BURHAN

Fonctions de référence : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions de référence	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une parabole et une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.

1. 1 pts

Calculer α et β, puis écrire $f(x)$ sous forme canonique. Vérifier en développant.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. **Point délicat :** ici $a = -1$.

2. 0,75 pts

Donner le sens de variation de f, son extremum, puis le sommet et l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'un trinôme, selon le signe de a.

3. 0,75 pts

À l'aide de la forme canonique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Contrôler que les deux solutions sont symétriques par rapport à 2.

INDICE

Début : $f(x) = 0$ équivaut à $(x - 2)^2 = 9$. **Ensuite :** un carré égal à 9 vient de 3 ou de -3.

4. 1 pts

Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis en déduire $f(3)$ et $f(4)$ sans calcul. Dans le repère, placer ces points, le sommet et les points de la question 3, puis tracer $\mathcal{C}_f$ pour x compris entre -1 et 5. Tracer aussi la droite $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : l'axe de symétrie : $f(2 + h) = f(2 - h)$. **Début :** $3 = 2 + 1$ et $1 = 2 - 1$; $4 = 2 + 2$ et $0 = 2 - 2$.

5. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) - (x + 1) = -(x + 1)(x - 4)$. En déduire les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : calcule $f(x) - (x + 1)$, puis développe $-(x + 1)(x - 4)$. **Outil :** un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

6. 0,75 pts

Étudier le signe de $-(x+1)(x-4)$ selon les valeurs de x. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq x+1$, puis contrôler sur la figure.

INDICE

Outil : un tableau de signes des facteurs $x+1$ et $x-4$. **Point délicat :** n'oublie pas le signe moins devant le produit, et l'inégalité est large.

Exercice 2 — 5 pts

Une hyperbole et la droite d'équation y = x

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. — 1,25 pts

Déterminer D_f et vérifier que f est une fonction homographique. Écrire ensuite sa forme réduite, puis la vérifier en réduisant au même dénominateur.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$, $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$. **Début :** ici $a=2, b=-1, c=1, d=3$.

2. — 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations. Donner le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'une fonction homographique ; le signe de k décide. **Point délicat :** la double barre en -3.

3. — 0,75 pts

Pour tout réel h non nul, calculer $f(-3+h)+f(-3-h)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Début : d'après la forme réduite, $f(-3+h) = 2 - \dfrac{7}{h}$. **Ensuite :** fais de même avec $-h$.

4. — 1,25 pts

Calculer $f(-2)$ et $f(4)$. En déduire, à l'aide de la question 3, $f(-4)$ et $f(-10)$. Dans le repère, tracer en pointillés les droites d'équations $x=-3$ et $y=2$, placer ces quatre points, puis tracer $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la question 3 donne $f(-3-h) = 4 - f(-3+h)$. **Point délicat :** pour $x > -3$, $\dfrac{7}{x+3} > 0$, donc $f(x) < 2$; pour $x < -3$, $f(x) > 2$.

5. — 1 pts

Vérifier que, pour $x \neq -3$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à $x^2 + x + 1 = 0$. Écrire x^2+x+1 sous forme canonique. En déduire que $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y=x$ n'ont aucun point commun.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par $x+3$, qui n'est pas nul. **Outil :** la forme canonique, avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 5 pts

La nacelle d'une grande roue

Une grande roue fait un tour complet en 12 minutes. La hauteur, en mètres, d'une nacelle à l'instant t, en minutes, est donnée par

$$H(t) = 10 - 8\cos\frac{\pi t}{6}, \quad t \geq 0.$$

1. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout $t \geq 0$, $H(t+12) = H(t)$. Interpréter ce résultat, puis calculer $H(0)$.

INDICE

Début : calcule $\dfrac{\pi(t+12)}{6}$. **Outil :** la périodicité du cosinus.

2. 1 pts

Calculer $H(t)$ pour $t = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ et 12.

