BURHAN

Résumé : Fonctions de référence

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/resume

Chapitre	Semestre
Fonctions de référence	Semestre 2

La fonction x ↦ ax²

À retenir : Un signe décide de tout

Pour $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ et un trinôme, le signe de a décide du sens de variation. Pour une fonction homographique, c'est le signe de k. Repère ce signe avant tout calcul.

Propriété : Parité et variations de la fonction x ↦ ax²

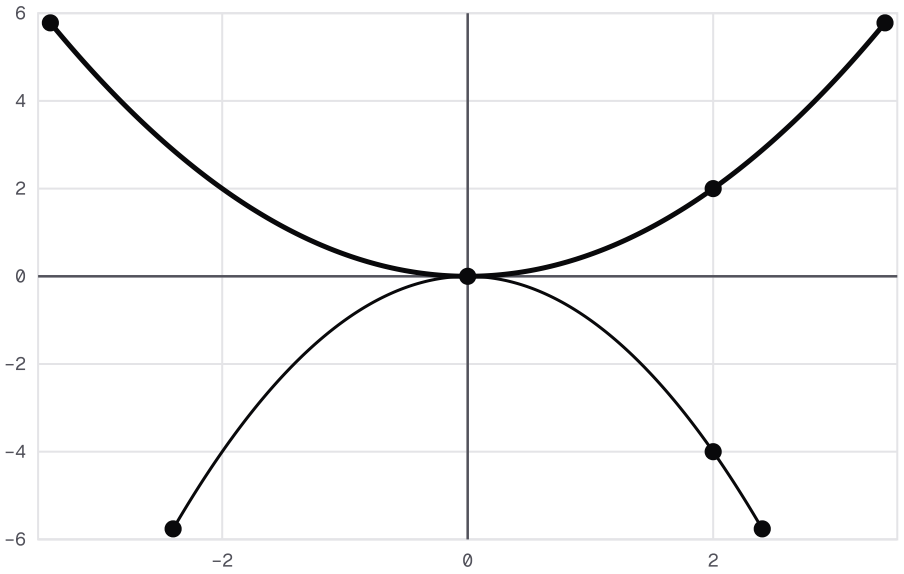
Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$.

- La fonction f est **paire**.
- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un **minimum** égal à 0, atteint en 0.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un **maximum** égal à 0, atteint en 0.

Définition : Parabole d'équation y = ax²

Soit a un réel non nul. Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ s'appelle une **parabole** de **sommet** O et d'**axe** l'axe des ordonnées. On dit qu'elle a pour équation $y = ax^2$.

Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$.



Deux paraboles de sommet O : y = x²/2 s'ouvre vers le haut (a > 0), y = −x² vers le bas (a < 0).

Exemple

Énoncé. Étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2$.

Parité et sens. La fonction f est paire. Ici $a = -3 < 0$: f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Son maximum vaut 0, atteint en 0.

Valeurs. $f(1) = -3$ et $f(2) = -12$. Comme f est paire, $f(-1) = -3$ et $f(-2) = -12$.

Attention : Regarde a avant d'écrire le tableau

Pour $x \mapsto -4x^2$, recopier le tableau de $x \mapsto x^2$ serait faux. Ici $a = -4$ est négatif : l'image de 1 vaut -4, qui est inférieure à l'image de 0.

La courbe est tournée vers le bas et le point O donne un maximum. Le même réflexe vaut pour $x \mapsto \frac{a}{x}$.

La fonction x ↦ a/x

Propriété : Parité et variations de la fonction x ↦ a/x

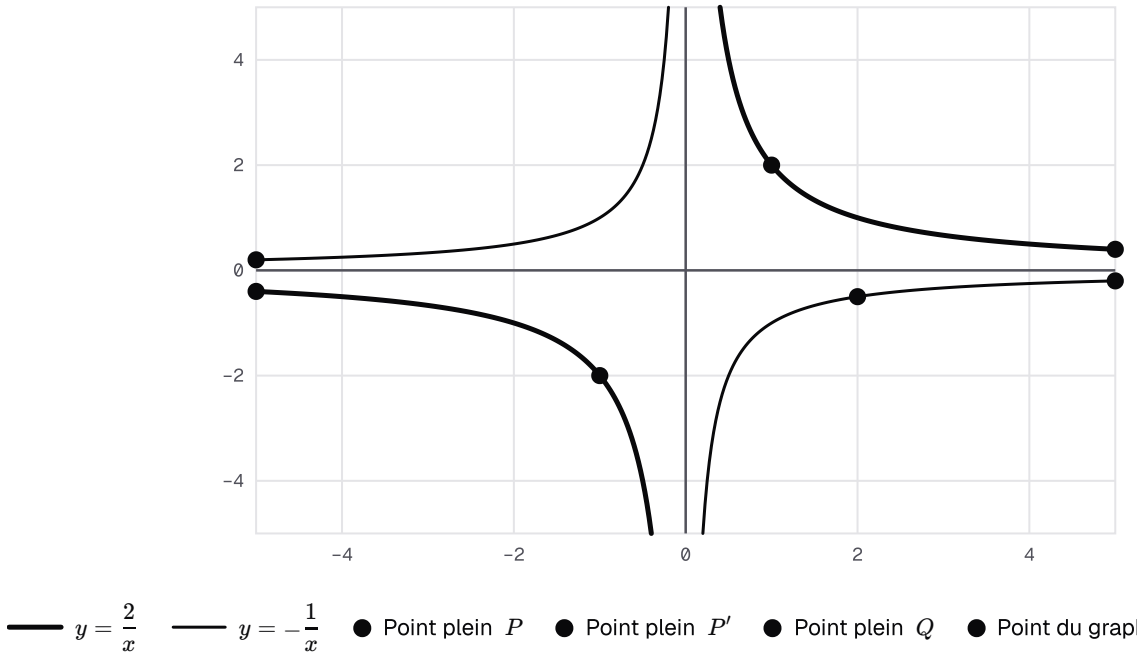
Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{a}{x}$.

