BURHAN

Généralités sur les fonctions numériques

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

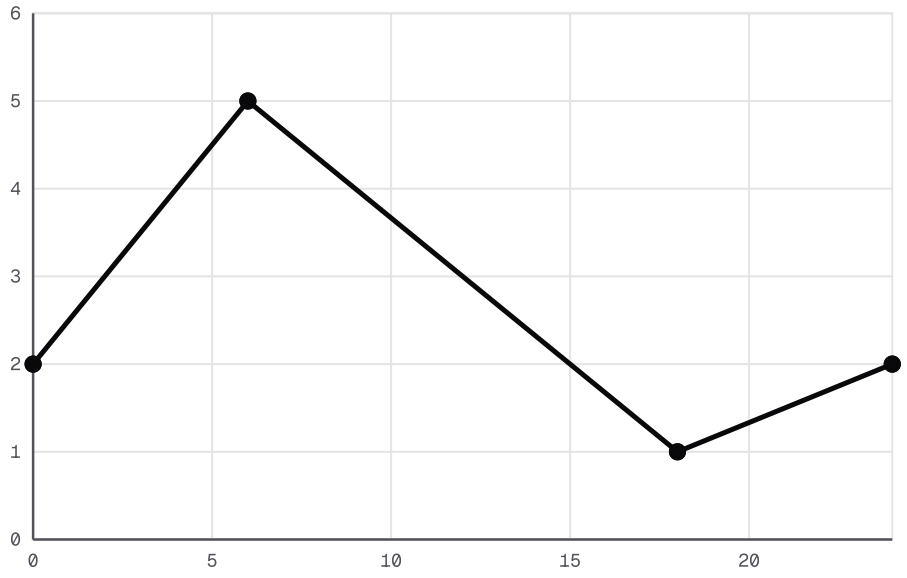
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/generalites-sur-les-fonctions/cours

Chapitre	Semestre
Généralités sur les fonctions numériques	Semestre 2

Lire une situation sur une courbe

Le réservoir d'eau d'un village se remplit la nuit grâce à une pompe. Le jour, les habitants puisent l'eau, et il se vide.

Un capteur mesure la hauteur d'eau, en mètres, à chaque instant de la journée. La courbe ci-dessous donne cette hauteur selon l'heure t, de 0 h à 24 h.



Hauteur d'eau dans le réservoir au cours d'une journée

Devine : Une prédiction

À quelle heure le niveau d'eau du réservoir est-il le plus haut ?

A. À 0 h, au début de la journée.

Faux.

À 0 h, la hauteur vaut 2 m, et la courbe monte ensuite.

B. À 6 h, à la fin de la nuit.

Juste.

Juste : la courbe atteint son point le plus haut, à 5 m.

C. À 24 h, en fin de journée.

Faux.

Le soir, la courbe remonte, mais seulement jusqu'à 2 m.

D. À 18 h, après la journée.

Faux.

À 18 h, c'est le point le plus bas : 1 m.

Correction

Le point le plus haut de la courbe est $(6, 5)$: à 6 h, la hauteur atteint 5 m.

Avant 6 h, la courbe monte. Après, elle descend jusqu'à 18 h, puis remonte sans dépasser 2 m.

Cette courbe représente une **fonction** : à chaque heure, elle associe une seule hauteur.

Dans ce chapitre, tu apprends à construire et à lire une telle courbe. Tu étudies aussi ses symétries, ses montées et ses descentes, son point le plus haut et son point le plus bas.

Enfin, tu résous des équations en lisant des courbes.

Fonction, image, antécédent, ensemble de définition

Un tableau de tarifs

Un parking affiche ses tarifs selon la durée de stationnement, en heures entières :

durée (h)	1	2	3	4	5
prix (DH)	6	10	14	14	14

À partir de 3 h, le prix ne change plus : c'est un forfait.

Vérifie : Lire un tableau

Dans ce tableau, quelles durées coûtent 14 DH ?

A. 3 h, et aucune autre.

Faux.

3 h coûte bien 14 DH, mais ce n'est pas la seule durée.

B. 3 h, 4 h et 5 h.

Juste.

Juste : trois durées ont le même prix.

C. Aucune, car 14 n'est pas une durée.

Faux.

On cherche 14 dans la ligne des prix, puis on lit les durées au-dessus.

D. 5 h seulement, la plus longue.

Faux.

5 h coûte 14 DH, comme 3 h et 4 h.

Correction
On repère 14 dans la ligne des prix, puis on lit les durées au-dessus : 3 h, 4 h et 5 h.

Chaque durée a un seul prix. En revanche, un même prix peut correspondre à plusieurs durées.

Rappel du collège : une fonction affine $x \mapsto ax + b$ associe à chaque réel x un seul réel, $ax + b$. Par exemple, avec $u : x \mapsto 3x - 2$, l'image de 4 est :

$$u(4) = 3 \times 4 - 2 = 10.$$

Le tableau du parking fait de même : à chaque durée, il associe un seul prix. Voici l'idée générale.

Définition : Fonction numérique, image, antécédent

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Définir une **fonction numérique** f sur D, c'est associer à **chaque** réel x de D un **seul** réel, noté $f(x)$. On écrit $f : x \mapsto f(x)$.

- x s'appelle la **variable** ; le réel $f(x)$ s'appelle l'**image** de x par f.
- Si $f(a) = b$, on dit que a est **un antécédent** de b par f.

Une fonction peut être donnée par une expression, par un tableau de valeurs ou par une courbe.

Image et antécédents par le calcul

Exemple : une image, puis des antécédents

Soit $g : x \mapsto 7 - 3x$, définie sur $\mathbb{R}$.

Image de -2. On remplace x par -2 :

$$g(-2) = 7 - 3 \times (-2) = 13.$$

Antécédents de 1. On résout l'équation $g(x) = 1$, du premier degré :

$$\begin{aligned} 7 - 3x &= 1 \\ -3x &= -6 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Le réel 2 est le seul antécédent de 1 par g.

Contrôle : $g(2) = 7 - 6 = 1$.

Attention : une seule image, mais des antécédents

✗ « Pour le parking, l'antécédent de 14 est 3. »

✓ « 3, 4 et 5 sont des antécédents de 14. »

Un réel a **une seule** image. Il peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents. Ici, 20 n'en a aucun : aucune durée ne coûte 20 DH.

Écris « l'antécédent » seulement après avoir vérifié qu'il est unique, comme pour g.

Où la fonction est-elle définie ?

En clair. Une expression n'a pas toujours de sens.

Pour $x = 2$, le quotient $\dfrac{1}{x-2}$ demande de diviser par 0 : c'est impossible.

Pour $x = -9$, $\sqrt{x}$ demande la racine carrée d'un nombre négatif : elle n'existe pas.

Avant de calculer, il faut donc savoir quels réels ont une image.

Devine : Un réel sans image

Soit $v : x \mapsto \dfrac{5}{x+3}$. Quel réel n'a pas d'image par v ?

A. 0

Faux.

$v(0) = \dfrac{5}{3}$: le réel 0 a une image.

B. -3

Juste.

Juste : pour $x = -3$, le dénominateur $x + 3$ vaut 0.

C. 3

Faux.

$v(3) = \dfrac{5}{6}$: c'est $x + 3$ qu'il faut annuler, pas $x - 3$.

D. 5

Faux.

Seul le dénominateur compte, et $v(5) = \dfrac{5}{8}$.

Correction

Un quotient n'existe que si son dénominateur n'est pas nul. Or $x + 3 = 0$ équivaut à $x = -3$.

Seul -3 n'a pas d'image : les réels qui ont une image forment $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, qui se lit « $\mathbb{R}$ privé de -3 ».

Définition : Ensemble de définition d'une fonction

L'**ensemble de définition** d'une fonction f, noté D_f, est l'ensemble des réels qui ont une image par f.

Lorsque f est donnée par une expression, sans autre précision, D_f est l'ensemble des réels x pour lesquels cette expression a un sens. En particulier :

- un dénominateur ne doit pas s'annuler ;
- un nombre placé sous une racine carrée doit être positif ou nul.

Méthode : déterminer un ensemble de définition

1. **Repère** les dénominateurs et les racines carrées de l'expression.
2. **Écris** une condition pour chacun : un dénominateur différent de 0, un nombre sous la racine positif ou nul.
3. **Résous** ces conditions : ce sont souvent des équations ou des inéquations du premier degré.
4. **Conclus** en écrivant D_f avec des intervalles. Sans dénominateur ni racine, $D_f = \mathbb{R}$.

Deux exemples types

Exemple : des dénominateurs

Un dénominateur. Soit $w : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-4}$. Le dénominateur doit être non nul : $x - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 4$. D'après la méthode :

$$D_w = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Cet ensemble s'écrit aussi $]-\infty ; 4[\cup]4 ; +\infty[$: le signe $\cup$ désigne la réunion des deux intervalles. Par exemple, $w(5) = \dfrac{11}{1} = 11$.

Un produit au dénominateur. Pour $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+2)}$, on utilise la règle du produit nul : un produit est nul exactement quand l'un de ses facteurs est nul. Deux réels sont exclus, 0 et -2 : l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 0\}$.

Exemple : une racine carrée

Soit $r : x \mapsto \sqrt{6 - 2x}$. Le nombre sous la racine doit être positif ou nul :

$$\begin{aligned} 6 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -6 \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

Pour passer à la dernière ligne, on divise par -2, qui est négatif : d'après l'ordre et la multiplication, le sens de l'inégalité change.