INDICE

Début : les valeurs de $\dfrac{\pi t}{6}$ sont $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, π, $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{3}$ et 2π. **Outil :** les valeurs remarquables et les angles associés.

3. a) 0,75 pts

Soit t_1 et t_2 deux réels tels que $0 \leq t_1 < t_2 \leq 6$. Encadrer $\dfrac{\pi t_1}{6}$ et $\dfrac{\pi t_2}{6}$, puis comparer leurs cosinus. En déduire que H est strictement croissante sur $[0, 6]$.

INDICE

Début : multiplie l'inégalité $0 \leq t_1 < t_2 \leq 6$ par $\dfrac{\pi}{6}$, qui est positif. **Outil :** le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$.

3. b) 0,75 pts

Vérifier que $H(12 - t) = H(t)$ pour tout t de $[0, 12]$. En déduire que H est strictement décroissante sur $[6, 12]$, puis la hauteur maximale de la nacelle.

INDICE

Outil : $\cos(2\pi - x) = \cos(-x)$ par périodicité, puis la parité du cosinus. **Début :** si $6 \leq t_1 < t_2 \leq 12$, alors $0 \leq 12 - t_2 < 12 - t_1 \leq 6$.

4. 0,75 pts

La vue est dégagée lorsque la nacelle est à au moins 14 m de hauteur. En déduire, à l'aide des questions 2 et 3, les instants de $[0, 12]$ où la vue est dégagée.

INDICE

Outil : $H(4) = H(8) = 14$. **Point délicat :** raisonne séparément sur $[0, 6]$ et sur $[6, 12]$.

5. 1 pts

On cherche les instants de $[0, 12]$ où la nacelle est à 16 m.

a) Tracer la courbe de H sur $[0, 12]$ et la droite d'équation $y = 16$, avec une calculatrice en mode radians ou un logiciel. Lire deux valeurs approchées de ces instants.

b) Calculer $H(4{,}6)$ et $H(4{,}7)$ à $0{,}01$ près. En déduire un encadrement d'amplitude $0{,}1$ de chaque instant.

INDICE

Pour a) : une valeur lue s'écrit avec $\approx$. **Pour b) :** un changement de signe de $H(t) - 16$ sur $[0, 6]$, où H est strictement croissante ; puis la symétrie de la question 3. b).

Exercice 4 5 pts

Le coût moyen d'un atelier

Un atelier fabrique chaque jour x centaines d'objets, avec $x > 0$. Le coût total de fabrication, en milliers de dirhams, est $C(x) = 2x^2 + 18$, dont 18 milliers de dirhams de frais fixes. Le coût moyen par centaine d'objets est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $M(x) = 2x + \dfrac{18}{x}$. Calculer ensuite $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$, $M(4{,}5)$ et $M(6)$.

INDICE

Début : divise chaque terme de $2x^2 + 18$ par x. **Point délicat :** $\dfrac{18}{4{,}5} = 4$.

2. 1 pts

On note p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $p(x) = \dfrac{18}{x}$: c'est la part des frais fixes dans le coût moyen.

a) Donner le sens de variation de p sur $]0, +\infty[$ et celui de $x \mapsto 2x$.

b) Dans un repère, tracer la courbe de p pour x compris entre 1 et 9, à l'aide des valeurs $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(6)$ et $p(9)$, puis la droite d'équation $y = 2x$. Lire l'abscisse de leur point commun, puis la retrouver par le calcul.

INDICE

Outil : les variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ selon le signe de a ; une fonction linéaire de coefficient positif. **Pour le calcul :** pour $x > 0$, $2x = \dfrac{18}{x}$ équivaut à $x^2 = 9$.

3. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $M(x) - 12 = \dfrac{2(x-3)^2}{x}$. En déduire le coût moyen minimal et la production qui le donne.

INDICE

Début : réduis $2x + \dfrac{18}{x} - 12$ au même dénominateur x. **Outil :** un carré est positif ou nul, et ici $x > 0$.