- La fonction f est **impaire**.
- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Définition : Hyperbole d'équation y = a/x

Soit a un réel non nul. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ s'appelle une **hyperbole** de **centre** O. On dit qu'elle a pour équation $y = \dfrac{a}{x}$.

Elle est formée de deux **branches**, l'une formée des points d'abscisse $x < 0$, l'autre des points d'abscisse $x > 0$, symétriques l'une de l'autre par rapport au point O.



Deux hyperboles de centre O : y = 2/x pour a > 0 et y = −1/x pour a < 0, chacune en deux branches opposées.

Méthode : tracer x ↦ ax² ou x ↦ a/x

1. **Lis** le signe de a : il fixe le sens de variation.
2. **Calcule** quelques images de réels positifs : $0, 1, 2, 3$ pour ax^2 ; $\dfrac{1}{2}, 1, 2, 4$ pour $\dfrac{a}{x}$.
3. **Complète** par symétrie : par rapport à l'axe des ordonnées pour ax^2, fonction paire ; par rapport à O pour $\dfrac{a}{x}$, fonction impaire.
4. **Trace** une courbe régulière. L'hyperbole ne rencontre aucun des deux axes.

Exemple

Énoncé. Étudie la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{4}{x}$.

Parité et sens. La fonction g est impaire. Ici $a = 4 > 0$: g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Valeurs. $g\left(\frac{1}{2}\right) = 8$, $g(1) = 4$, $g(2) = 2$ et $g(4) = 1$. Comme g est impaire, $g(-2) = -2$: le point $(-2, -2)$ est le symétrique de $(2, 2)$ par rapport à O.

Attention : Deux intervalles, deux études

Avec $g(x) = \frac{4}{x}$, on a $-2 < 2$ et $g(-2) = -2 < 2 = g(2)$. Pourtant g est décroissante sur chacun de ses deux intervalles.

Il n'y a aucune contradiction : -2 et 2 ne sont pas dans le même intervalle. N'écris donc jamais « décroissante sur $\mathbb{R}^*$ ». Dans le tableau, une double barre sépare les deux intervalles.

La forme canonique d'un trinôme

Propriété : Forme canonique d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On pose

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Alors, pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de $f(x)$.

Exemple

Énoncé. Écris $f(x) = 3x^2 + 12x + 7$ sous forme canonique.

Calcul de α et β. $\alpha = -\frac{12}{2 \times 3} = -2$ et $\beta = f(-2) = 12 - 24 + 7 = -5$.

Forme canonique. Pour tout réel x, $f(x) = 3(x + 2)^2 - 5$.

Contrôle. En développant, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &3(x+2)^2 - 5 \\ &= 3(x^2 + 4x + 4) - 5 \\ &= 3x^2 + 12x + 7. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Même travail pour $m(x) = -2x^2 + 6x - 1$.

Calcul. $\alpha = -\frac{6}{2 \times (-2)} = \frac{3}{2}$ et $\beta = m\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} + 9 - 1 = \frac{7}{2}$.

Forme canonique. Pour tout réel x, $m(x) = -2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{2}$.

Contrôle en 0. $-2 \times \dfrac{9}{4} + \dfrac{7}{2} = -1$, et $m(0) = -1$.

Attention : Le signe caché dans la parenthèse

Dans $f(x) = 3(x+2)^2 - 5$, on lit $\alpha = -2$, et non 2, car $x + 2 = x - (-2)$.

Le minimum n'est pas non plus le terme constant 7 de la forme développée. On a $\beta = f(-2) = -5$, alors que $f(0) = 7$.

Variations et courbe d'un trinôme

Propriété : Variations d'une fonction trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.