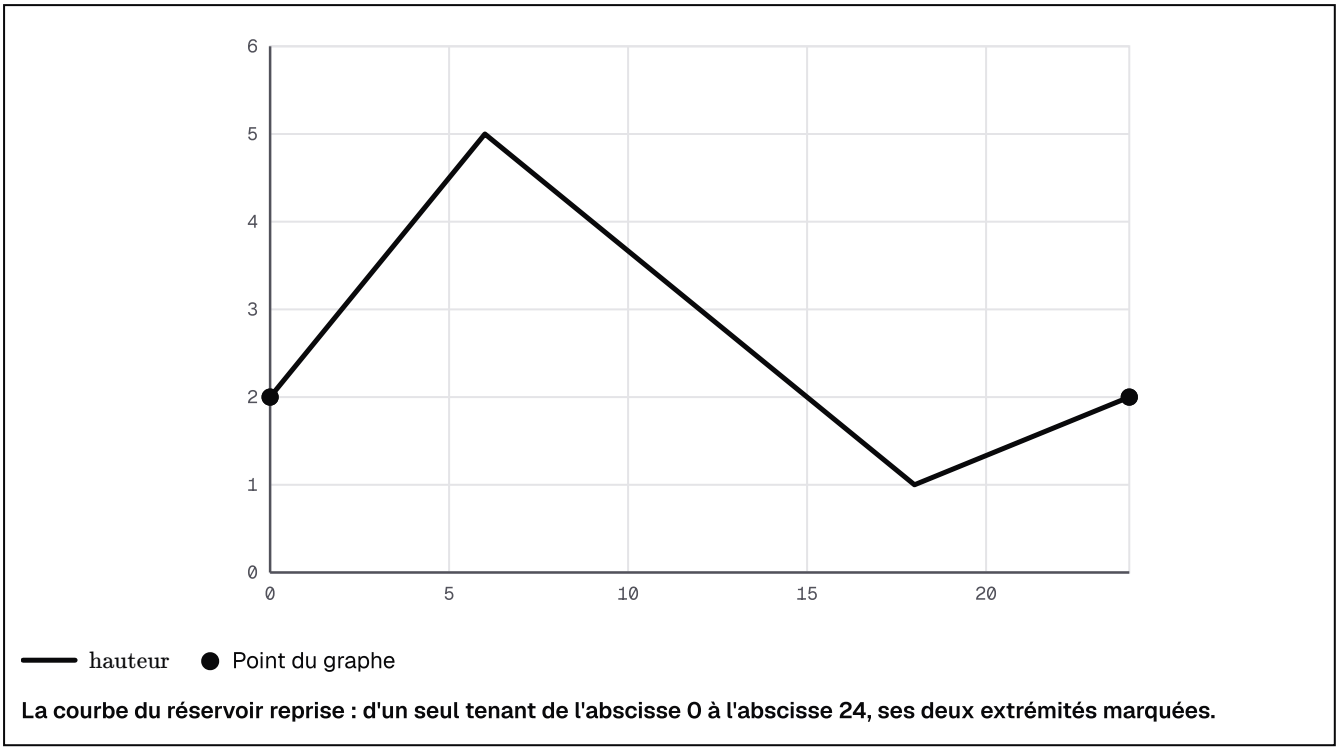
Donc $D_r =]-\infty ; 3]$.

Contrôle : $r(3) = \sqrt{0} = 0$ et $r(1) = \sqrt{4} = 2$, mais $r(5)$ n'existe pas.

Exemple : un ensemble de définition lu

Sans expression, l'ensemble de définition se lit sur une courbe ou dans un tableau.

- **Sur une courbe.** La courbe du réservoir, au début du chapitre, est tracée d'un seul tenant du point d'abscisse 0 au point d'abscisse 24. La fonction qui donne la hauteur d'eau est donc définie sur $[0; 24]$.
- **Dans un tableau.** Le tableau du parking donne un prix pour 1, 2, 3, 4 et 5 h seulement. Cette fonction a pour ensemble de définition $\{1; 2; 3; 4; 5\}$: elle n'associe aucun prix à 6 h.



La courbe du réservoir reprise : d'un seul tenant de l'abscisse 0 à l'abscisse 24, ses deux extrémités marquées.

Vérifie, puis à toi

Vérifie : Le bon crochet

Quel est l'ensemble de définition de $s : x \mapsto \sqrt{2x - 8}$?

A. $[4; +\infty[$

Juste.

Juste : $2x - 8 \geq 0$ équivaut à $x \geq 4$, et 4 est inclus.

B. $]4; +\infty[$

Faux.

Le nombre sous la racine peut être nul : $s(4) = \sqrt{0} = 0$ existe.

C. $]-\infty ; 4]$

Faux.

L'inégalité est dans le mauvais sens : $s(0)$ demanderait $\sqrt{-8}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

Faux.

Sous une racine, on ne retire pas un point : on demande un nombre positif ou nul.

Correction

On écrit $2x - 8 \geq 0$, soit $2x \geq 8$. On divise par 2, qui est positif : le sens ne change pas, et $x \geq 4$.

Donc $D_s = [4 ; +\infty[$, avec un crochet fermé en 4 car $\sqrt{0} = 0$.

À toi : Deux conditions à la fois

Soit $q : x \mapsto \dfrac{1}{x-5} + \sqrt{x}$. Détermine D_q, puis calcule $q(4)$. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1

Applique la méthode : l'expression contient un dénominateur et une racine carrée.

Indice 2

Écris une condition par obstacle, puis résous chacune.

Indice 3

Point délicat : les deux conditions doivent être vraies en même temps ; retire 5 de l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Réponse

Conditions. Le dénominateur doit être non nul : $x \neq 5$. Le nombre sous la racine doit être positif ou nul : $x \geq 0$.

Ensemble de définition. Les deux conditions doivent être vraies en même temps :

$$D_q = [0 ; 5[\cup]5 ; +\infty[.$$

Image de 4. On a $4 \in D_q$, et :

$$\begin{aligned} q(4) &= \frac{1}{4-5} + \sqrt{4} \\ &= -1 + 2 = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $D_q = [0 ; 5[\cup]5 ; +\infty[$ et $q(4) = 1$.

Égalité de deux fonctions ; courbe représentative

Deux expressions, une seule fonction ?

En clair. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x}{x}$ et $g : x \mapsto x - 4$.

Pour $x = 2$: $f(2) = \dfrac{4 - 8}{2} = -2$ et $g(2) = -2$.

Pour $x = 5$: $f(5) = \dfrac{25 - 20}{5} = 1$ et $g(5) = 1$.

Les deux expressions semblent donner les mêmes images. Mais que se passe-t-il pour $x = 0$?

Devine : Égales ou non ?

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

A. Oui : on simplifie $f(x)$ par x et l'on trouve $g(x)$.

Faux.

On ne simplifie par x que si $x \neq 0$; or le réel 0 compte aussi.

B. Oui : elles ont les mêmes images en 2 et en 5.

Faux.

Deux valeurs égales ne suffisent pas : on compare d'abord les ensembles de définition.

C. Non : g a une image en 0, mais pas f.

Juste.

Juste : $f(0)$ demanderait de diviser par 0, alors que $g(0) = -4$.

D. Non : leurs images diffèrent pour tout réel x non nul.

Faux.

Pour $x \neq 0$, les deux images sont égales à $x - 4$.

Correction

Le dénominateur x doit être non nul, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors que $D_g = \mathbb{R}$.

Les ensembles de définition sont différents : $f \neq g$.

Pour $x \neq 0$, on a bien $\dfrac{x(x-4)}{x} = x - 4$, mais cela ne suffit pas.

Définition : Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont **égales** lorsque :

- elles ont le **même** ensemble de définition : $D_f = D_g$;
- pour tout x de D_f, $f(x) = g(x)$.

On écrit alors $f = g$.

Exemple : deux fonctions égales, deux fonctions différentes

Deux fonctions égales. Soit $u : x \mapsto \sqrt{x^2}$ et $v : x \mapsto |x|$. Un carré est positif ou nul, donc $D_u = \mathbb{R} = D_v$. De plus, $\sqrt{a^2} = |a|$ pour tout réel a. Donc $u = v$.

Deux fonctions différentes. Soit $m : x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $n : x \mapsto x$. Pour tout réel $x \geq 0$, les deux images valent x. Mais $D_m = [0; +\infty[$ et $D_n = \mathbb{R}$: donc $m \neq n$.

Un piège et la méthode

Attention : simplifier peut changer l'ensemble de définition

✗ « La fonction $p : x \mapsto \dfrac{2x+6}{x+3}$ se simplifie : c'est la fonction constante égale à 2. »

✓ Pour $x \neq -3$, $\dfrac{2(x+3)}{x+3} = 2$. Mais p n'a pas d'image en -3 : $D_p = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, alors que $x \mapsto 2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Ces deux fonctions ne sont donc pas égales. Compare toujours les ensembles de définition **avant** les expressions.

Méthode : reconnaître deux fonctions égales

1. **Détermine** D_f et D_g. S'ils sont différents, conclus : $f \neq g$.
2. **Si** $D_f = D_g$**, transforme** $f(x)$ jusqu'à obtenir $g(x)$, pour tout x de D_f.
3. **Conclus** : $f = g$. Pour prouver $f \neq g$ quand $D_f = D_g$, un seul réel a tel que $f(a) \neq g(a)$ suffit.

Tracer une courbe point par point

Rappel du collège : dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, chaque point a une abscisse et une ordonnée. La courbe d'une fonction affine est une droite : deux points suffisent pour la tracer.

Pour $c : x \mapsto \sqrt{x+4}$, ce n'est plus une droite. Comment la tracer ? On calcule des images, on place les points, puis on les relie avec soin.

Définition : Courbe représentative d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La **courbe représentative** de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ lorsque x parcourt D_f.

Ainsi, un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $x \in D_f$ et $y = f(x)$. On dit que $y = f(x)$ est une **équation** de la courbe $\mathcal{C}_f$.

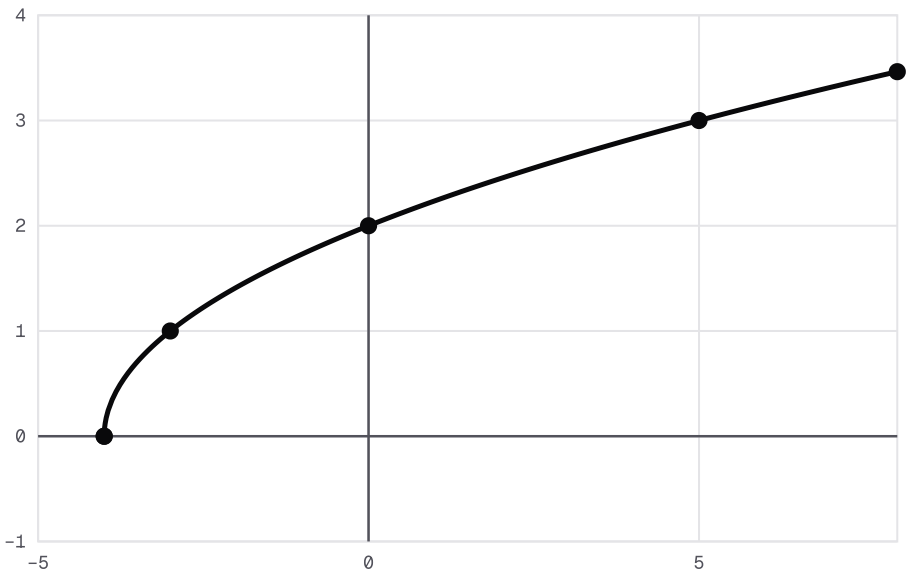
Exemple : une courbe point par point

La fonction $c : x \mapsto \sqrt{x+4}$ est définie lorsque $x + 4 \geq 0$, donc $D_c = [-4; +\infty[$.

On choisit des valeurs de x qui donnent des racines simples :

x	-4	-3	0	5
$c(x)$	0	1	2	3

On place les points $(-4, 0)$, $(-3, 1)$, $(0, 2)$ et $(5, 3)$. On trace ensuite une courbe régulière qui les relie.



