BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Généralités sur les fonctions numériques	Application	8

Exercice 1

Images et antécédents par le calcul

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - 4$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.

Calculer les images par f de -2 et de $\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Outil : remplace x par la valeur donnée, puis respecte les priorités : la puissance d'abord.

CORRIGÉ

Image de -2. On remplace x par -2, la puissance d'abord : $(-2)^2 = 4$ et $3 \times (-2) = -6$. Donc :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4 - 6 - 4 \\ &= -6. \end{aligned}$$

Image de $\dfrac{1}{2}$. On remplace x par $\dfrac{1}{2}$, puis on réduit au dénominateur 4 :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 4 \\ &= \frac{1 + 6 - 16}{4} \\ &= -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'image de -2 par f est -6 ; celle de $\dfrac{1}{2}$ est $-\dfrac{9}{4}$.

2.

Déterminer les antécédents de -4 par f.

INDICE

Début : écris l'équation $f(x) = -4$, puis factorise par x.

CORRIGÉ

Les antécédents de -4 sont les réels x tels que $f(x) = -4$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & f(x) = -4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 3x - 4 = -4 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x + 3) = 0. \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x = 0$ ou $x + 3 = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -3$.

Conclusion. Le réel -4 a deux antécédents par f : 0 et -3.

3.

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(x+4)$.

INDICE

Début : développe $(x-1)(x+4)$, puis réduis.

CORRIGÉ

Soit x un réel. On développe le produit, puis on réduit :

$$\begin{aligned}&(x-1)(x+4)\\&= x^2 + 4x - x - 4\\&= x^2 + 3x - 4\\&= f(x).\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(x+4)$.

4.

À l'aide de la question 3, déterminer les antécédents de 0 par f.

INDICE

Outil : l'équation $f(x) = 0$ devient une équation produit nul.

CORRIGÉ

D'après la question 3, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&f(x) = 0\\\Leftrightarrow\ &(x-1)(x+4) = 0\\\Leftrightarrow\ &x = 1 \text{ ou } x = -4.\end{aligned}$$

La dernière étape applique la règle du produit nul.

Conclusion. Le réel 0 a deux antécédents par f : 1 et -4.

Exercice 2

Quatre ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$;
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{4-2x}$;
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{5x}{x^2-9}$;
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+6}}$.

1.

Déterminer D_{f_1} et D_{f_2}.

INDICE

Outil : pour f_1, le dénominateur ne doit pas s'annuler ; pour f_2, une racine carrée n'existe que pour un nombre positif ou nul.

CORRIGÉ

Fonction f_1. Un quotient existe lorsque son dénominateur n'est pas nul. Il faut donc $x-3 \neq 0$, soit $x \neq 3$: seul le réel 3 est exclu.

Fonction f_2. La racine carrée $\sqrt{4-2x}$ existe lorsque $4-2x \geq 0$, soit $-2x \geq -4$. On divise les deux membres par -2, qui est négatif : le sens de l'inégalité change, et l'on obtient $x \leq 2$.

Conclusion. $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $D_{f_2} =]-\infty ; 2]$.

2.

Déterminer D_{f_3} et D_{f_4}.

INDICE

Pour f_3 : factorise x^2-9 avec une identité remarquable. **Pour f_4 :** la racine est au dénominateur ; elle ne doit donc pas valoir 0.

CORRIGÉ

Fonction f_3. Il faut $x^2-9 \neq 0$. D'après l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, pour tout réel x :

$$x^2-9=(x-3)(x+3).$$

D'après la règle du produit nul, ce produit s'annule pour $x=3$ et pour $x=-3$, et pour aucun autre réel : ces deux réels sont exclus.

Fonction f_4. Deux conditions s'imposent : la racine existe si $3x+6 \geq 0$, et le dénominateur $\sqrt{3x+6}$ n'est pas nul si $3x+6 \neq 0$. Ensemble, elles donnent $3x+6>0$, soit $3x>-6$. On divise par 3, qui est positif : $x>-2$.

Conclusion. $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$ et $D_{f_4} =]-2;+\infty[$.

Exercice 3

Ces fonctions sont-elles égales ?

Dans chaque cas, dire si les fonctions sont égales. Justifier.

1.

$f : x \mapsto \sqrt{x^2}$ et $g : x \mapsto |x|$.