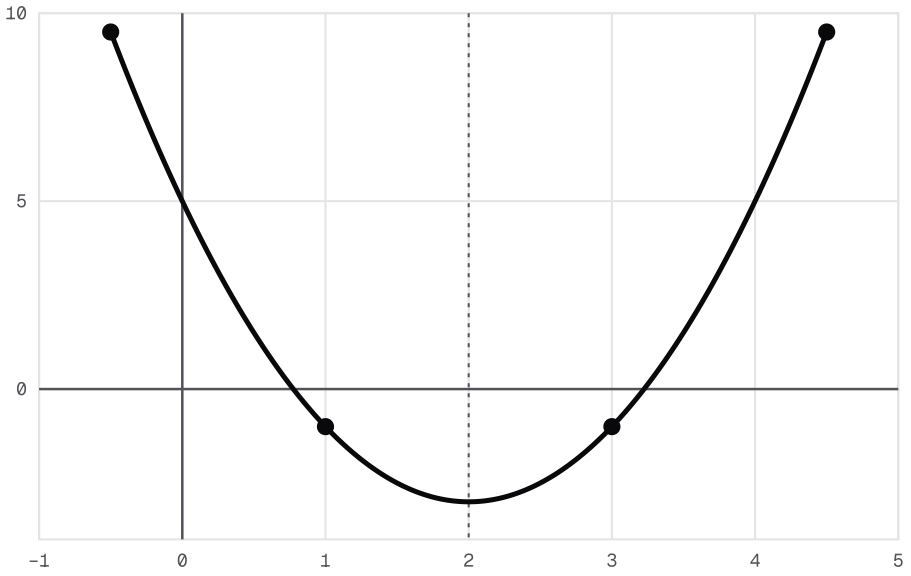
- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$; elle admet un **minimum** égal à β, atteint en α.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$; elle admet un **maximum** égal à β, atteint en α.

Propriété : Axe de symétrie de la courbe d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Pour tout réel h,

$$f(\alpha + h) = f(\alpha - h).$$

Dans un repère orthogonal, la courbe de f est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

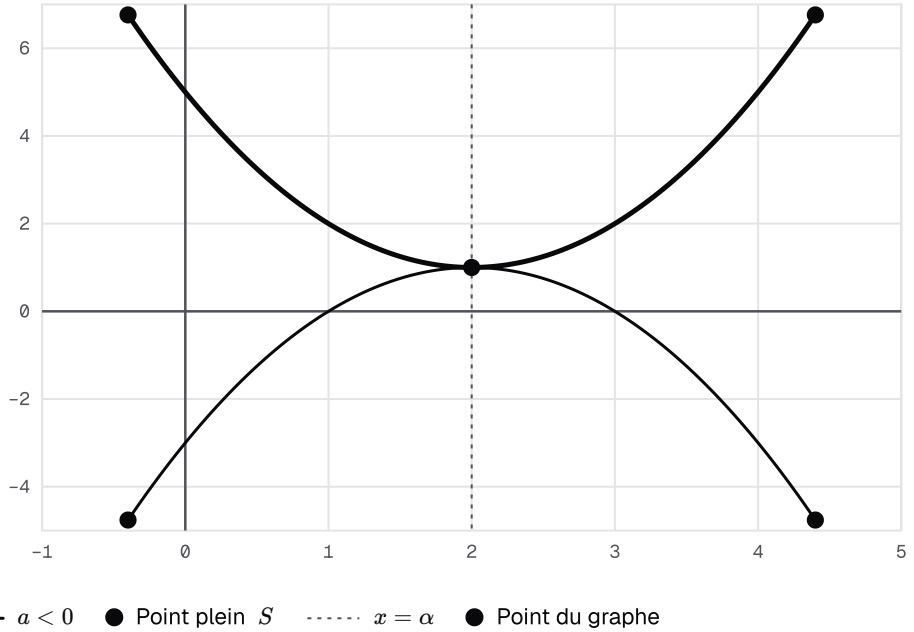


Sur la parabole de 2x² − 8x + 5, où α vaut 2, les abscisses α + h et α − h donnent deux points M et M' à la même hauteur.

Définition : Parabole de sommet S

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c$. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ s'appelle une **parabole** de **sommet** $S(\alpha, \beta)$ et d'**axe** la droite d'équation $x = \alpha$.

Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$.



Deux paraboles de même sommet S(2, 1) et de même axe x = 2 : la première avec a > 0, la seconde avec a < 0.

Méthode : étudier et tracer un trinôme

1. **Calcule** $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$; écris la forme canonique.
2. **Donne** le sens de variation selon le signe de a, et l'extremum β atteint en α.
3. **Place** le sommet $S(\alpha, \beta)$; trace en pointillés la droite d'équation $x = \alpha$.
4. **Calcule** $f(\alpha+1)$, $f(\alpha+2)$, … Chaque point a un symétrique de même ordonnée, d'abscisse $\alpha - 1$, $\alpha - 2$, …
5. **Relie** les points par une courbe régulière, dans le repère donné.

Exemple

Énoncé. Étudie $p(x) = x^2 - 6x + 5$ et prépare son tracé.

Forme canonique. $\alpha = 3$ et $\beta = p(3) = -4$, donc $p(x) = (x-3)^2 - 4$.

Variations. $a = 1 > 0$: p est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$. Son minimum vaut -4, atteint en 3.

