BURHAN

Fonctions de référence : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions de référence	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Une parabole et une droite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.

1. 1 pts

Calculer α et β, puis écrire $f(x)$ sous forme canonique. Vérifier en développant.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. **Point délicat :** ici $a = -1$.

CORRIGÉ

Calcul de α et β. On lit $a = -1$ et $b = 4$. Donc $\alpha = -\dfrac{4}{2 \times (-1)} = 2$ et :

$$\begin{aligned} \beta = f(2) &= -4 + 8 + 5 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Forme canonique. D'après la propriété de la forme canonique, pour tout réel x, $f(x) = -(x-2)^2 + 9$.

Vérification. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &-(x-2)^2 + 9 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 9 \\ &= -x^2 + 4x + 5. \end{aligned}$$

Conclusion. $\alpha = 2$, $\beta = 9$, et pour tout réel x, $f(x) = -(x-2)^2 + 9$.

2. 0,75 pts

Donner le sens de variation de f, son extremum, puis le sommet et l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'un trinôme, selon le signe de a.

CORRIGÉ

Variations. Le coefficient $a = -1$ est négatif. D'après la propriété des variations d'un trinôme, f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Elle admet donc un maximum égal à 9, atteint en 2.

Courbe. La parabole $\mathcal{C}_f$ est tournée vers le bas ; son sommet est le point de coordonnées (α, β).

Conclusion. Le maximum de f vaut 9, atteint en 2 ; $\mathcal{C}_f$ a pour sommet $S(2, 9)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 2$.

3. 0,75 pts

À l'aide de la forme canonique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Contrôler que les deux solutions sont symétriques par rapport à 2.

INDICE

Début : $f(x) = 0$ équivaut à $(x-2)^2 = 9$. **Ensuite :** un carré égal à 9 vient de 3 ou de -3.

CORRIGÉ

Résolution. D'après la forme canonique, $f(x) = 0$ équivaut à $(x-2)^2 = 9$. Les seuls réels de carré 9 sont 3 et -3, donc l'équation équivaut à :

$$x - 2 = 3$$
$$\text{ou } x - 2 = -3.$$

Les solutions sont $x = 5$ et $x = -1$.

Contrôle. Le milieu de -1 et 5 est $\dfrac{-1+5}{2} = 2$: les deux solutions sont symétriques par rapport à 2, comme l'annonce l'axe d'équation $x = 2$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions -1 et 5 ; la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $(-1, 0)$ et $(5, 0)$.

4. 1 pts

Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis en déduire $f(3)$ et $f(4)$ sans calcul. Dans le repère, placer ces points, le sommet et les points de la question 3, puis tracer $\mathcal{C}_f$ pour x compris entre -1 et 5. Tracer aussi la droite $\mathcal{D}$.

INDICE

Outil : l'axe de symétrie : $f(2+h) = f(2-h)$. **Début :** $3 = 2+1$ et $1 = 2-1$; $4 = 2+2$ et $0 = 2-2$.

CORRIGÉ

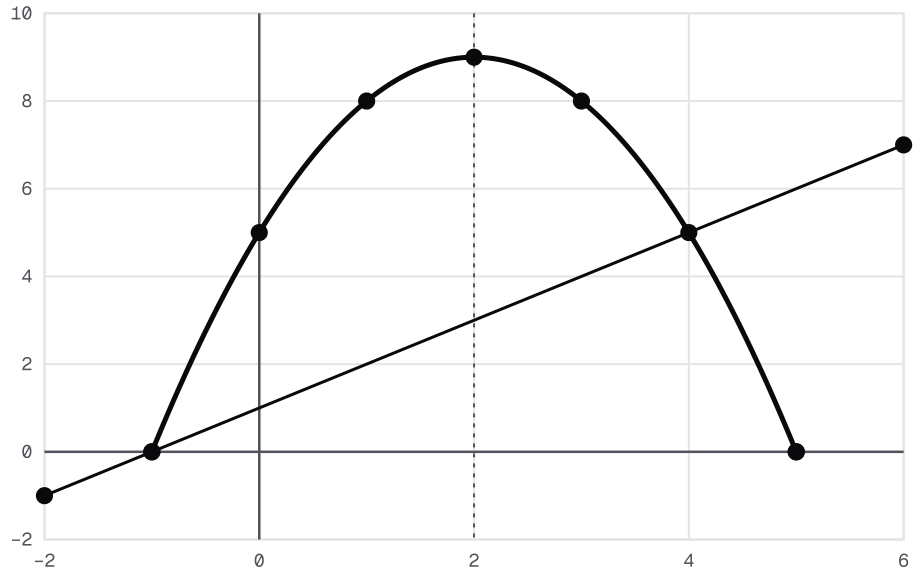
Valeurs. $f(0) = 5$ et $f(1) = -1 + 4 + 5 = 8$.