INDICE

Rappel : pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

CORRIGÉ

Ensembles de définition. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$: la racine $\sqrt{x^2}$ existe, donc $D_f = \mathbb{R}$. La valeur absolue d'un réel existe toujours : $D_g = \mathbb{R}$.

Images. D'après la propriété $\sqrt{a^2} = |a|$, appliquée à $a = x$, pour tout réel x : $f(x) = |x| = g(x)$.

Conclusion. Les fonctions f et g ont le même ensemble de définition et la même image en chaque réel : $f = g$.

2.

$h : x \mapsto \dfrac{x^2 + x}{x}$ et $k : x \mapsto x + 1$.

INDICE

Outil : compare d'abord les ensembles de définition.

CORRIGÉ

Ensembles de définition. Le dénominateur x ne doit pas s'annuler : $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En revanche, $k(x)$ existe pour tout réel x : $D_k = \mathbb{R}$.

Conclusion. Les ensembles de définition sont différents, donc $h \neq k$.

Remarque. Pour tout réel x non nul, $h(x) = \dfrac{x(x+1)}{x} = x + 1 = k(x)$. Les deux fonctions prennent les mêmes valeurs sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; seul le réel 0 les sépare, car il a une image par k et aucune par h.

3.

$u : x \mapsto (x + 2)^2$ et $v : x \mapsto x^2 + 4$.

INDICE

Outil : les ensembles sont égaux ; calcule $u(1)$ et $v(1)$.

CORRIGÉ

Ensembles de définition. Les deux expressions existent pour tout réel : $D_u = D_v = \mathbb{R}$.

Une image qui diffère. $u(1) = 3^2 = 9$ et $v(1) = 1 + 4 = 5$, avec $9 \neq 5$.

Conclusion. Les images de 1 par u et par v sont différentes : $u \neq v$.

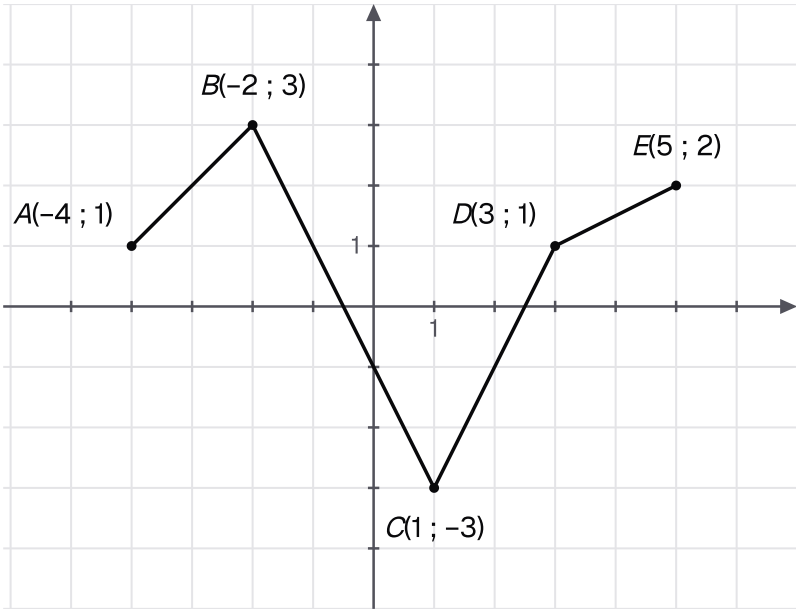
Remarque. Pour tout réel x, $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$: l'expression de v oublie le terme $4x$.

Exercice 4

Lire des images et des antécédents sur une ligne brisée

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est la ligne brisée qui joint, dans cet ordre, les points $A(-4,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$, $D(3,1)$ et $E(5,2)$. Entre deux points consécutifs, la courbe est un segment. Elle s'arrête en A et en E, qui lui appartiennent.

Trace $\mathcal{C}_f$ sur ton cahier, dans un repère, avec un quadrillage.



La ligne brisée ABCDE de l'énoncé, tracée sur un quadrillage, avec ses deux extrémités A et E.

1.

Quel est l'ensemble de définition de f, d'après la ligne brisée ?

INDICE

Outil : un réel a a une image exactement quand la courbe a un point d'abscisse a. Regarde les abscisses du premier et du dernier point.