Points. Le sommet est $S(3, -4)$. Puis $p(4) = p(2) = -3$, $p(5) = p(1) = 0$ et $p(6) = p(0) = 5$.

Tableau de variations de p : décroissante puis croissante, minimum −4 atteint en 3.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$p(x)$		↘	-4	↗	

Fonction homographique : forme réduite

Définition : Fonction homographique

Soit a, b, c, d quatre réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

s'appelle une **fonction homographique**. Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, car $cx + d = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{d}{c}$.

Propriété : Forme réduite d'une fonction homographique

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. On pose

$$\alpha = -\frac{d}{c}, \quad \beta = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad k = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Alors $k \neq 0$ et, pour tout réel $x \neq \alpha$:

$$f(x) = \beta + \frac{k}{x - \alpha}.$$

Exemple

Énoncé. Écris la forme réduite de $q(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$.

Conditions. $c = 1 \neq 0$ et $ad - bc = 3 \times 2 - (-1) \times 1 = 7 \neq 0$: q est homographique, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Forme réduite. $\alpha = -2$, $\beta = 3$ et $k = \dfrac{bc - ad}{c^2} = -1 - 6 = -7$. Pour tout réel $x \neq -2$, $q(x) = 3 - \dfrac{7}{x + 2}$.

Contrôle en 0. $3 - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{1}{2}$, et $q(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Attention : Vérifie ad – bc avant tout

Avec $\dfrac{3x - 6}{x - 2}$, on trouve $ad - bc = 3 \times (-2) - (-6) \times 1 = 0$. En effet $3x - 6 = 3(x - 2)$: le quotient vaut 3 pour tout réel $x \neq 2$.

Ce n'est pas une fonction homographique. Sa courbe n'est pas une hyperbole : c'est la droite d'équation $y = 3$ privée du point $(2, 3)$.

Variations et courbe d'une fonction homographique

Propriété : Variations d'une fonction homographique

Soit f une fonction homographique, écrite sous la forme réduite $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$ avec $k \neq 0$.

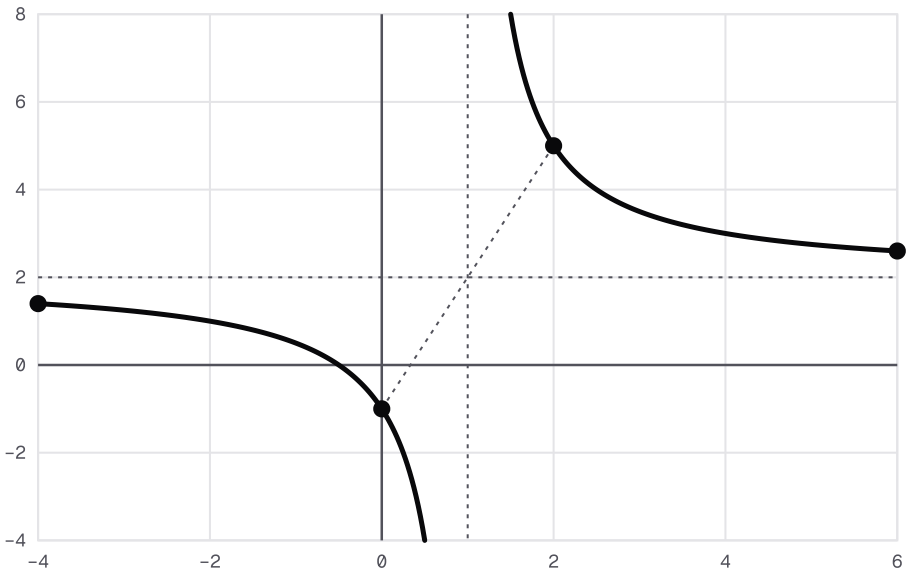
- Si $k > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.
- Si $k < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$.

Propriété : Centre de symétrie de la courbe d'une fonction homographique

Soit f une fonction homographique, écrite sous la forme réduite $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$ avec $k \neq 0$. Pour tout réel h non nul, les réels $\alpha + h$ et $\alpha - h$ appartiennent à D_f et

$$f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta.$$

La courbe de f est donc symétrique par rapport au point $\Omega(\alpha, \beta)$.