Courbe de la fonction c, construite point par point

Lire une image et des antécédents

Méthode : lire une image ou des antécédents sur une courbe

1. **Image de** a : place a sur l'axe des abscisses ; va verticalement jusqu'à la courbe ; lis l'ordonnée du point atteint.
2. **Antécédents de** b : trace la droite d'équation $y = b$; lis les abscisses de **tous** ses points communs avec la courbe.
3. **Écris** les valeurs lues avec $\approx$, sauf si un calcul les confirme.

Exemple : trois lectures sur la courbe de c

- **Image de 2.** Le point de la courbe d'abscisse 2 a une ordonnée proche de $2{,}4$: $c(2) \approx 2{,}4$. Le calcul précise : $c(2) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.
- **Antécédent de 3.** La droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe en un seul point, d'abscisse 5. Le calcul confirme : $c(5) = \sqrt{9} = 3$.
- **Antécédent de -1.** La droite d'équation $y = -1$ ne coupe pas la courbe : -1 n'a aucun antécédent par c, car une racine carrée n'est jamais négative.

Remarque : calculatrice et logiciel de tracé

Une calculatrice affiche une **table de valeurs** : tu choisis le pas, elle calcule les images. Un logiciel de tracé dessine la courbe en quelques secondes.

Ces outils servent à **contrôler** ton tableau ou ta lecture. Ils ne remplacent pas le calcul exact : l'écran affiche $2{,}449\ldots$, et non $\sqrt{6}$.

Vérifie, puis à toi

Vérifie : Un point sur la courbe ?

Le point $A(12, 4)$ appartient-il à la courbe de $c : x \mapsto \sqrt{x+4}$?

A. Oui, car $12 \in D_c$ et $c(12) = 4$.
Juste.
Juste : c'est exactement la condition de la définition de la courbe.

B. Non, car 12 est en dehors du tracé.
Faux.
Le tracé ne montre qu'une partie de la courbe ; elle continue au-delà de 8.

C. Non, car $c(12) = \sqrt{12} + 4$.
Faux.
Le 4 est sous la racine : $c(12) = \sqrt{12+4}$.

D. Non, car son ordonnée devrait être 12.
Faux.
Le point d'abscisse x a pour ordonnée l'image $c(x)$, pas x.

Correction
D'après la définition de la courbe, $A(12, 4)$ est sur $\mathcal{C}_c$ si et seulement si $12 \in D_c$ et $4 = c(12)$.

Or $12 \geq -4$ et $c(12) = \sqrt{16} = 4$. Donc A appartient à $\mathcal{C}_c$.

En revanche, le point $(-5, 1)$ n'y est pas, car $-5 \notin D_c$.

À toi : Lire sur la courbe du réservoir

Reprends la courbe du réservoir, au début du chapitre ; on note $h(t)$ la hauteur à l'heure t. Lis $h(12)$, puis les heures où la hauteur vaut 2 m. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1
Applique la méthode de lecture : pour l'image, pars de l'abscisse 12.
Indice 2
Pour les antécédents, imagine la droite d'équation $y = 2$ et compte ses points communs avec la courbe.
Indice 3
Point délicat : n'oublie pas les extrémités de la courbe, à 0 h et à 24 h.

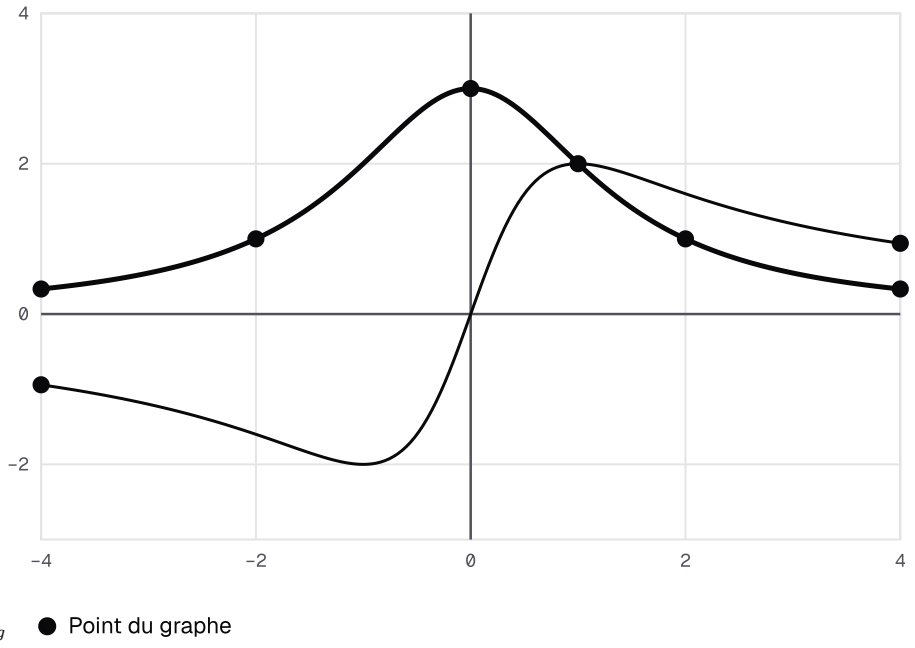
Réponse
Image de 12. Le point de la courbe d'abscisse 12 a une ordonnée proche de 3 : $h(12) \approx 3$ m.

Antécédents de 2. La droite d'équation $y = 2$ coupe la courbe en trois points, d'abscisses 0, environ 15 et 24.

Conclusion. $h(12) \approx 3$ m, et la hauteur vaut 2 m à 0 h, vers 15 h et à 24 h : le réel 2 a trois antécédents par h.

Fonctions paires, fonctions impaires

Deux courbes symétriques



Deux courbes et leurs symétries

Devine : Un point et son reflet

Le point $(1, 2)$ est sur la seconde courbe. Quel autre point y est aussi, par symétrie ?

A. Le point $(-1, 2)$.

Faux.

C'est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : il conviendrait pour la première courbe.

B. Le point $(1, -2)$.

Faux.

C'est le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; aucune des deux courbes n'a cette symétrie.

C. Le point $(2, 1)$.

Faux.

On a échangé abscisse et ordonnée : c'est une autre transformation.

D. Le point $(-1, -2)$.

Juste.

Juste : c'est le symétrique de $(1, 2)$ par rapport à l'origine.

Correction

La seconde courbe est symétrique par rapport à l'origine O. Le symétrique de $(1, 2)$ par rapport à O est $(-1, -2)$: ce point est aussi sur la courbe.

Par le calcul : $g(-1) = \dfrac{-4}{2} = -2$.

En clair. La première courbe est celle de $f : x \mapsto \dfrac{6}{x^2 + 2}$. Comme $(-x)^2 = x^2$, pour tout réel x :

$$f(-x) = \frac{6}{(-x)^2 + 2} = \frac{6}{x^2 + 2}.$$

Un réel et son opposé ont donc la même image par f.

La seconde courbe est celle de $g : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2 + 1}$. Cette fois, pour tout réel x :

$$g(-x) = \frac{-4x}{x^2 + 1}.$$

Les images de x et de $-x$ sont opposées. Ces deux situations portent un nom.

Définition : Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.

- f est **paire** lorsque, pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
- f est **impaire** lorsque, pour tout x de D_f : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

La condition « pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ » signifie que D_f est **symétrique par rapport à** 0.

Étudier une parité

Méthode : étudier la parité d'une fonction

1. **Vérifie** que D_f est symétrique par rapport à 0. Sinon, conclus : f n'est ni paire ni impaire.
2. **Calcule** $f(-x)$ pour un réel x quelconque de D_f, et simplifie.
3. **Compare** $f(-x)$ à $f(x)$, puis à $-f(x)$, et conclus.
4. **Contre-exemple** : pour prouver que f n'est pas paire, un seul réel a tel que $f(-a) \neq f(a)$ suffit.

Exemple : une fonction paire

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{|x|}$.

Ensemble. Le dénominateur s'annule seulement en 0 : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $x \neq 0$, alors $-x \neq 0$: D_f est symétrique par rapport à 0.

Calcul. Soit $x \in D_f$. Comme $(-x)^2 = x^2$ et $|-x| = |x|$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2+1}{|-x|} \\ &= \frac{x^2+1}{|x|} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition, f est paire. Par exemple, $f(-2) = f(2) = \dfrac{5}{2}$.

Exemple : une fonction impaire

Soit $g : x \mapsto x^3 - \dfrac{2}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ensemble symétrique par rapport à 0.

Soit x un réel non nul. On calcule :

$$\begin{aligned} g(-x) &= (-x)^3 - \frac{2}{-x} \\ &= -x^3 + \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Or $-g(x) = -x^3 + \dfrac{2}{x}$. Donc $g(-x) = -g(x)$: d'après la définition, g est impaire.

Contrôle : $g(1) = -1$ et $g(-1) = 1$.

Attention : l'ensemble de définition d'abord

✗ « La fonction $x \mapsto |x|$, définie sur $[-4;1]$, est paire. »

✓ Le réel -4 est dans l'ensemble, mais pas 4 : l'ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0. Cette fonction n'est donc ni paire ni impaire.

De même, « pas paire » ne veut pas dire « impaire ». Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$ n'est ni l'une ni l'autre : l'image de 1 vaut 2, celle de -1 vaut 0.

La parité se voit sur la courbe

Rappel du collège : dans un repère orthogonal, le symétrique de $M(x,y)$ par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x,y)$. Son symétrique par rapport à l'origine O est $M''(-x,-y)$.

Pourquoi est-ce vrai ? Une fonction paire donne à $-x$ la même image qu'à x : M et M' sont donc ensemble sur sa courbe. Pour une fonction impaire, ce sont M et M''.

Propriété : Interprétation graphique de la parité

Le plan est rapporté à un repère **orthogonal** $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0.

- f est paire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Démonstration

Étape 1. Rappel du collège : dans un repère orthogonal, le symétrique du point $M(x,y)$ par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x,y)$; dans un repère, son symétrique par rapport à O est $M''(-x,-y)$.

Étape 2. Supposons f paire. Soit $M(x,y)$ un point de $\mathcal{C}_f$: $x \in D_f$ et $y = f(x)$. Par parité, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x) = y$, donc $M'(-x,y)$ est sur $\mathcal{C}_f$.

Étape 3. Réciproquement, supposons $\mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Soit $x \in D_f$: le point $M(x,f(x))$ est sur $\mathcal{C}_f$, donc $M'(-x,f(x))$ aussi. D'après la définition de la courbe, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$: f est paire.

Étape 4. Pour une fonction impaire, on reprend les étapes 2 et 3 avec $M''(-x,-y)$ et l'égalité $f(-x) = -f(x)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Toute la preuve repose sur une traduction : « $M(x,y)$ est sur $\mathcal{C}_f$ » s'écrit « $x \in D_f$ et $y = f(x)$ ».

La parité dit que le point d'abscisse $-x$ a la même ordonnée, ou l'ordonnée opposée. L'égalité $f(-x) = f(x)$ se lit donc comme une symétrie de la courbe, et réciproquement.