CORRIGÉ

Un réel x a une image par f exactement lorsque $\mathcal{C}_f$ possède un point d'abscisse x.

La ligne brisée va sans interruption de A, d'abscisse -4, à E, d'abscisse 5 : elle a un point d'abscisse x pour chaque réel x compris entre -4 et 5, et pour aucun autre.

Les extrémités A et E appartiennent à la courbe : les bornes -4 et 5 sont comprises.

Conclusion. $D_f = [-4;5]$.

2.

Lire les images de -2 et de 3 par f.

INDICE

Outil : l'image de a est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

CORRIGÉ

L'image d'un réel est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ qui a ce réel pour abscisse.

- Le point d'abscisse -2 est le sommet $B(-2,3)$: $f(-2)=3$.
- Le point d'abscisse 3 est le sommet $D(3,1)$: $f(3)=1$.

Conclusion. L'image de -2 par f est 3, celle de 3 est 1.

3.

Déterminer graphiquement les antécédents de 1 par f.

INDICE

Outil : trace la droite d'équation $y=1$ et compte ses points communs avec $\mathcal{C}_f$. **Attention :** l'un d'eux n'est pas un sommet.

CORRIGÉ

Les antécédents de 1 sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y=1$.

Lecture. Cette droite rencontre $\mathcal{C}_f$ en trois points : les sommets $A(-4,1)$ et $D(3,1)$, et un point du segment $[BC]$ dont l'abscisse est voisine de -1.

Contrôle sur $[BC]$. De $B(-2,3)$ à $C(1,-3)$, l'abscisse augmente de 3 et l'ordonnée baisse de 6 : l'ordonnée baisse de 2 chaque fois que l'abscisse augmente de 1. Au point d'abscisse -1, elle vaut donc $3-2=1$.

Conclusion. Le réel 1 a trois antécédents par f : -4, -1 et 3.

4.

Combien le réel 4 a-t-il d'antécédents ? Et le réel -3 ?

INDICE

Outil : repère le point le plus haut et le point le plus bas de la courbe.

CORRIGÉ

Réel 4. Le point le plus haut de $\mathcal{C}_f$ est B, d'ordonnée 3. Comme $4>3$, la droite d'équation $y=4$ passe au-dessus de la courbe sans la rencontrer.

Réel -3. Le point le plus bas de $\mathcal{C}_f$ est $C(1,-3)$, et c'est son seul point d'ordonnée -3 : la droite d'équation $y=-3$ touche la courbe en C seulement.

Conclusion. Le réel 4 n'a aucun antécédent par f ; le réel -3 en a un seul, 1.

Exercice 5

Paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^3 - 4x$, définie sur $\mathbb{R}$;
- $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$, définie sur $\mathbb{R}$;
- $h : x \mapsto x^3 + 1$, définie sur $\mathbb{R}$;
- $k : x \mapsto \sqrt{x+3}$.

1.

Étudier la parité de f et celle de g.

INDICE

Méthode : $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 ; calcule $f(-x)$ et $g(-x)$, puis compare. **Rappel :** $(-x)^3 = -x^3$ et $(-x)^2 = x^2$.

CORRIGÉ

L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : pour tout réel x, $-x$ est aussi un réel. Il reste à comparer $f(-x)$ à $f(x)$, puis $g(-x)$ à $g(x)$.

Fonction f. Pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$, donc :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 4(-x) \\ &= -x^3 + 4x \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Fonction g. Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$, donc :

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1} \\ &= \frac{x^2}{x^2+1} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est impaire et la fonction g est paire.

2.

Étudier la parité de h et celle de k.

INDICE

Pour h : calcule $h(1)$ et $h(-1)$. **Pour k :** commence par l'ensemble de définition.

CORRIGÉ

Fonction h. Un seul réel bien choisi suffit à réfuter une parité. Avec 1 : $h(1) = 1 + 1 = 2$ et $h(-1) = -1 + 1 = 0$.

- $h(-1) \neq h(1)$, car $0 \neq 2$: h n'est pas paire.
- $h(-1) \neq -h(1)$, car $0 \neq -2$: h n'est pas impaire.

Fonction k. La racine existe lorsque $x + 3 \geq 0$, soit $x \geq -3$: $D_k = [-3; +\infty[$. Le réel 4 appartient à D_k , mais son opposé -4 n'y appartient pas. L'ensemble D_k n'est donc pas symétrique par rapport à 0.