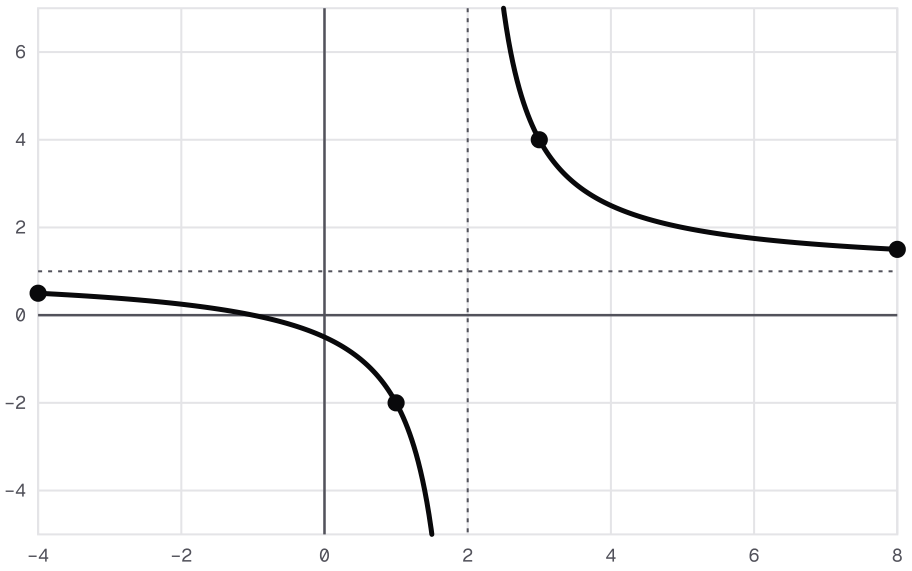


Pour f(x) = 2 + 3/(x − 1), le centre Ω(1, 2) est le milieu de [MM'] dès que M et M' ont pour abscisses 1 + h et 1 − h.

Définition : Hyperbole de centre Ω

Soit f une fonction homographique, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, et $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$. La courbe représentative de f s'appelle une **hyperbole** de **centre** $\Omega(\alpha, \beta)$.

Elle est formée de deux **branches**, l'une formée des points d'abscisse $x < \alpha$, l'autre des points d'abscisse $x > \alpha$, symétriques l'une de l'autre par rapport au point Ω.



$y = \dfrac{x+1}{x-2}$ ● Point plein A ● Point plein A' ------ $x = \alpha$ ------ $y = \beta$ ● Point du graphe

L'hyperbole de y = (x + 1)/(x − 2), de centre Ω(2, 1), entre les pointillés x = 2 et y = 1 qui se croisent en Ω.

Méthode : étudier et tracer une fonction homographique

1. **Vérifie** que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$; la valeur interdite est $\alpha = -\dfrac{d}{c}$.
2. **Écris** la forme réduite $\beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$ et contrôle-la en un réel.
3. **Déduis** le sens de variation du signe de k, séparément sur $]-\infty, \alpha[$ et sur $]\alpha, +\infty[$.
4. **Trace** en pointillés les droites d'équations $x = \alpha$ et $y = \beta$: elles se coupent au centre $\Omega(\alpha, \beta)$.
5. **Calcule** des images d'un seul côté de α, puis place leurs symétriques par rapport à Ω.

Exemple

Énoncé. Étudie $r(x) = \dfrac{2x + 5}{x + 1}$.

Forme réduite. $ad - bc = 2 - 5 = -3 \neq 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$ et $k = 3$. Pour tout réel $x \neq -1$, $r(x) = 2 + \dfrac{3}{x + 1}$.

Variations. $k = 3 > 0$: r est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

Points. $r(0) = 5$ et $r(2) = 3$. Leurs symétriques par rapport à $\Omega(-1, 2)$ sont $(-2, -1)$ et $(-4, 1)$; on vérifie que $r(-2) = -1$ et $r(-4) = 1$.

Tableau de variations de r : double barre en −1, strictement décroissante sur chacun des deux intervalles.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$r(x)$		↘	‖	↘	

Fonctions périodiques

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et T un réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période** T si, pour tout réel x de D_f :

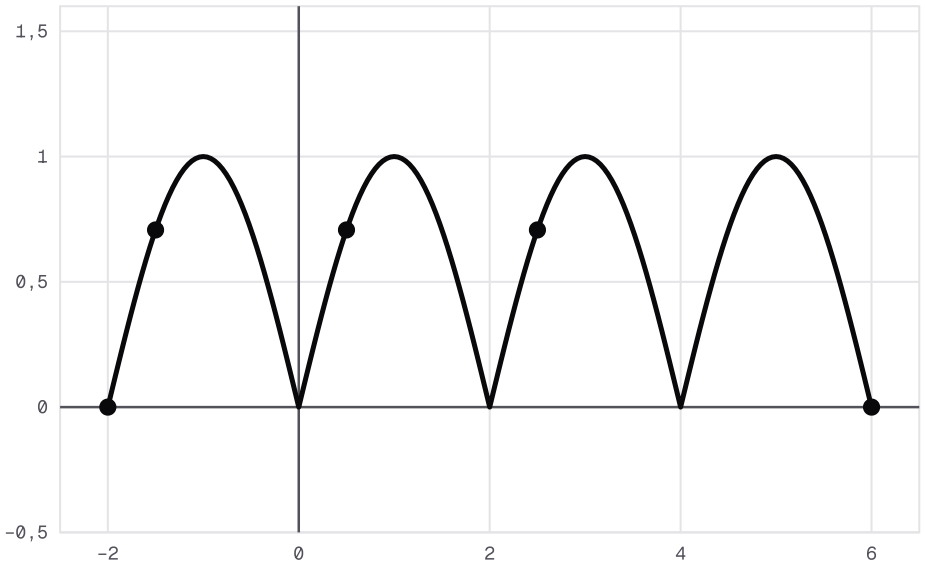
- $x+T \in D_f$ et $x-T \in D_f$;
- $f(x+T)=f(x)$.