Par l'axe de symétrie. D'après la propriété de l'axe de symétrie, $f(2+h) = f(2-h)$ pour tout réel h. Avec $h = 1$ puis $h = 2$, on obtient $f(3) = f(1) = 8$ et $f(4) = f(0) = 5$.

Tracé de $\mathcal{C}_f$. On place $(-1, 0)$, $(0, 5)$, $(1, 8)$, le sommet $S(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 5)$ et $(5, 0)$, puis on les joint par une courbe régulière tournée vers le bas, symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$.

Tracé de $\mathcal{D}$. Pour $x = 0$, $y = 1$; pour $x = 4$, $y = 5$. La droite $\mathcal{D}$ passe donc par $(0, 1)$ et par $(4, 5)$.

Conclusion. La parabole et la droite sont tracées dans le même repère ; on remarque que les points $(-1, 0)$ et $(4, 5)$ sont sur les deux courbes.



La parabole de f(x) = −x² + 4x + 5 tracée de −1 à 5 avec son sommet S(2, 9), et la droite D d'équation y = x + 1.

5. `0,75 pts`

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) - (x+1) = -(x+1)(x-4)$. En déduire les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : calcule $f(x) - (x+1)$, puis développe $-(x+1)(x-4)$. **Outil :** un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

CORRIGÉ

Vérification. Soit x un réel. D'une part :

$$\begin{aligned} & f(x) - (x+1) \\ &= -x^2 + 4x + 5 - x - 1 \\ &= -x^2 + 3x + 4. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & -(x+1)(x-4) \\ &= -(x^2 - 3x - 4) \\ &= -x^2 + 3x + 4. \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales.

Points communs. L'équation $f(x) = x + 1$ équivaut à $(x+1)(x-4) = 0$. D'après la règle du produit nul, elle équivaut à $x = -1$ ou $x = 4$. Les ordonnées sont $f(-1) = 0$ et $f(4) = 5$.

Conclusion. Les points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ sont $(-1, 0)$ et $(4, 5)$.

6. 0,75 pts

Étudier le signe de $-(x+1)(x-4)$ selon les valeurs de x. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq x+1$, puis contrôler sur la figure.

INDICE

Outil : un tableau de signes des facteurs $x+1$ et $x-4$. **Point délicat :** n'oublie pas le signe moins devant le produit, et l'inégalité est large.

CORRIGÉ

Signe du produit. Le facteur $x+1$ s'annule en -1, le facteur $x-4$ en 4. D'après le tableau de signes :

- pour $x < -1$ et pour $x > 4$, les deux facteurs ont le même signe : $(x+1)(x-4) > 0$;
- pour $-1 < x < 4$, ils sont de signes contraires : $(x+1)(x-4) < 0$;
- le produit est nul en -1 et en 4.

Avec le signe moins. D'après la question 5, $f(x) - (x+1) = -(x+1)(x-4)$: cette différence est positive ou nulle exactement lorsque $-1 \leq x \leq 4$.

Solutions. L'inégalité est large, donc -1 et 4 conviennent. L'ensemble des solutions de $f(x) \geq x+1$ est $[-1, 4]$.

Contrôle. Sur la figure, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ entre les points $(-1, 0)$ et $(4, 5)$, et la coupe en ces deux points.

Conclusion. L'inéquation $f(x) \geq x+1$ a pour ensemble de solutions $[-1, 4]$.

Exercice 2 5 pts

Une hyperbole et la droite d'équation y = x

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 1,25 pts

Déterminer D_f et vérifier que f est une fonction homographique. Écrire ensuite sa forme réduite, puis la vérifier en réduisant au même dénominateur.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$, $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$. **Début :** ici $a=2, b=-1, c=1, d=3$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le dénominateur $x+3$ s'annule seulement pour $x=-3$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Fonction homographique. On lit $a=2, b=-1, c=1$ et $d=3$. On a $c \neq 0$ et $ad-bc = 6+1 = 7 \neq 0$.

Forme réduite. On obtient $\alpha = -3$, $\beta = 2$ et $k = \dfrac{-1-6}{1} = -7$. Pour tout réel $x \neq -3$, $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$.

Vérification. Pour tout réel $x \neq -3$:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{7}{x+3} &= \frac{2(x+3)-7}{x+3} \\ &= \frac{2x-1}{x+3}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est homographique sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, de forme réduite $2 - \dfrac{7}{x+3}$.

2. 0,75 pts

En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations. Donner le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'une fonction homographique ; le signe de k décide. **Point délicat :** la double barre en -3.

CORRIGÉ

Variations. D'après la question 1, $k=-7$, négatif. D'après la propriété des variations d'une fonction homographique, f est strictement croissante sur $]-\infty,-3[$ et strictement croissante sur $]-3,+\infty[$.