Conclusion. La fonction h n'est ni paire ni impaire ; la fonction k non plus, puisque son ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

Exercice 6

La température d'une ville sur une journée

Une station météo modélise la température d'une ville au cours d'une journée par une fonction f : $f(t)$ est la température, en degrés Celsius, à l'instant t, en heures, pour t dans $[0;24]$.

La courbe de f est formée de trois segments : de $(0,12)$ à $(5,8)$, puis jusqu'à $(15,26)$, enfin jusqu'à $(24,14)$.

Trace cette courbe sur ton cahier, avec 1 cm pour 2 h en abscisse et 1 cm pour 5 degrés en ordonnée.

1.

Dresser le tableau de variations de f sur $[0;24]$.

INDICE

Méthode : suis la courbe depuis $t=0$ et note les deux instants où elle change de sens.

CORRIGÉ

On parcourt la courbe de gauche à droite.

- De $(0,12)$ à $(5,8)$, elle descend.
- De $(5,8)$ à $(15,26)$, elle monte.
- De $(15,26)$ à $(24,14)$, elle descend.

Le sens change aux instants 5 et 15.

Conclusion. Le tableau de variations de f sur $[0;24]$ est le suivant.

t	0		5		15		24
variations de f	12	↘	8	↗	26	↘	14

2.

Sur quels intervalles la température augmente-t-elle ? diminue-t-elle ? La fonction f est-elle décroissante sur $[0;24]$?

INDICE

Outil : le tableau de la question 1. **Attention :** deux images ne prouvent jamais qu'une fonction est croissante ou décroissante ; en revanche, un seul couple bien choisi suffit à prouver qu'elle ne l'est pas.

CORRIGÉ

Sens de variation. D'après le tableau, f est croissante sur $[5;15]$; elle est décroissante sur $[0;5]$ et sur $[15;24]$.

Sur $[0;24]$ tout entier. Si f était décroissante sur $[0;24]$, on aurait $f(0) \geq f(24)$, puisque $0 < 24$. Or $f(0) = 12$ et $f(24) = 14$: ce seul couple montre que f n'est pas décroissante sur $[0;24]$. Elle n'y est pas non plus croissante, car $0 < 5$ alors que $f(5) = 8 < f(0) = 12$.

Conclusion. La température augmente de 5 h à 15 h ; elle diminue de 0 h à 5 h, puis de 15 h à 24 h. La fonction f n'est pas décroissante sur $[0;24]$.

Exercice 7

Extremums lus sur un tableau de variations

Une fonction f définie sur $[-3;4]$ a le tableau de variations suivant.

x	-3		-1		2		4
variations de f	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

1.

Donner le maximum et le minimum de f sur $[-3;4]$, et les réels où ils sont atteints.

INDICE

Outil : compare les valeurs aux changements de sens avec les images des bornes -3 et 4.

CORRIGÉ

Sur chacun des intervalles du tableau, f est monotone : ses valeurs y restent comprises entre les images des deux bornes. Le maximum et le minimum se lisent donc parmi les valeurs écrites dans le tableau : 2, 5, -1 et 3.

Maximum. La plus grande de ces valeurs est 5, image de -1.

Minimum. La plus petite est -1, image de 2.

Conclusion. Sur $[-3;4]$, le maximum de f est 5, atteint en -1 ; le minimum de f est -1, atteint en 2.

2.

Donner le maximum et le minimum de f sur $[2;4]$.

INDICE

Outil : sur $[2;4]$, f est croissante.

CORRIGÉ

Sur $[2;4]$, f est croissante : pour tout x de $[2;4]$, $f(2) \leq f(x) \leq f(4)$, soit $-1 \leq f(x) \leq 3$.

Conclusion. Sur $[2;4]$, le minimum de f est $f(2) = -1$, atteint en 2, et son maximum est $f(4) = 3$, atteint en 4.

Remarque. Le maximum dépend de l'intervalle choisi : sur $[-3;4]$, il vaut 5.

3.

On a $f(x) \leq 6$ pour tout x de $[-3;4]$. Le réel 6 est-il le maximum de f sur cet intervalle ?

INDICE

Rappel : un maximum est une image, atteinte en un réel de l'intervalle.