Vérifie : Le rôle du repère

Dans la preuve, pourquoi faut-il un repère **orthogonal** ?

A. Pour que $M'(-x, y)$ soit le reflet de M par rapport à l'axe des ordonnées.
Juste.
Juste : sans angle droit, ce point n'est pas le reflet de M par rapport à cet axe.

B. Pour que l'origine O soit le milieu du segment $[MM'']$.
Faux.
O est le milieu de $[MM'']$ dans tout repère : l'angle droit n'y sert pas.

C. Pour que la fonction f soit paire ou impaire.
Faux.
La parité est une propriété de f ; elle ne dépend pas du repère.

D. Pour que D_f soit symétrique par rapport à 0.
Faux.
C'est une hypothèse sur D_f, posée dans l'énoncé : le repère n'y joue aucun rôle.

Correction
Le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à l'axe des ordonnées est $M'(-x, y)$ seulement si les axes sont perpendiculaires.

La symétrie par rapport à O, elle, s'écrit $M''(-x, -y)$ dans tout repère. C'est pourquoi l'énoncé demande un repère orthogonal.

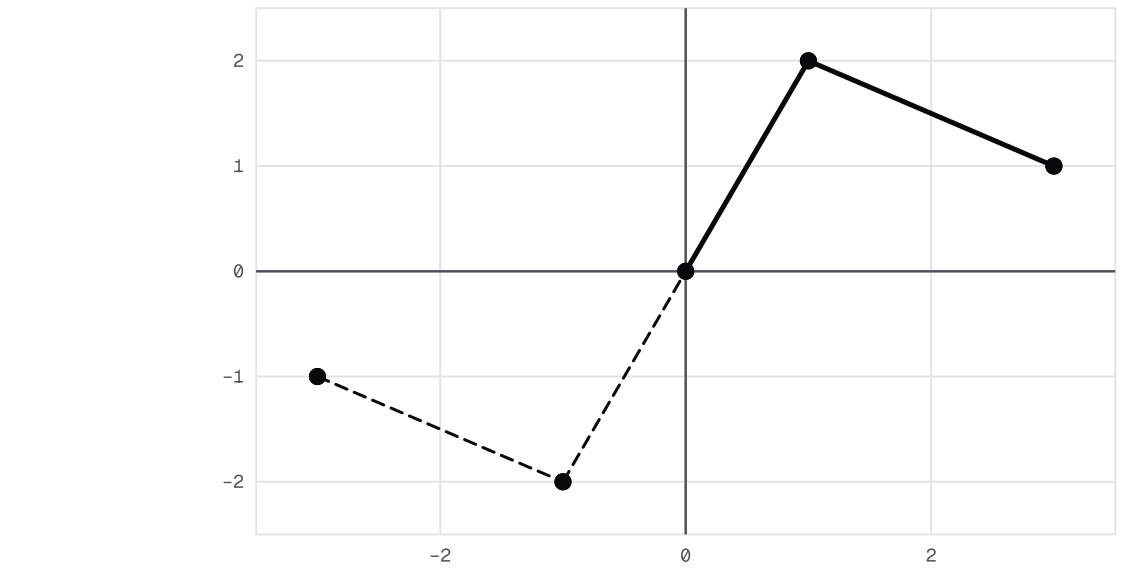
Compléter une courbe, puis à toi

Exemple : compléter une courbe par symétrie

Une fonction impaire f est définie sur $[-3; 3]$, dans un repère orthogonal. Sa courbe est connue sur $[0; 3]$: elle monte en ligne droite de $(0, 0)$ à $(1, 2)$, puis descend jusqu'à $(3, 1)$.

D'après l'interprétation graphique de la parité, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à O. On trace donc le symétrique de chaque point : $(1, 2)$ donne $(-1, -2)$, et $(3, 1)$ donne $(-3, -1)$. Le tracé montre en pointillés la partie obtenue.

Ici, la symétrie par rapport à O ne demande pas d'angle droit. Pour une fonction paire, l'angle droit est nécessaire : dans un repère non orthogonal, les points $(-1, 1)$ et $(1, 1)$ de la courbe de $x \mapsto |x|$ ne sont plus symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



Courbe d'une fonction impaire, complétée par symétrie

À toi : Deux parités à étudier

Étudie la parité de $u : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-4}$, puis celle de $w : x \mapsto \sqrt{x+2}$. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1

Commence par l'ensemble de définition de chaque fonction, avant tout calcul.

Indice 2

Pour u, le dénominateur s'annule en -2 et en 2 ; calcule ensuite $u(-x)$.

Indice 3

Point délicat : pour w, cherche un réel de D_w dont l'opposé n'est pas dans D_w.

Réponse

Fonction u. On factorise : $x^2-4=(x-2)(x+2)$, qui s'annule en 2 et en -2. Donc $D_u=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$, symétrique par rapport à 0.

Soit $x \in D_u$. Comme $(-x)^2=x^2$:

$$\begin{aligned} u(-x) &= \frac{-x}{(-x)^2-4} \\ &= \frac{-x}{x^2-4} \\ &= -u(x). \end{aligned}$$

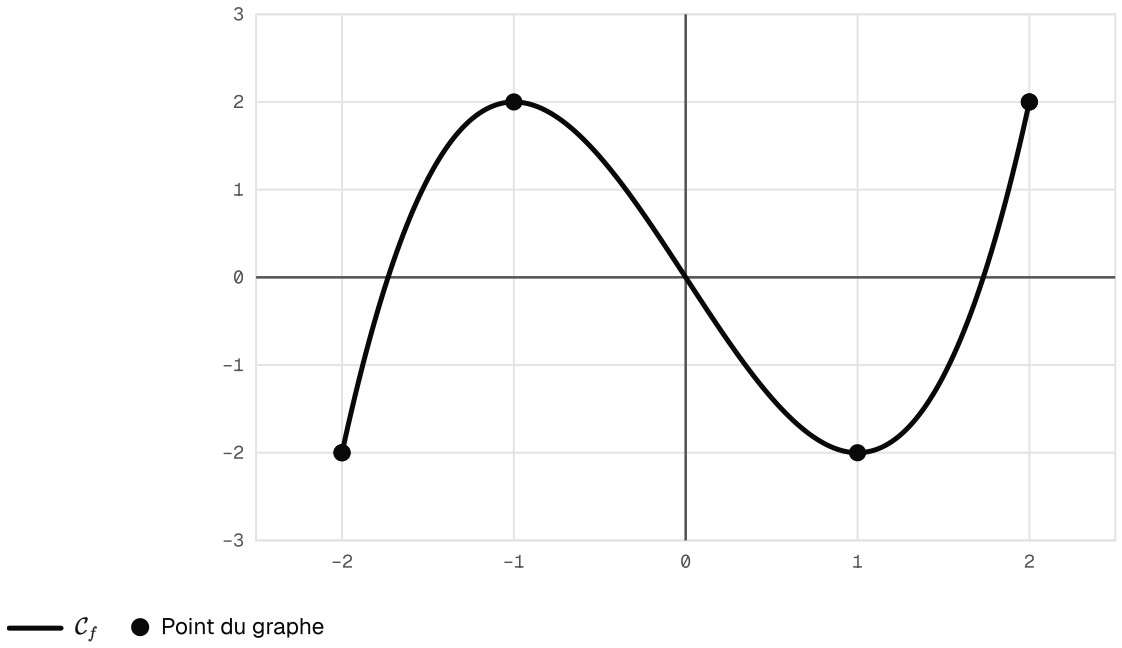
D'après la définition, u est impaire.

Fonction w. Le nombre sous la racine doit être positif ou nul : $x+2 \geq 0$, donc $D_w=[-2;+\infty[$. Le réel 3 est dans D_w, mais pas -3 : l'ensemble n'est pas symétrique par rapport à 0.

Conclusion. u est impaire ; w n'est ni paire ni impaire.

Sens de variation, tableau de variations

Une courbe qui monte, puis descend



Courbe d'une fonction f sur l'intervalle de −2 à 2

Devine : Où la courbe descend-elle ?

Sur quel intervalle cette courbe descend-elle, quand on la parcourt de gauche à droite ?

A. Sur l'intervalle $[-2;-1]$.

Faux.

Sur cet intervalle, la courbe monte, de -2 à 2.

B. Sur l'intervalle $[-1;2]$.

Faux.

Sur $[1;2]$, la courbe remonte : elle ne descend pas sur tout $[-1;2]$.

C. Sur l'intervalle $[-1;1]$.

Juste.

Juste : de $(-1,2)$ à $(1,-2)$, la courbe descend.

D. Sur tout l'intervalle $[-2;2]$.

Faux.

La courbe monte au début et à la fin : elle ne descend pas partout.

Correction

> On parcourt la courbe de gauche à droite. Elle monte de $(-2,-2)$ à $(-1,2)$, descend de $(-1,2)$ à $(1,-2)$, puis remonte jusqu'à $(2,2)$.
>
> Elle descend donc sur $[-1;1]$: quand x augmente dans cet intervalle, $f(x)$ diminue.

En clair. « La courbe monte » se dit avec des nombres : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Sur $[-1;1]$, la courbe descend : $f(-1) = 2$ est plus grand que $f(0) = 0$, lui-même plus grand que $f(1) = -2$. L'ordre des images y est l'inverse de l'ordre des abscisses.

Définition : Sens de variation sur un intervalle

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

- f est **croissante** sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est **strictement croissante** sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
- f est **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur I lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivement $f(x_1) > f(x_2)$).
- f est **constante** sur I lorsque $f(x_1) = f(x_2)$ pour tous x_1 et x_2 de I.

Une fonction croissante sur I, ou décroissante sur I, est dite **monotone** sur I.

Le tableau de variations

Méthode : dresser un tableau de variations à partir d'une courbe

1. **Parcours** la courbe de gauche à droite et repère les abscisses où elle change de sens.
2. **Écris** sur la ligne de x ces abscisses et les bornes de l'intervalle d'étude.
3. **Place** une flèche $\nearrow$ là où la fonction est croissante, une flèche $\searrow$ là où elle est décroissante.
4. **Écris** les images aux extrémités de chaque flèche.

Exemple : le tableau de variations lu sur la courbe

Pour la fonction f tracée ci-dessus, sur $[-2;2]$:

x	-2		-1		1		2
variations de f	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

On lit : f est croissante sur $[-2;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$ et croissante sur $[1;2]$.

Les points où la courbe change de sens sont marqués, à coordonnées entières.

Attention : un sens de variation se lit sur un intervalle

✗ « f est croissante, car $f(-2) = -2$ et $f(2) = 2$. »

✓ Deux images bien choisies ne prouvent aucun sens de variation : ici, f descend sur $[-1;1]$.