Tableau. Il comporte une double barre sous la valeur interdite -3, et une flèche montante de chaque côté.

Axe des abscisses. L'équation $f(x)=0$ équivaut à $2x-1=0$, soit $x=\dfrac{1}{2}$, qui est bien dans D_f.

Conclusion. f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles de D_f, et $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

3. 0,75 pts

Pour tout réel h non nul, calculer $f(-3+h)+f(-3-h)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

INDICE

Début : d'après la forme réduite, $f(-3+h)=2-\dfrac{7}{h}$. **Ensuite :** fais de même avec $-h$.

CORRIGÉ

Soit h un réel non nul : les réels $-3+h$ et $-3-h$ sont dans D_f.

Calcul. D'après la forme réduite :

- $f(-3+h)=2-\dfrac{7}{h}$;
- $f(-3-h)=2-\dfrac{7}{-h}=2+\dfrac{7}{h}$.

En ajoutant, $f(-3+h)+f(-3-h)=4$.

Conséquence. Les points d'abscisses $-3+h$ et $-3-h$ ont pour milieu le point d'abscisse -3 et d'ordonnée $\dfrac{4}{2}=2$, quel que soit h. D'après la propriété du centre de symétrie, ce point fixe est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Conclusion. Pour tout réel h non nul, $f(-3+h)+f(-3-h)=4$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Omega(-3,2)$.

4. 1,25 pts

Calculer $f(-2)$ et $f(4)$. En déduire, à l'aide de la question 3, $f(-4)$ et $f(-10)$. Dans le repère, tracer en pointillés les droites d'équations $x=-3$ et $y=2$, placer ces quatre points, puis tracer $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : la question 3 donne $f(-3-h)=4-f(-3+h)$. **Point délicat :** pour $x>-3$, $\dfrac{7}{x+3}>0$, donc $f(x)<2$; pour $x<-3$, $f(x)>2$.

CORRIGÉ

Images. $f(-2)=\dfrac{-5}{1}=-5$ et $f(4)=\dfrac{7}{7}=1$.

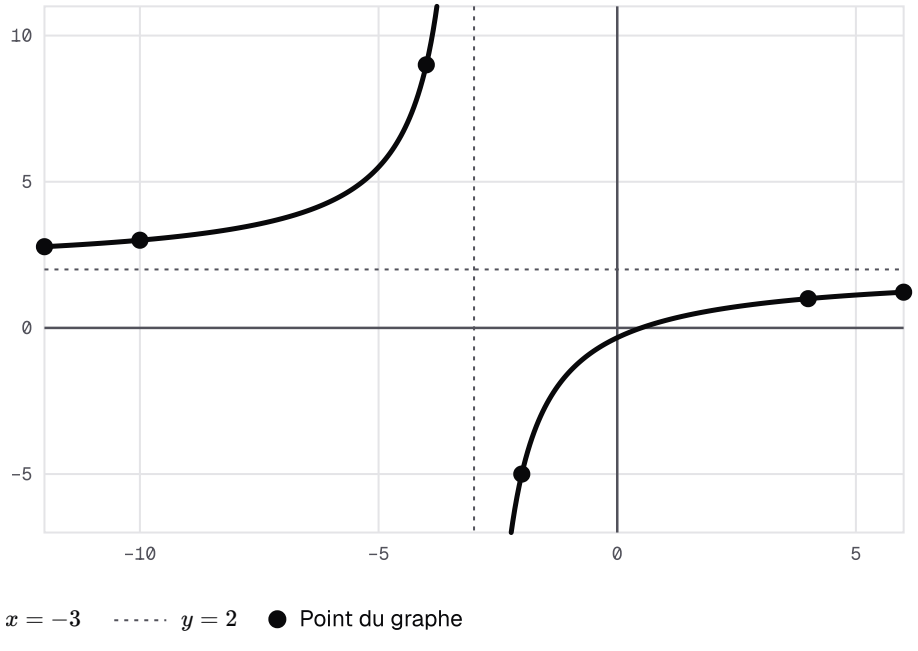
Par la question 3. Elle donne $f(-3-h)=4-f(-3+h)$. Avec $h=1$, puis avec $h=7$:

- $f(-4)=4-f(-2)=9$;
- $f(-10)=4-f(4)=3$.

Branche de droite, pour $x>-3$. Ici $\dfrac{7}{x+3}>0$, donc $f(x)<2$. La branche monte en passant par $(-2,-5)$, $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ et $(4,1)$, au-dessous de la droite d'équation $y=2$.

Branche de gauche, pour $x<-3$. Ici $f(x)>2$. La branche monte aussi, en passant par $(-10,3)$ et $(-4,9)$, au-dessus de cette droite.