Le réel T s'appelle **une période** de f.

Propriété : Propriétés d'une fonction périodique

Soit f une fonction périodique de période T, d'ensemble de définition D_f.

- Pour tout réel x de D_f, $f(x-T)=f(x)$.
- Pour tout entier naturel n non nul, le réel nT est aussi une période de f : pour tout réel x de D_f, $f(x+nT)=f(x)$ et $f(x-nT)=f(x)$.
- Si le point $M(x,y)$ appartient à la courbe de f, les points $M_1(x+T,y)$ et $M_2(x-T,y)$ lui appartiennent aussi. Il suffit donc de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T, puis de reproduire ce **motif** de T en T, vers la droite et vers la gauche.



Une fonction de période T = 2 : le même arc se répète tous les 2, et M, M_1, M_2 sont à la même hauteur.

Méthode : se servir d'une période

1. **Vérifie** la définition : $x + T$ et $x - T$ restent dans D_f, et $f(x + T) = f(x)$.
2. **Choisis** un intervalle de longueur T, par exemple $[0, T]$.
3. **Étudie** la fonction sur ce seul intervalle : valeurs, variations, morceau de courbe.
4. **Recopie** ce motif de T en T, à droite et à gauche.

Exemple

Énoncé. Vérifie que $u(x) = \cos(\pi x)$ définit une fonction périodique de période 2.

Calcul. Pour tout réel x, les réels $x + 2$ et $x - 2$ existent. D'après la périodicité du cosinus :

$$\begin{aligned} u(x+2) &= \cos(\pi x + 2\pi) \\ &= \cos(\pi x) = u(x). \end{aligned}$$

Conséquence. On étudie u sur $[0, 2]$ seulement : $u(0) = 1$, $u\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $u(1) = -1$ et $u(2) = 1$.

Exemple

Énoncé. Une fonction v, définie sur $\mathbb{R}$, est périodique de période 3, et $v(1) = 4$. Calcule $v(7)$ et $v(-2)$.

Image de 7. $7 = 1 + 2 \times 3$, et $2 \times 3 = 6$ est aussi une période : $v(7) = v(1) = 4$.

Image de -2. $-2 = 1 - 3$, donc $v(-2) = v(1 - 3) = v(1) = 4$.

Les fonctions sinus et cosinus

Propriété : Périodicité et parité des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions **sinus** $x \mapsto \sin x$ et **cosinus** $x \mapsto \cos x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$: ces deux fonctions sont **périodiques de période** 2π ;
- $\sin(-x) = -\sin x$: la fonction sinus est **impaire** ;
- $\cos(-x) = \cos x$: la fonction cosinus est **paire**.

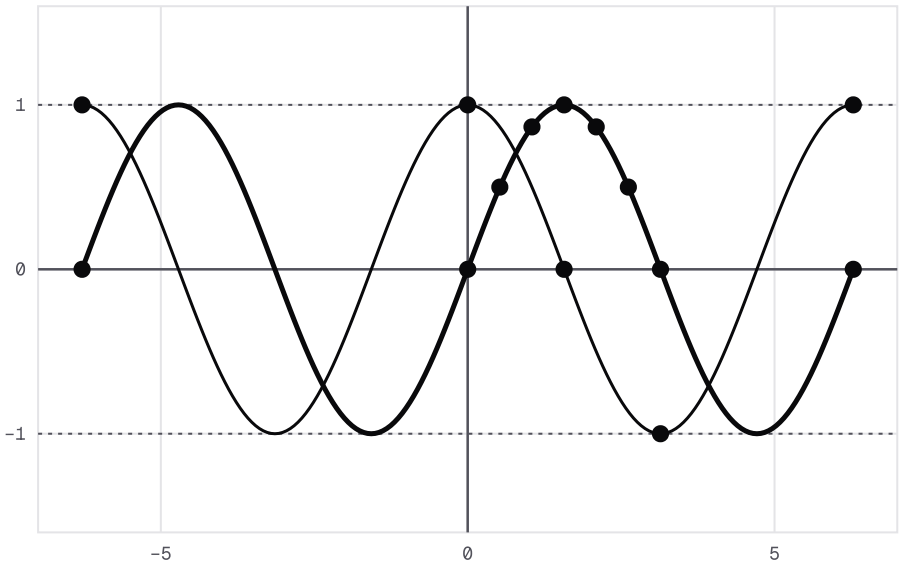
Propriété : Variations des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

- la fonction sinus est strictement décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; elle admet un maximum égal à 1, atteint en $\frac{\pi}{2}$, et un minimum égal à -1, atteint en $-\frac{\pi}{2}$;
- la fonction cosinus est strictement croissante sur $[-\pi, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, \pi]$; elle admet un maximum égal à 1, atteint en 0, et un minimum égal à -1, atteint en $-\pi$ et en π.