Donne toujours l'intervalle : « f est croissante sur $[-2;-1]$ et sur $[1;2]$, décroissante sur $[-1;1]$ ». N'écris jamais « croissante » tout court quand la courbe change de sens.

Prouver un sens de variation par le calcul

Une lecture ne prouve rien : un tracé n'est jamais parfait. Pour comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on étudie le signe de leur différence, comme dans le chapitre sur l'ordre. On la divise par $x_1 - x_2$: c'est le **taux de variation**.

Pourquoi est-ce vrai ? Le signe d'un quotient se lit avec la règle des signes, et, en rangeant $x_1 < x_2$, on connaît le signe de $x_1 - x_2$.

Propriété : Taux de variation et sens de variation

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans D_f. Pour deux réels **distincts** x_1 et x_2 de I, le **taux de variation** de f entre x_1 et x_2 est le réel

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

- f est croissante sur I si et seulement si $T \geq 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.
- f est décroissante sur I si et seulement si $T \leq 0$ pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.

De même, f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si $T > 0$ (respectivement $T < 0$) pour tous réels distincts x_1 et x_2 de I.

Démonstration

Étape 1. Échanger x_1 et x_2 ne change pas T : cela multiplie le numérateur et le dénominateur par -1. Soit donc x_1 et x_2 deux réels distincts de I, nommés de sorte que $x_1 < x_2$: alors $x_1 - x_2 < 0$.

Étape 2. Le dénominateur étant strictement négatif, la règle des signes donne : $T \geq 0$ équivaut à $f(x_1) - f(x_2) \leq 0$, c'est-à-dire à $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Étape 3. Ainsi, « $T \geq 0$ pour tous réels distincts de I » équivaut à « pour tous $x_1 < x_2$ de I, $f(x_1) \leq f(x_2)$ » : c'est la définition de « f croissante sur I ».

Étape 4. Les trois autres cas se démontrent de la même façon : $T \leq 0$, $T > 0$ et $T < 0$ équivalent respectivement à $f(x_1) \geq f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$ et $f(x_1) > f(x_2)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée de la preuve : on range x_1 et x_2 pour que $x_1 < x_2$. Le dénominateur $x_1 - x_2$ est alors **strictement négatif**.

Par la règle des signes, T et $f(x_1) - f(x_2)$ sont de signes contraires. Ainsi, $T \geq 0$ revient à $f(x_1) \leq f(x_2)$: c'est exactement la définition de « f croissante ».

Vérifie : Un signe connu

Dans la preuve, pourquoi le signe du dénominateur $x_1 - x_2$ est-il connu ?

A. Parce qu'on a nommé les réels de sorte que $x_1 < x_2$.
Juste.
Juste : échanger x_1 et x_2 ne change pas T, on peut donc les ranger.

B. Parce que x_1 et x_2 sont des réels positifs.
Faux.
Rien n'oblige x_1 et x_2 à être positifs : c'est leur ordre qui compte.

C. Parce que la fonction f est croissante sur I.
Faux.
Le signe de $x_1 - x_2$ ne dépend pas de f.

D. Parce que les réels x_1 et x_2 sont distincts.
Faux.
Distincts, ils donnent $x_1 - x_2 \neq 0$, mais pas son signe.

Correction
La preuve commence par remarquer qu'échanger x_1 et x_2 ne change pas T. On peut donc les nommer de sorte que $x_1 < x_2$.

Alors $x_1 - x_2 < 0$, et la règle des signes relie le signe de T à celui de $f(x_1) - f(x_2)$.

Exemple : le cas d'une fonction affine

Rappel du collège : la fonction affine $x \mapsto ax + b$ est croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$. Le taux de variation le prouve. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts :

$$\begin{aligned} T &= \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= a. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $x \mapsto -2x + 5$, on trouve $T = -2 < 0$. D'après la propriété du taux de variation, cette fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

La propriété demande le signe de T pour **tous** les couples de l'intervalle : pour $x \mapsto |x|$ sur $[-1; 2]$, T vaut 1 entre 0 et 1, mais -1 entre -1 et 0. Cette fonction n'est donc pas croissante sur $[-1; 2]$.

La méthode, puis à toi

Méthode : étudier un sens de variation par le taux de variation

1. **Prends** deux réels distincts x_1 et x_2 de l'intervalle I.
2. **Calcule** $f(x_1) - f(x_2)$, **factorise**-le par $x_1 - x_2$, puis simplifie T.
3. **Étudie** le signe de T lorsque x_1 et x_2 sont dans I.
4. **Conclus** en citant la propriété du taux de variation.

Exemple : la fonction racine carrée

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, et x_1, x_2 deux réels distincts de cet intervalle.

Factorisation. Comme $(\sqrt{a})^2 = a$ pour tout réel $a \geq 0$, on a $x_1 = (\sqrt{x_1})^2$ et $x_2 = (\sqrt{x_2})^2$. Une identité remarquable donne alors :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 = &(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) \\ &\times (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}). \end{aligned}$$

Signe. La somme $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ est strictement positive, car $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$ sont positifs ou nuls, et l'un des deux au moins est non nul. On peut donc simplifier :

$$T = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

Donc $T > 0$.

Conclusion. D'après la propriété du taux de variation, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

À toi : Le taux de variation d'un cube

Soit $f : x \mapsto x^3$, définie sur $\mathbb{R}$. Montre que, pour $x_1 \neq x_2$, son taux de variation vaut $T = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. Déduis-en que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1
Développe $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$: tu dois retrouver $x_1^3 - x_2^3$.
Indice 2
Simplifie ensuite le quotient par $x_1 - x_2$, qui n'est pas nul.
Indice 3
Point délicat : sur $[0; +\infty[$, chaque terme de T est positif ou nul, et $x_1^2 + x_2^2$ n'est pas nul.

Réponse
Taux de variation. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts. En développant :

$$\begin{aligned}&(x_1 - x_2)\\&\quad \times (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\\&= x_1^3 - x_2^3.\end{aligned}$$

Comme $x_1 - x_2 \neq 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned}T &= \frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2}\\&= x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.\end{aligned}$$

Signe sur $[0; +\infty[$**.** Si x_1 et x_2 sont dans $[0; +\infty[$, les trois termes sont positifs ou nuls. De plus, $x_1^2 + x_2^2 > 0$, car x_1 et x_2 ne sont pas nuls tous les deux. Donc $T > 0$.

Conclusion. D'après la propriété du taux de variation, f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Parité et sens de variation

Le reflet d'une montée

En clair. Reprends la fonction impaire complétée par symétrie, dans la section sur la parité. Sur $[0; 1]$, elle monte de 0 à 2.

Sur $[-1; 0]$, la partie symétrique monte aussi, de -2 à 0 : la symétrie par rapport à O conserve le sens de variation.

Qu'en est-il de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ?

Devine : Le sens sur l'autre moitié

Une fonction **paire** est croissante sur $[0; 4]$. Que peut-on dire de son sens de variation sur $[-4; 0]$?

A. Elle est aussi croissante sur $[-4; 0]$.
Faux.
Ce serait le cas d'une fonction impaire ; le reflet par l'axe des ordonnées renverse le sens.

B. Elle est décroissante sur $[-4;0]$.

Juste.

Juste : le reflet d'une montée, par rapport à l'axe des ordonnées, est une descente.

C. Elle est constante sur $[-4;0]$.

Faux.

Rien ne l'impose : une fonction paire n'est pas constante en général.

D. On ne peut rien dire sans son expression.

Faux.

La parité suffit : elle relie l'image de x à celle de $-x$.

Correction

Le reflet par rapport à l'axe des ordonnées échange la gauche et la droite. Parcourue de gauche à droite, la partie gauche de la courbe redescend donc ce que la partie droite a monté.

La fonction est décroissante sur $[-4;0]$; l'énoncé qui suit le justifie.

Pourquoi est-ce vrai ? Prendre l'opposé renverse l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $-x_2 < -x_1$.

La parité relie ensuite les images de x_1 et de x_2 à celles de leurs opposés. Pour une fonction paire, ces images ne changent pas : par rapport à l'axe des ordonnées, le reflet d'une montée est une descente.

La propriété et sa preuve

Propriété : Parité et sens de variation

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, I un intervalle inclus dans D_f et formé de réels positifs ou nuls, sur lequel f est **monotone**, et J l'intervalle formé des opposés des éléments de I.

- Si f est **paire**, f est monotone sur J, de sens **contraire** à son sens sur I.
- Si f est **impaire**, f est monotone sur J, de **même** sens que sur I.

Si f est strictement monotone sur I, elle l'est aussi sur J.

Démonstration

Étape 1. Soit x_1 et x_2 deux réels de J tels que $x_1 < x_2$. Leurs opposés $-x_1$ et $-x_2$ sont dans I. Multiplier les deux membres d'une inégalité par -1 change son sens (ordre et multiplication) : $-x_2 < -x_1$.

Étape 2. Supposons f paire et croissante sur I. Comme $-x_2 < -x_1$ dans I, on a $f(-x_2) \leq f(-x_1)$. Par parité, cela s'écrit $f(x_2) \leq f(x_1)$: f est décroissante sur J.

Étape 3. Supposons f impaire et croissante sur I. De même, $f(-x_2) \leq f(-x_1)$, c'est-à-dire $-f(x_2) \leq -f(x_1)$. En multipliant par -1 : $f(x_1) \leq f(x_2)$. Donc f est croissante sur J.

Étape 4. Si f est décroissante sur I, ou strictement monotone, on reprend les étapes 2 et 3 en renversant les inégalités, ou en les rendant strictes.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve compte les inégalités qui changent de sens. Le passage aux opposés en retourne une : si $x_1 < x_2$, alors $-x_2 < -x_1$.

- Pour une fonction **paire**, les images restent les mêmes : un seul retournement, donc le sens de variation s'inverse.
- Pour une fonction **impaire**, les images changent aussi de signe : un second retournement compense le premier, et le sens se conserve.

Vérifie : La dernière étape du cas impair

Dans le cas impair de la preuve, quelle opération transforme $-f(x_2) \leq -f(x_1)$ en $f(x_1) \leq f(x_2)$?

A. Appliquer une seconde fois la parité de f.
Faux.
La parité a déjà servi : elle a remplacé $f(-x_2)$ par $-f(x_2)$.

B. Élever les deux membres au carré.
Faux.
Élever au carré ne conserve pas l'ordre des nombres négatifs.

C. Multiplier les deux membres par -1.
Juste.
Juste : multiplier par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

D. Diviser les deux membres par $x_1 - x_2$.
Faux.
Le taux de variation ne sert pas dans cette preuve.

Correction
On multiplie les deux membres par -1 : d'après l'ordre et la multiplication, le sens de l'inégalité change. On obtient $f(x_2) \geq f(x_1)$, c'est-à-dire $f(x_1) \leq f(x_2)$.

La fonction garde donc son sens de variation sur J.

Compléter un tableau, puis à toi

Exemple : compléter un tableau de variations

La fonction impaire de la section sur la parité est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; 3]$.