4. 1,25 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $0 < x_1 < x_2$.

a) Vérifier que $M(x_2) - M(x_1) = \dfrac{2(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 9)}{x_1 x_2}$.

b) En déduire que M est strictement décroissante sur $]0, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

INDICE

Pour a) : écris $M(x_2) - M(x_1) = 2(x_2 - x_1) + 18\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right)$, puis réduis au même dénominateur $x_1 x_2$. **Pour b) :** seul le signe de $x_1 x_2 - 9$ change ; compare $x_1 x_2$ à 9 dans chaque cas.

5. 1 pts

L'atelier veut un coût moyen inférieur ou égal à 13 milliers de dirhams par centaine d'objets. Vérifier que, pour $x > 0$, $M(x) \leq 13$ équivaut à $2x^2 - 13x + 18 \leq 0$, puis que $2x^2 - 13x + 18 = (2x - 9)(x - 2)$. En déduire les productions qui conviennent, et contrôler avec les questions 1 et 4.

INDICE

Début : multiplie les deux membres de $M(x) \leq 13$ par x, qui est strictement positif : le sens de l'inégalité ne change pas. **Outil :** un tableau de signes des facteurs $2x - 9$ et $x - 2$.

Exercice 5 — 5 pts

Une fonction périodique faite d'arcs de parabole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 4, telle que $f(x) = x^2 - 4x$ pour tout x de $[0, 4]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. — 0,75 pts

Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$. En déduire $f(5)$, $f(6)$, $f(-1)$ et $f(14)$.

INDICE

Outil : pour tout réel x, $f(x+4) = f(x)$ et $f(x-4) = f(x)$; $4n$ est aussi une période pour tout entier naturel n non nul. **Début :** $5 = 1 + 4$, $-1 = 3 - 4$ et $14 = 2 + 3 \times 4$.

2. — 1 pts

Écrire $x^2 - 4x$ sous forme canonique. En déduire le sens de variation de f sur $[0, 2]$ et sur $[2, 4]$, puis son minimum et son maximum sur $[0, 4]$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, puis la propriété des variations d'un trinôme. **Point délicat :** les variations ne valent que sur $[0, 4]$, où $f(x) = x^2 - 4x$.

3. — 1 pts

Soit x un réel de $[4, 8]$. Justifier que $f(x) = f(x - 4)$ avec $x - 4$ dans $[0, 4]$, puis que $f(x) = (x - 6)^2 - 4$. En déduire le sens de variation de f sur $[4, 6]$ et sur $[6, 8]$, et dresser le tableau de variations de f sur $[0, 8]$.

INDICE

Début : si $4 \leq x \leq 8$, alors $0 \leq x - 4 \leq 4$. **Ensuite :** remplace x par $x - 4$ dans $(x - 2)^2 - 4$.

4. — 1,25 pts

a) Soit x un réel de $[0, 4]$. Calculer $f(-x)$ en remarquant que $-x + 4$ est dans $[0, 4]$. En déduire que $f(-x) = f(x)$ pour tout x de $[-4, 4]$.

b) Dans le repère, placer les points d'abscisses entières de -4 à 8, puis tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-4, 8]$.

INDICE

Pour a) : $f(-x) = f(-x + 4)$ par la période, puis développe $(4 - x)^2 - 4(4 - x)$. Pour x de $[-4, 0]$, applique le résultat à $-x$, qui est dans $[0, 4]$. **Pour b) :** l'arc tracé sur $[0, 4]$ se reproduit sur chaque intervalle de longueur 4.

5. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = -3$ sur $[0, 4]$. En déduire, sans nouveau calcul, ses solutions sur $[-4, 8]$, puis contrôler sur la figure.

INDICE

Début : sur $[0, 4]$, $f(x) = -3$ équivaut à $(x - 2)^2 - 4 = -3$. **Ensuite :** ajoute ou retranche la période 4 aux solutions trouvées, sans sortir de $[-4, 8]$.