Méthode : tracer sinus et cosinus

1. **Place** les points de $[0, \pi]$ d'abscisses remarquables : 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, puis leurs associés $\pi - x$.
2. **Complète** sur $[-\pi, 0]$ par la parité : symétrie de centre O pour sinus, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour cosinus.
3. **Reproduis** ce motif de longueur 2π à droite et à gauche.
4. **Contrôle** que chaque courbe reste comprise entre les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$.



Sinus et cosinus de −2π à 2π : les points placés sur [0, π], complétés par parité puis reproduits de 2π en 2π.

En 0

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$$

En π/6

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En π/4

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En π/3

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

En π/2

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

En π

$$\sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1$$

Exemple

Énoncé. Calcule $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos \frac{2\pi}{3}$ et $\cos \frac{7\pi}{3}$.

Parité. $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Angle associé. $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Période. $\frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$, donc $\cos \frac{7\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Attention : Un sens de variation, un intervalle

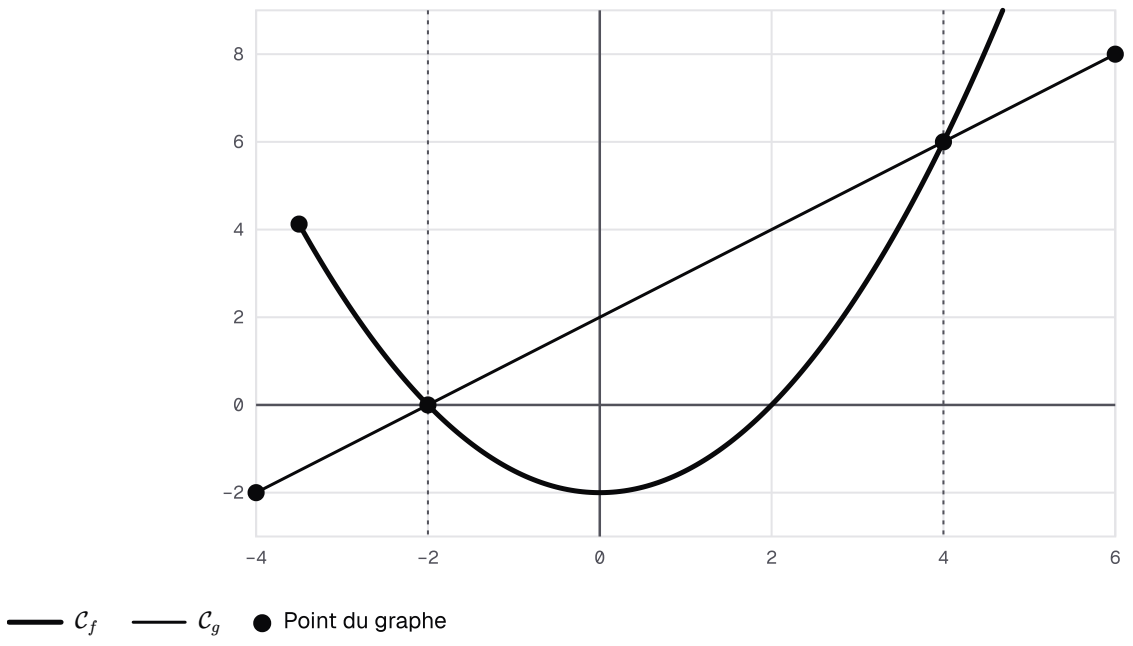
La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, mais pas sur $\mathbb{R}$: $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, puis $\cos 2\pi = 1$. Sur $[0, 2\pi]$, elle descend puis remonte.

Accompagne donc chaque sens de variation de son intervalle.

Résoudre graphiquement

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Écris** le problème sous la forme $f(x) = g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, avec deux fonctions que tu sais tracer.
2. **Trace** les deux courbes dans un même repère, sur l'intervalle étudié : à la main, à la calculatrice ou au logiciel.
3. **Lis** les abscisses des points communs : ce sont des valeurs approchées. Pour $f(x) \leq g(x)$, garde les abscisses où $\mathcal{C}_f$ passe sous $\mathcal{C}_g$ ou la rencontre. Pour une inégalité stricte, garde seulement les abscisses où elle passe sous $\mathcal{C}_g$.
4. **Contrôle** à la calculatrice : si les courbes se traversent, $f(x) - g(x)$ change de signe de part et d'autre de la solution lue.



Deux courbes et leurs deux points communs : les solutions de f(x) = g(x) se lisent sur l'axe des abscisses, ici −2 et 4.