D'après la propriété « parité et sens de variation », elle est croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $[-3;-1]$. Par imparité, $f(-1)=-2$ et $f(-3)=-1$; de plus, $f(0)=0$:

x	-3		-1		0		1		3
variations de f	-1	↘	-2	↗	0	↗	2	↘	1

Sans parité, la propriété ne dit rien : $x \mapsto x+1$, qui n'est pas paire, est croissante sur $[0;2]$ et aussi sur $[-2;0]$; son sens ne s'inverse pas.

À toi : Le cube sur toute la droite

Tu viens de montrer, dans la question « À toi » de la section précédente, que $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Déduis-en son sens de variation sur $]-\infty;0]$, puis dresse son tableau de variations sur $[-2;2]$. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1
Commence par la parité de $x \mapsto x^3$: calcule $(-x)^3$.
Indice 2
La fonction est impaire : applique la propriété « parité et sens de variation ».
Indice 3
Point délicat : calcule les images aux bornes, $(-2)^3=-8$ et $2^3=8$, sans oublier l'image de 0.

Réponse
Parité. Pour tout réel x, $(-x)^3=-x^3$, et $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : la fonction est impaire.

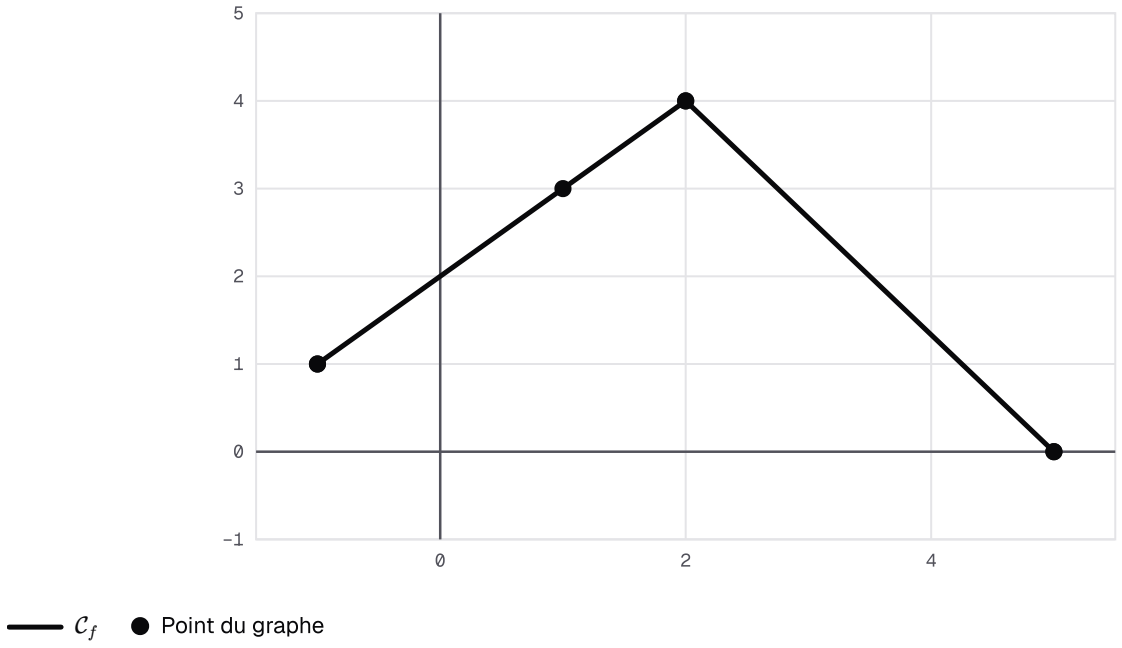
Sens de variation. D'après la propriété « parité et sens de variation », elle est strictement croissante sur $]-\infty;0]$, comme sur $[0;+\infty[$.

Tableau sur $[-2;2]$. Les images aux bornes sont $(-2)^3=-8$ et $2^3=8$, et l'image de 0 est 0 :

x	-2		0		2
variations	-8	↗	0	↗	8

Maximum et minimum sur un intervalle

Le point le plus haut d'une courbe



Courbe d'une fonction f sur l'intervalle de −1 à 5

Devine : La plus grande valeur

Quelle est la plus grande valeur prise par f sur $[-1;5]$, et en quel réel ?

A. La valeur 2, prise en $x = 4$.

Faux.

Tu as échangé abscisse et ordonnée : le point le plus haut est $(2, 4)$.

B. La valeur 5, prise en $x = 5$.

Faux.

5 est la borne de l'intervalle ; l'image de 5 vaut 0.

C. La valeur 1, prise en $x = -1$.

Faux.

Le point $(-1, 1)$ est le début de la courbe, qui monte ensuite.

D. La valeur 4, prise en $x = 2$.

Juste.

Juste : le point le plus haut de la courbe est $(2, 4)$.

Correction

Le point le plus haut de la courbe est $(2, 4)$. D'après le tracé, $f(x) \leq 4$ pour tout x de $[-1;5]$, et $f(2) = 4$.

La plus grande valeur est 4, atteinte en 2. De même, la hauteur du réservoir du début est au plus haut à 6 h.

Définition : Maximum, minimum sur un intervalle

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans D_f et a un réel de I.

- $f(a)$ est le **maximum** de f sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$.
- $f(a)$ est le **minimum** de f sur I lorsque, pour tout x de I, $f(x) \geq f(a)$.

Un maximum ou un minimum s'appelle un **extremum**. On dit qu'il est **atteint** en a.

Exemple : maximum et minimum lus sur la courbe

Sur la courbe ci-dessus, le point le plus bas est $(5, 0)$. Ainsi, sur $[-1; 5]$:

- le maximum de f est 4, atteint en 2 ;
- le minimum de f est 0, atteint en 5.

Sur un intervalle plus petit, la réponse change : sur $[-1; 1]$, la courbe ne fait que monter, et le maximum est $f(1) = 3$.

Attention : un maximum est une valeur atteinte

✗ « Pour tout x de $[0; 2[$, $3x < 6$: le maximum de $x \mapsto 3x$ sur $[0; 2[$ est 6. »

✓ Aucun réel de $[0; 2[$ n'a pour image 6 : il faudrait $x = 2$, qui est exclu. Un maximum $f(a)$ demande un réel a **dans** l'intervalle.

Sur $[0; 2[$, cette fonction n'a pas de maximum. Sur $[0; 2]$, son maximum est 6, atteint en 2.

Monter, puis descendre

Sur la courbe, le maximum se trouve là où f cesse de croître et commence à décroître.

Pourquoi est-ce vrai ? À gauche de ce point, la croissance donne des images plus petites ; à droite, la décroissance aussi. On examine donc deux cas, selon la position de x.

Propriété : Extremum et changement de sens de variation

Soit a, b et c trois réels tels que $a < b < c$, et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; c]$.

- Si f est croissante sur $[a; b]$ et décroissante sur $[b; c]$, alors $f(b)$ est le maximum de f sur $[a; c]$.
- Si f est décroissante sur $[a; b]$ et croissante sur $[b; c]$, alors $f(b)$ est le minimum de f sur $[a; c]$.

Démonstration

Étape 1. Plaçons-nous dans le premier cas et soit x un réel de $[a;c]$. Deux cas se présentent : $x \leq b$ ou $x > b$.

Étape 2. Si $x \leq b$, alors x et b sont dans $[a;b]$. Pour $x = b$, $f(x) = f(b)$. Pour $x < b$, comme f est croissante sur $[a;b]$, $f(x) \leq f(b)$.

Étape 3. Si $x > b$, alors b et x sont dans $[b;c]$, avec $b < x$. Comme f est décroissante sur $[b;c]$, $f(b) \geq f(x)$.

Étape 4. Dans les deux cas, $f(x) \leq f(b)$, et b appartient à $[a;c]$. D'après la définition du maximum, $f(b)$ est le maximum de f sur $[a;c]$. Le second point se démontre de la même façon, en renversant les inégalités.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve sépare **deux cas** : $x \leq b$ et $x > b$. Dans chaque cas, x et b sont dans un même intervalle, où le sens de variation est connu.

On compare alors $f(x)$ et $f(b)$, puis on réunit les deux cas : $f(x) \leq f(b)$ pour tout x de $[a;c]$.

Vérifie : Le second cas

Dans le cas $x > b$ de la preuve, quelle information donne $f(x) \leq f(b)$?

A. f est croissante sur $[a;b]$, et $x > b$.
Faux.
Le réel x n'est pas dans $[a;b]$: ce sens de variation ne s'applique pas à lui.

B. f est décroissante sur $[b;c]$, et $b < x$.
Juste.
Juste : b et x sont dans $[b;c]$, où f décroît.

C. $f(b)$ est le maximum de f sur $[a;c]$.
Faux.
C'est la conclusion à démontrer : on ne peut pas s'en servir.

D. $f(x) = f(b)$ pour tout x de $[b;c]$.
Faux.
Rien ne dit que f est constante sur $[b;c]$.

Correction
Si $x > b$, les réels b et x sont dans $[b;c]$, avec $b < x$. Comme f est décroissante sur $[b;c]$, la définition donne $f(b) \geq f(x)$.

Se servir de la conclusion elle-même serait un raisonnement circulaire.

Exemple : des extremums lus sur un tableau de variations

Une fonction g définie sur $[-3;4]$ a ce tableau de variations :

x	-3		1		4
variations de g	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	6

Minimum. g décroît, puis croît : par la propriété sur l'extremum et le changement de sens, -5 est le minimum de g sur $[-3;4]$, atteint en 1.

Maximum.

- Sur $[-3;1]$, g décroît, donc $g(x) \leq g(-3) = 2$.
- Sur $[1;4]$, g croît, donc $g(x) \leq g(4) = 6$.

Comme $2 < 6$, $g(x) \leq 6$ sur $[-3;4]$, et $g(4) = 6$: c'est 6, atteint en 4.

Le réel où le sens change doit appartenir aux **deux** intervalles. La fonction p égale à x sur $[0;1[$, à 0 en 1 et à $2-x$ sur $]1;2]$ monte puis descend. Pourtant, $p(1) = 0$ n'est pas son maximum, car $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Établir un extremum par le calcul

Méthode : déterminer un maximum ou un minimum

1. **Lis** la courbe ou le tableau de variations : repère où f passe de croissante à décroissante, ou l'inverse.
2. **Conjecture** la valeur $f(a)$ de l'extremum et le réel a où il est atteint.
3. **Prouve-le** par le calcul : pour un maximum, montre que $f(x) - f(a) \leq 0$ pour tout x de I, par exemple avec l'opposé d'un carré.
4. **Conclus** en donnant l'intervalle, la valeur et le réel a.

Exemple : un minimum établi avec un carré

Soit $k : x \mapsto (x-3)^2 + 2$, définie sur $\mathbb{R}$. On conjecture le minimum $k(3) = 2$.