CORRIGÉ

Un maximum de f sur $[-3;4]$ est une image : c'est une valeur $f(a)$ prise en un réel a de l'intervalle. D'après le tableau, la plus grande image est 5 ; aucune image ne vaut 6.

Conclusion. Non. Le réel 6 majore f sur $[-3;4]$, mais il n'est atteint en aucun réel : ce n'est pas le maximum de f.

Exercice 8

Résoudre graphiquement une équation

Une fonction f est définie sur $[-3;4]$. Sa courbe relie par des segments, de gauche à droite, les points $(-3,-2)$, $(-1,2)$, $(1,0)$ et $(4,3)$. Trace-la sur ton cahier.

1.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=1$.

INDICE

Outil : trace la droite d'équation $y=1$, puis compte ses points communs avec la courbe.

CORRIGÉ

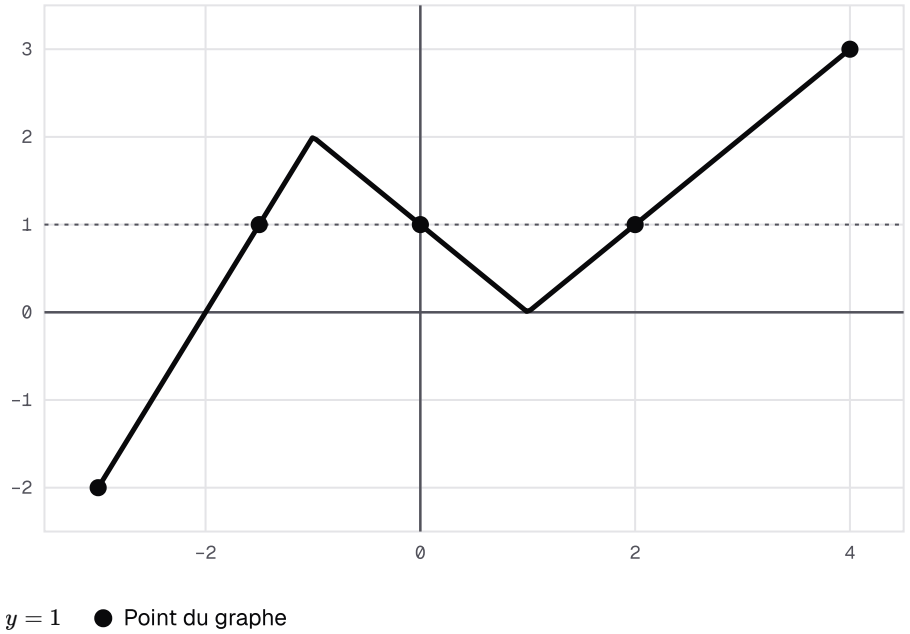
Les solutions de $f(x)=1$ sont les abscisses des points communs à la courbe et à la droite d'équation $y=1$.

Lecture. Cette droite coupe la courbe en trois points, d'abscisses voisines de $-1{,}5$, 0 et 2.

Contrôle sur chaque segment.

- De $(-3,-2)$ à $(-1,2)$, l'ordonnée augmente de 2 par unité : elle vaut 1 en $-3+1{,}5=-1{,}5$.
- De $(-1,2)$ à $(1,0)$, elle diminue de 1 par unité : elle vaut 1 en 0.
- De $(1,0)$ à $(4,3)$, elle augmente de 1 par unité : elle vaut 1 en 2.

Conclusion. Les solutions sont $-1{,}5$, 0 et 2.



La ligne brisée de f et la droite d'équation y = 1 : trois points communs, d'abscisses −1,5, 0 et 2.

2.

Résoudre graphiquement les équations $f(x) = -2$ et $f(x) = 4$.

INDICE

Outil : repère les points le plus bas et le plus haut de la courbe.

CORRIGÉ

Équation $f(x) = -2$. Le point le plus bas de la courbe est $(-3, -2)$, et c'est son seul point d'ordonnée -2.

Équation $f(x) = 4$. Le point le plus haut de la courbe a pour ordonnée 3, et $3 < 4$: la droite d'équation $y = 4$ ne rencontre pas la courbe.

Conclusion. L'équation $f(x) = -2$ a une seule solution, -3 ; l'équation $f(x) = 4$ n'a aucune solution.