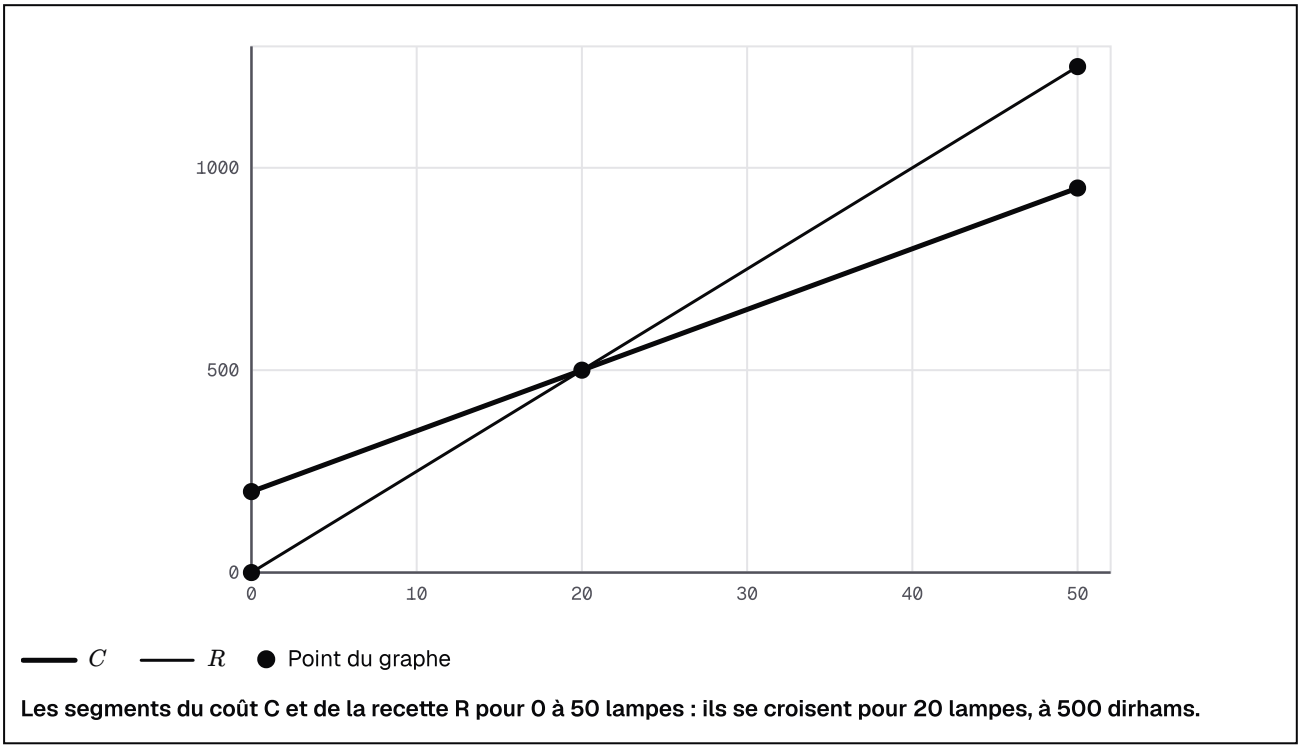
Lecture. Les deux segments se croisent en un point d'abscisse voisine de 20 et d'ordonnée voisine de 500.

Contrôle. Pour tout x de $[0; 50]$:

$$\begin{aligned} & R(x) = C(x) \\ \Leftrightarrow\ & 25x = 15x + 200 \\ \Leftrightarrow\ & 10x = 200 \\ \Leftrightarrow\ & x = 20. \end{aligned}$$

De plus, $R(20) = C(20) = 500$.

Conclusion. Le point commun aux deux segments est $(20, 500)$: pour 20 lampes, la recette égale le coût.



Les segments du coût C et de la recette R pour 0 à 50 lampes : ils se croisent pour 20 lampes, à 500 dirhams.

3.

Résoudre graphiquement l'inéquation $R(x) \geq C(x)$ sur $[0; 50]$, puis confirmer par le calcul. Combien de lampes l'atelier doit-il vendre pour ne pas perdre d'argent ?

INDICE

Outil : repère où le segment de R est au-dessus de celui de C. **Attention :** l'inégalité est large.

CORRIGÉ

Lecture. Le segment de R est au-dessus de celui de C à droite du point commun. L'inégalité est large : la borne 20 est comprise. On lit l'intervalle $[20; 50]$.

Calcul. $25x \geq 15x + 200$ équivaut à $10x \geq 200$. On divise par 10, qui est positif : $x \geq 20$. Avec $x \leq 50$, l'ensemble des solutions est $[20; 50]$.

Conclusion. L'atelier ne perd pas d'argent lorsqu'il vend au moins 20 lampes dans la journée.

Exercice 7

Racines carrées, valeur absolue : égales ou non ?

On considère les fonctions :

- $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $g : x \mapsto x - 2$ et $k : x \mapsto |x - 2|$;
- $u : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$ et $v : x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{x+1}$.

1.

Déterminer D_f, puis justifier que $f = k$.

INDICE

Outil : reconnais une identité remarquable sous la racine. **Rappel :** pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. D'après l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, pour tout réel x, $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, nombre positif ou nul : la racine existe toujours, donc $D_f = \mathbb{R}$. De même, $|x - 2|$ existe pour tout réel x : $D_k = \mathbb{R}$.

Images. D'après la propriété $\sqrt{a^2} = |a|$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-2)^2} \\ &= |x-2| \\ &= k(x). \end{aligned}$$

Conclusion. $D_f = \mathbb{R}$, et les fonctions f et k ont le même ensemble de définition et la même image en chaque réel, donc $f = k$.

2.

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

INDICE

Outil : $D_f = D_g$; cherche un réel où les images diffèrent, par exemple un réel inférieur à 2.

CORRIGÉ

Les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$: $D_f = D_g = \mathbb{R}$. On cherche un réel où leurs images diffèrent, par exemple 0 : $f(0) = |-2| = 2$ et $g(0) = -2$.

Conclusion. Comme $2 \neq -2$, $f(0) \neq g(0)$: les fonctions f et g ne sont pas égales.

Remarque. Pour $x \geq 2$, $|x-2| = x - 2$: f et g ont les mêmes images sur $[2; +\infty[$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer D_u et D_v. Les fonctions u et v sont-elles égales ?

INDICE

Pour D_u : étudie le signe du produit $x(x+1)$ avec la règle des signes. **Pour D_v :** chaque racine pose sa propre condition.

CORRIGÉ

Ensemble D_u. Il faut $x(x+1) \geq 0$. On étudie le signe du produit avec la règle des signes, selon la position de x par rapport à -1 et à 0.

- Si $x \leq -1$: les deux facteurs sont négatifs ou nuls, donc le produit est positif ou nul.
- Si $-1 < x < 0$: $x < 0$ et $x + 1 > 0$, donc le produit est strictement négatif.
- Si $x \geq 0$: les deux facteurs sont positifs ou nuls, donc le produit aussi.

Ainsi $D_u =]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$.

Ensemble D_v. Chaque racine pose sa condition : $x \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$. La seconde découle de la première, donc $D_v = [0 ; +\infty[$.

Conclusion. $D_u \neq D_v$: par exemple, $u(-2) = \sqrt{(-2) \times (-1)} = \sqrt{2}$, alors que -2 n'a pas d'image par v. Les fonctions u et v ne sont pas égales.