Pour tout réel x :

$$k(x) - 2 = (x-3)^2.$$

Un carré est positif ou nul, donc $k(x) - 2 \geq 0$, soit $k(x) \geq k(3)$.

D'après la définition, 2 est le minimum de k sur $\mathbb{R}$, atteint en 3.

Exemple : l'enclos le plus grand

Un éleveur dispose de 24 m de grillage pour un enclos rectangulaire. Si un côté mesure x m, l'autre mesure $12 - x$ m, avec $0 < x < 12$. L'aire, en m², vaut $A(x) = x(12 - x)$.

Inégalité. Pour tout x de $]0;12[$, on développe, puis on reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned} 36 - A(x) &= 36 - 12x + x^2 \\ &= (x-6)^2. \end{aligned}$$

Un carré est positif ou nul, donc $A(x) \leq 36$ pour tout x de $]0;12[$.

Valeur atteinte. $A(6) = 6 \times 6 = 36$.

Conclusion. Le maximum de A sur $]0;12[$ est 36, atteint en 6 : l'enclos le plus grand est un carré de 6 m de côté.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un maximum à établir

Soit $m : x \mapsto 7 - (x+1)^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Montre que 7 est le maximum de m sur $\mathbb{R}$, et précise où il est atteint. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1
Applique la méthode : calcule la différence $m(x) - 7$.
Indice 2
Tu dois obtenir l'opposé d'un carré.
Indice 3
Point délicat : un maximum doit être atteint ; cherche le réel a tel que $m(a) = 7$.

Réponse
Inégalité. Pour tout réel x :

$$m(x) - 7 = -(x+1)^2.$$

Un carré est positif ou nul, donc son opposé est négatif ou nul : $m(x) - 7 \leq 0$, soit $m(x) \leq 7$.

Valeur atteinte. $m(-1) = 7 - 0 = 7$.

Conclusion. D'après la définition, 7 est le maximum de m sur $\mathbb{R}$, atteint en -1.

Remarque : Coin devoir : rédiger un maximum

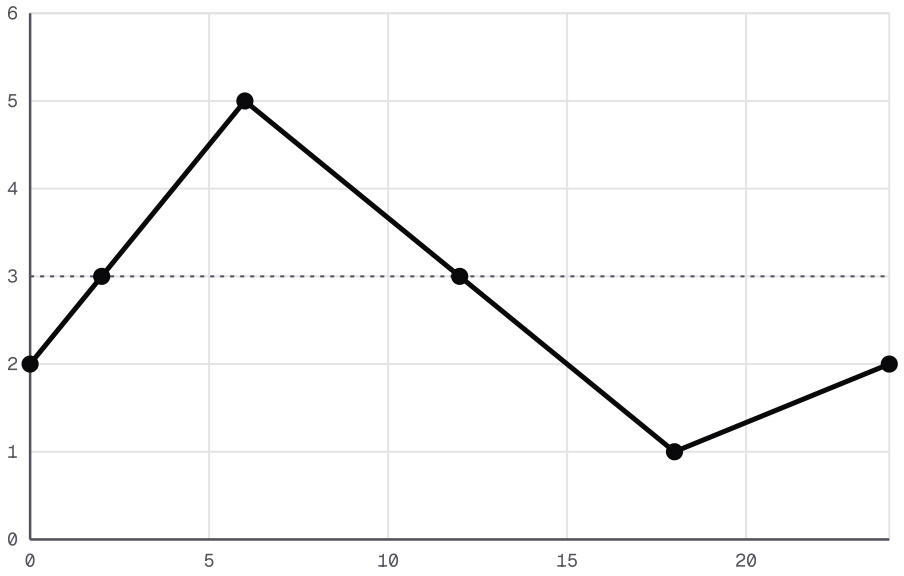
En devoir, un maximum se rédige en trois temps : l'inégalité, la valeur atteinte, la conclusion. Pour l'enclos, écris :

« Pour tout x de $]0;12[$, $36 - A(x) = (x-6)^2 \geq 0$, donc $A(x) \leq 36$. De plus, $A(6) = 36$. Donc le maximum de A sur $]0;12[$ est 36, atteint en 6. »

Une lecture sur la courbe ne suffit pas : elle donne une conjecture, que le calcul confirme.

Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Quand la hauteur vaut-elle 3 m ?



Hauteur d'eau dans le réservoir et droite d'équation y = 3

Devine : Combien de fois ?

On reprend la courbe du réservoir, avec la droite d'équation $y = 3$. Combien de fois, dans la journée, la hauteur vaut-elle 3 m ?

A. Une fois, vers 2 h du matin.

Faux.

La courbe redescend ensuite et recoupe la droite.

B. Deux fois : à 2 h et à 12 h.

Juste.

Juste : la droite coupe la courbe en deux points.

C. Trois fois, car la courbe remonte le soir.

Faux.

Le soir, la hauteur ne dépasse pas 2 m : elle n'atteint plus 3 m.

D. Jamais, car 3 n'est pas une valeur marquée.

Faux.

Une valeur peut être prise sans être marquée : lis les points communs.

Correction
La droite d'équation $y = 3$ coupe la courbe en deux points marqués, $(2, 3)$ et $(12, 3)$. La hauteur vaut 3 m à 2 h et à 12 h.

Le soir, la courbe reste au-dessous de 2 m : il n'y a aucun autre point commun.

Cette lecture est générale : une équation se résout en lisant des points communs.

Pourquoi est-ce vrai ? Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x a pour ordonnée $f(x)$. Il est sur la droite d'équation $y = k$ exactement quand $f(x) = k$.

La propriété et sa preuve

Propriété : Résolution graphique d'une équation, d'une inéquation

Le plan est rapporté à un repère dont l'axe des ordonnées est orienté vers le haut. Soit f et g deux fonctions, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et k un réel.

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les réels x de $D_f \cap D_g$ pour lesquels le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x est **strictement au-dessus** du point de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse ; celles de $f(x) \geq g(x)$ sont les solutions de $f(x) > g(x)$ et celles de $f(x) = g(x)$. On résout de même $f(x) < g(x)$ et $f(x) \leq g(x)$ avec les points situés au-dessous.
- Avec la droite d'équation $y = k$ à la place de $\mathcal{C}_g$, on résout de même $f(x) = k$, $f(x) > k$ et les autres inéquations.

Démonstration

Étape 1. Soit x un réel de $D_f \cap D_g$. D'après la définition de la courbe, les points $M(x, f(x))$ et $N(x, g(x))$ sont sur $\mathcal{C}_f$ et sur $\mathcal{C}_g$. Ils ont la même abscisse : ils sont confondus si et seulement si $f(x) = g(x)$.

Étape 2. Réciproquement, un point commun aux deux courbes a une abscisse x dans $D_f \cap D_g$, et son ordonnée vaut à la fois $f(x)$ et $g(x)$: donc $f(x) = g(x)$.

Étape 3. Toujours pour x dans $D_f \cap D_g$, $f(x) > g(x)$ signifie que l'ordonnée de M est strictement supérieure à celle de N : M est strictement au-dessus de N. Les cas $\geq$, $<$ et $\leq$ s'en déduisent.

Étape 4. La droite d'équation $y = k$ est la courbe de la fonction $x \mapsto k$, définie sur $\mathbb{R}$: les cas $f(x) = k$ et $f(x) > k$ sont des cas particuliers.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée de la preuve : deux points de **même abscisse** x, l'un sur $\mathcal{C}_f$, l'autre sur $\mathcal{C}_g$, ont pour ordonnées $f(x)$ et $g(x)$. Comparer ces deux nombres revient à comparer les hauteurs des deux points.

S'ils sont égaux, les points sont confondus ; si $f(x) > g(x)$, le premier est au-dessus. La droite d'équation $y = k$ est la courbe d'une fonction constante.

Vérifie : Deux points bien choisis

Dans la preuve, pourquoi compare-t-on les points $M(x, f(x))$ et $N(x, g(x))$?

A. Parce qu'ils ont toujours la même ordonnée.

Faux.

Ils ont la même abscisse ; leurs ordonnées sont justement ce qu'on compare.

B. Parce qu'ils sont symétriques par rapport à l'origine.

Faux.

Aucune symétrie n'intervient : M et N sont sur une même droite verticale.

C. Parce qu'ils ont la même abscisse x.

Juste.

Juste : seule leur hauteur peut différer.

D. Parce qu'ils sont toujours confondus.

Faux.

Ils ne sont confondus que si $f(x) = g(x)$: c'est ce qu'on cherche.

Correction

M et N ont la même abscisse x : ils sont sur une même droite verticale. On compare donc seulement leurs ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$.

- Ils sont confondus si et seulement si $f(x) = g(x)$.
- Le point M est au-dessus de N si et seulement si $f(x) > g(x)$.

Exemple : une équation et une inéquation avec une droite

Pour la hauteur h du réservoir, sur $[0; 24]$:

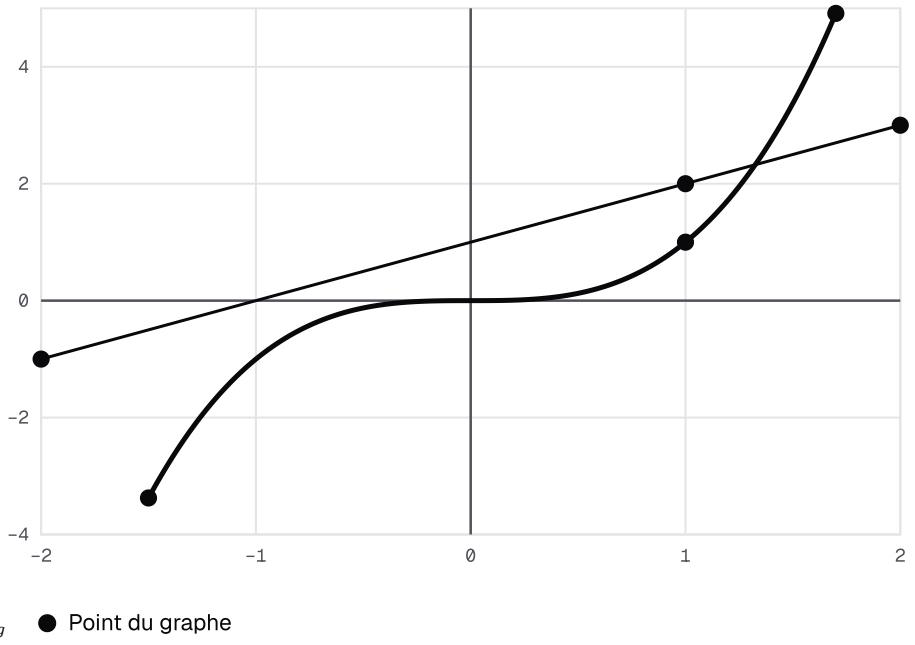
- **Équation $h(t) = 3$.** D'après la résolution graphique, les solutions sont les abscisses des points communs, marqués sur le tracé : 2 et 12.
- **Inéquation $h(t) \geq 3$.** La courbe est au-dessus de la droite, ou la touche, entre 2 et 12. Les solutions forment $[2; 12]$, bornes comprises, car l'inégalité est large.
- **Inéquation $h(t) > 3$.** Les bornes sont exclues : les solutions forment $]2; 12[$.