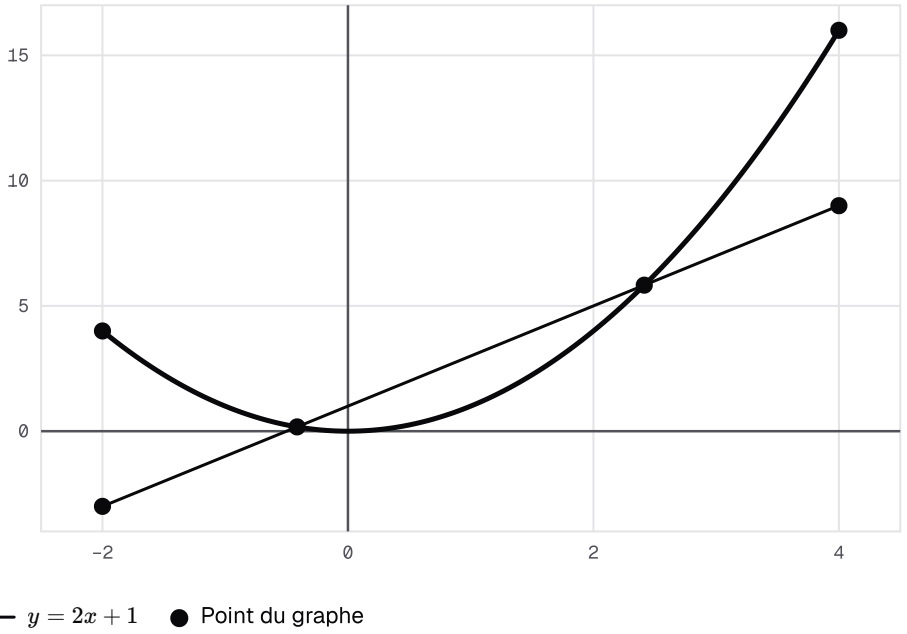
Exemple

Énoncé. Résous graphiquement $x^2 = 2x + 1$ sur $[-2, 4]$.

Tracé. On trace la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 2x + 1$. Sur la fenêtre tracée, on voit deux points communs.

Lecture. Leurs abscisses valent environ $-0{,}4$ et $2{,}4$: $x \approx -0{,}4$ ou $x \approx 2{,}4$.

Contrôle. $2{,}4^2 = 5{,}76$ est inférieur à $2 \times 2{,}4 + 1 = 5{,}8$, et $2{,}5^2 = 6{,}25$ est supérieur à $2 \times 2{,}5 + 1 = 6$. Une solution est donc entre $2{,}4$ et $2{,}5$.



La parabole y = x² et la droite y = 2x + 1 sur [−2, 4] : deux points communs, d'abscisses voisines de −0,4 et de 2,4.

Attention : Lu n'est pas calculé

Dans l'exemple ci-dessus, écrire $x = 2{,}4$ serait faux : $2{,}4^2 = 5{,}76$, alors que $2 \times 2{,}4 + 1 = 5{,}8$.

Une lecture sur une courbe donne une valeur approchée, avec sa précision : « $x \approx 2{,}4$ à $0{,}1$ près ». La figure ne dit rien non plus de ce qui se passe hors de la fenêtre tracée.

Exemple

Énoncé. Sur la même figure, résous graphiquement $x^2 \leq 2x + 1$ sur $[-2, 4]$.

Lecture. La parabole est au-dessous de la droite entre les deux points communs, et elle la coupe en ces deux points.

Conclusion. Les solutions sont les réels compris entre environ $-0{,}4$ et $2{,}4$, bornes comprises. Ces bornes sont des valeurs approchées.

Quelle forme pour quelle question ?

Méthode : Quelle forme pour quelle question ?

- **Sens de variation** de $x \mapsto ax^2$ ou de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$: le signe de a.

- **Sommet et axe** d'une parabole : la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$.
- **Centre et variations** d'une hyperbole : la forme réduite $\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$, puis le signe de k.
- **Points symétriques** : $f(\alpha+h)=f(\alpha-h)$ pour un trinôme ; $f(\alpha+h)+f(\alpha-h)=2\beta$ pour une fonction homographique.
- **Courbe entière** d'une fonction périodique : le motif sur un intervalle de longueur T.
- **Équation impossible à résoudre par le calcul** : deux courbes, une lecture, un contrôle.

Trinôme, a non nul

$$\alpha=-\frac{b}{2a},\quad \beta=f(\alpha)$$

Forme canonique

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$$

Axe de symétrie de la parabole

$$x=\alpha$$

Homographique, c et ad – bc non nuls

$$\alpha=-\frac{d}{c},\quad \beta=\frac{a}{c},\quad k=\frac{bc-ad}{c^2}$$

Forme réduite, x différent de α

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\beta+\frac{k}{x-\alpha}$$

Centre de symétrie de l'hyperbole

$$\Omega(\alpha,\beta)$$

Période de sinus et cosinus

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

Parité de sinus et cosinus

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad \cos(-x)=\cos x$$

Angle associé π – x

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x$$

À retenir : Rédiger en devoir

Annonce chaque cas : signe de a, signe de k, intervalle à gauche ou à droite de α. Cite la propriété employée, par exemple « d'après la forme canonique ».

Écris toute valeur lue sur une courbe avec $\approx$. Termine par une phrase de conclusion.