Seules les abscisses où h est définie comptent : la droite d'équation $y = 3$ se prolonge au-delà de 24, mais aucune heure après 24 h n'est solution.

Deux courbes qui se croisent

Méthode : résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

1. **Repère** les deux courbes en jeu : $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, ou $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = k$.
2. **Équation** : lis les abscisses de tous les points communs.
3. **Inéquation** : repère où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus, ou au-dessous, de l'autre courbe. Lis les intervalles d'abscisses. Garde les points communs pour $\geq$ ou $\leq$; retire-les pour $>$ ou $<$.
4. **Écris** les solutions lues comme approchées, puis contrôle-les par le calcul quand c'est possible.



Les courbes de f et de g autour de leur point commun

Exemple : une équation qu'on ne sait pas résoudre par le calcul

Soit $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto x + 1$. L'équation $x^3 = x + 1$ ne se résout pas avec les outils de ce chapitre.

Lecture. D'après la résolution graphique, ses solutions sont les abscisses des points communs aux deux courbes. Sur l'intervalle du tracé, on lit un seul point commun, d'abscisse $\alpha \approx 1{,}3$.

Contrôle à la calculatrice.

- $1{,}32^3 \approx 2{,}300$, inférieur à $1{,}32 + 1 = 2{,}32$: en $1{,}32$, la courbe de f est au-dessous de la droite.

- $1{,}33^3 \approx 2{,}353$, supérieur à $1{,}33 + 1 = 2{,}33$: en $1{,}33$, elle est au-dessus.

Ces deux calculs confirment la lecture $\alpha \approx 1{,}3$.

Exemple : une inéquation lue sur deux courbes

Sur l'intervalle $[-1{,}5; 1{,}7]$, où les deux courbes sont tracées, résolvons $x^3 \geq x + 1$, c'est-à-dire $f(x) \geq g(x)$.

Lecture. La courbe de f coupe la droite au point commun, puis reste au-dessus d'elle jusqu'au bout du tracé. D'après le tracé, les solutions forment $[\alpha; 1{,}7]$, avec $\alpha \approx 1{,}3$.

Contrôle. $1{,}5$ est solution, car $1{,}5^3 = 3{,}375 \geq 2{,}5$. Mais 1 ne l'est pas, car $1^3 = 1 < 2$, comme le montrent les deux points marqués.

Valeurs approchées et crochets

Attention : valeurs approchées et crochets

✗ « L'équation $x^3 = x + 1$ a pour solution $1{,}3$. »

✓ La lecture donne $\alpha \approx 1{,}3$, une valeur **approchée** : $1{,}3^3 = 2{,}197$, alors que $1{,}3 + 1 = 2{,}3$.

Pour une inéquation, regarde chaque borne. Avec $\geq$, l'abscisse d'un point commun est solution ; avec $>$, elle ne l'est pas. Ainsi, $h(t) \geq 3$ donne $[2; 12]$, mais $h(t) > 3$ donne $]2; 12[$.

Remarque : calculatrice et logiciel de tracé

Un logiciel de tracé affiche les deux courbes et peut agrandir la zone du point commun : tu lis alors α avec plus de décimales.

La table de valeurs de la calculatrice, avec un pas de $0{,}01$, contrôle la lecture, comme les calculs en $1{,}32$ et en $1{,}33$.

Ces outils contrôlent une lecture. La réponse reste une valeur approchée, écrite avec $\approx$.

Vérifie : Une inéquation stricte

La courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ ont deux points communs, d'abscisses 0 et 4. Sur $]0; 4[$, la courbe est au-dessus de la droite ; au-delà de 4, elle est au-dessous. Quelles sont les solutions de $\sqrt{x} > \dfrac{x}{2}$?

A. Les réels de $[0; 4]$.
Faux.

L'inégalité est stricte : en 0 et en 4, les deux membres sont égaux.

B. Les réels de $[0;4[$.

Faux.

En 0, $\sqrt{0} = 0 = \dfrac{0}{2}$: l'inégalité stricte est fausse.

C. Les réels de $]4;+\infty[$.

Faux.

Au-delà de 4, la droite est au-dessus : par exemple, $\sqrt{9} = 3 < 4{,}5$.

D. Les réels de $]0;4[$.

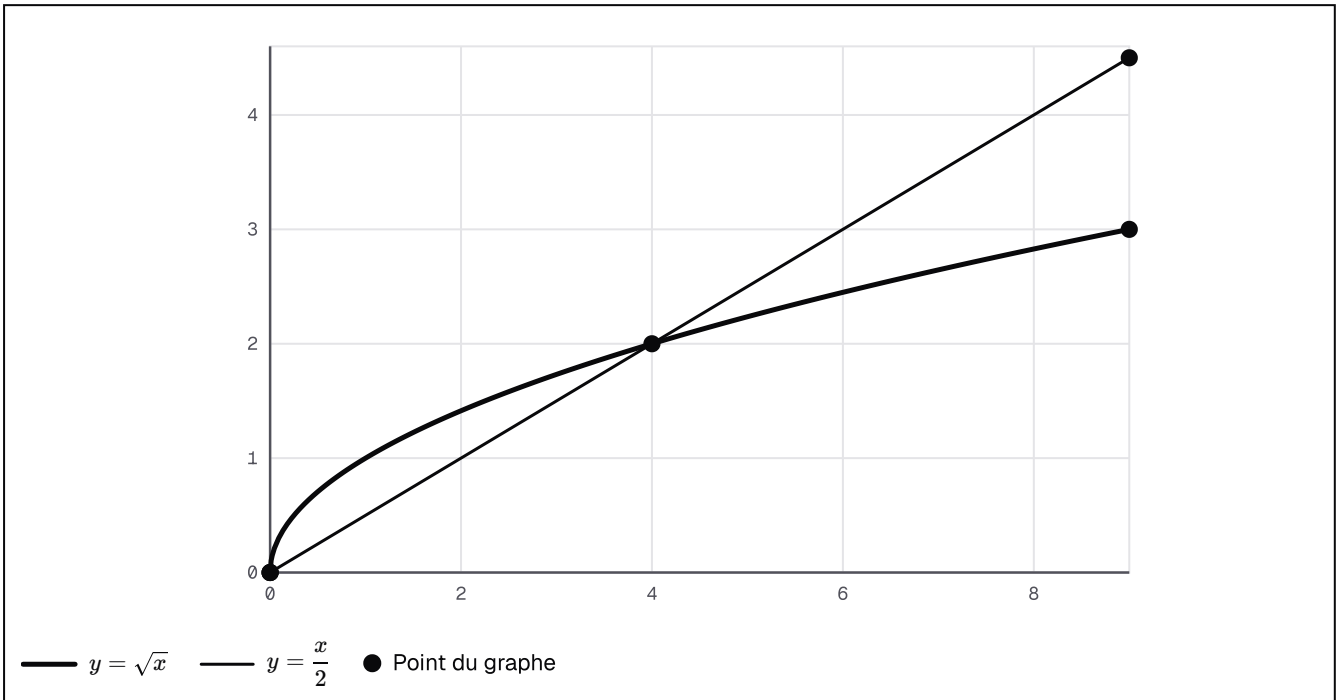
Juste.

Juste : les abscisses des points communs sont exclues.

Correction

D'après la résolution graphique, les solutions sont les abscisses où la courbe est strictement au-dessus de la droite : $]0;4[$.

Les abscisses 0 et 4 des points communs sont exclues, car l'inégalité est stricte. Contrôle : $\sqrt{1} = 1 > \dfrac{1}{2}$, et $\sqrt{4} = 2 = \dfrac{4}{2}$.



La courbe de x ↦ √x et la droite d'équation y = x/2, avec leurs deux points communs d'abscisses 0 et 4.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Deux lectures sur le réservoir

Reprends le tracé du réservoir, en début de section. Résous graphiquement $h(t) = 4$, puis $h(t) \leq 2$, sur $[0; 24]$. Rédige ta réponse, puis dévoile la correction.

Indice 1
Pour $h(t) = 4$, imagine la droite d'équation $y = 4$ et lis les abscisses des points communs.
Indice 2
Pour $h(t) \leq 2$, cherche où la courbe est au-dessous de la droite d'équation $y = 2$, ou la touche.
Indice 3
Point délicat : regarde la hauteur à 0 h.

Réponse
Équation $h(t) = 4$. La droite d'équation $y = 4$ coupe la courbe en deux points : $h(t) = 4$ pour $t \approx 4$ et pour $t \approx 9$.

Inéquation $h(t) \leq 2$. La courbe touche la droite d'équation $y = 2$ en $t = 0$. Elle repasse au-dessous de cette droite vers 15 h et y reste jusqu'à 24 h, où elle la touche.

Conclusion. Les solutions de $h(t) = 4$ sont environ 4 et 9. Les solutions de $h(t) \leq 2$ sont 0 et les réels de $[t_1; 24]$, avec $t_1 \approx 15$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution graphique

En devoir, nomme les courbes, puis donne les solutions avec leur nature. Pour l'équation de l'exemple, écris :

« Les solutions de $x^3 = x + 1$ sont les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et à la droite d'équation $y = x + 1$. Sur l'intervalle du tracé, on lit un seul point commun : $\alpha \approx 1{,}3$. »

Pour une inéquation, justifie chaque crochet par le sens de l'inégalité.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Image, antécédents** : calculer $f(a)$, résoudre $f(x) = b$, ou lire sur la courbe.
- **Ensemble de définition** : dénominateurs non nuls, nombres sous une racine positifs ou nuls.
- **Égalité de deux fonctions** : mêmes ensembles de définition, puis mêmes images.
- **Parité** : ensemble symétrique, puis $f(-x)$ comparé à $f(x)$ et à $-f(x)$.
- **Sens de variation** : lu sur une courbe, ou prouvé par le signe du taux de variation.
- **Extremum** : lu sur une courbe ou un tableau, ou prouvé par le signe de $f(x) - f(a)$.
- **Résolution graphique** : abscisses des points communs, position des courbes, bornes vérifiées.

Le mot du prof. Tu sais maintenant passer d'une expression à une courbe, et d'une courbe à des réponses chiffrées.

Garde deux réflexes : l'ensemble de définition d'abord, et le signe $\approx$ pour toute lecture.

Au chapitre suivant, tu appliques ces outils à des fonctions précises, que tu apprends à tracer.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Généralités sur les fonctions numériques » (tc · sciences · mathematiques)