Conclusion. Les deux branches de $\mathcal{C}_f$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à $\Omega(-3,2)$.



La courbe de f(x) = (2x − 1)/(x + 3), de centre Ω(−3, 2), et les quatre points d'abscisses −10, −4, −2 et 4.

5. 1 pts

Vérifier que, pour $x \neq -3$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à $x^2 + x + 1 = 0$. Écrire $x^2 + x + 1$ sous forme canonique. En déduire que $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ n'ont aucun point commun.

INDICE

Début : multiplie les deux membres par $x + 3$, qui n'est pas nul. **Outil :** la forme canonique, avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Équation. Soit $x \neq -3$. Le réel $x + 3$ n'est pas nul : on peut multiplier les deux membres par $x + 3$ sans changer les solutions. L'équation $f(x) = x$ équivaut donc à :

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x(x + 3) \\ 0 &= x^2 + 3x - 2x + 1 \\ 0 &= x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Forme canonique. On trouve $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & x^2 + x + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Signe. Un carré est positif ou nul, donc, pour tout réel x, $x^2 + x + 1 \geq \dfrac{3}{4} > 0$. L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a aucune solution, et $f(x) = x$ non plus.

Conclusion. La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ n'ont aucun point commun.

Exercice 3 5 pts

La nacelle d'une grande roue

Une grande roue fait un tour complet en 12 minutes. La hauteur, en mètres, d'une nacelle à l'instant t, en minutes, est donnée par

$$H(t) = 10 - 8\cos\frac{\pi t}{6}, \quad t \geq 0.$$

1. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout $t \geq 0$, $H(t+12) = H(t)$. Interpréter ce résultat, puis calculer $H(0)$.

INDICE

Début : calcule $\dfrac{\pi(t+12)}{6}$. **Outil :** la périodicité du cosinus.

CORRIGÉ

Répétition. Soit $t \geq 0$. On a $\dfrac{\pi(t+12)}{6} = \dfrac{\pi t}{6} + 2\pi$. D'après la périodicité du cosinus :

$$\begin{aligned} &H(t+12)\\ &= 10 - 8\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 2\pi\right)\\ &= 10 - 8\cos\frac{\pi t}{6}\\ &= H(t). \end{aligned}$$

Interprétation. Toutes les 12 minutes, c'est-à-dire à chaque tour, la nacelle repasse à la même hauteur.

Départ. $H(0) = 10 - 8\cos 0 = 10 - 8 = 2$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$, $H(t+12) = H(t)$, et la nacelle part d'une hauteur de 2 m.

2. 1 pts

Calculer $H(t)$ pour $t = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$ et 12.

INDICE

Début : les valeurs de $\dfrac{\pi t}{6}$ sont $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}$ et 2π. **Outil :** les valeurs remarquables et les angles associés.

CORRIGÉ

Cosinus. D'après les valeurs remarquables et les angles associés, les cosinus de $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{3}$ et 2π valent, dans cet ordre, $\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{2}, -1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}$ et 1.

Hauteurs. On remplace dans $10 - 8\cos\dfrac{\pi t}{6}$:

- $H(2) = 6$, $H(3) = 10$, $H(4) = 14$, $H(6) = 18$;
- $H(8) = 14$, $H(9) = 10$, $H(10) = 6$, $H(12) = 2$.

Conclusion. Sur un tour, les hauteurs calculées passent de 2 m à 18 m, puis reviennent à 2 m ; on note que $H(4) = H(8)$ et $H(2) = H(10)$.

3. a)

0,75 pts

Soit t_1 et t_2 deux réels tels que $0 \leq t_1 < t_2 \leq 6$. Encadrer $\frac{\pi t_1}{6}$ et $\frac{\pi t_2}{6}$, puis comparer leurs cosinus. En déduire que H est strictement croissante sur $[0, 6]$.

INDICE

Début : multiplie l'inégalité $0 \leq t_1 < t_2 \leq 6$ par $\frac{\pi}{6}$, qui est positif. **Outil :** le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$.

CORRIGÉ

Encadrement. On part de $0 \leq t_1 < t_2 \leq 6$ et l'on multiplie par $\frac{\pi}{6}$, qui est positif : le sens des inégalités ne change pas, et $0 \leq \frac{\pi t_1}{6} < \frac{\pi t_2}{6} \leq \pi$.

Cosinus. D'après les variations du cosinus, la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc :

$$\cos \frac{\pi t_1}{6} > \cos \frac{\pi t_2}{6}.$$

Retour à H. On multiplie par -8, qui est négatif : l'inégalité change de sens. On ajoute ensuite 10, ce qui ne la change pas. On obtient $H(t_1) < H(t_2)$.

Conclusion. Pour tous réels $t_1 < t_2$ de $[0, 6]$, $H(t_1) < H(t_2)$: la fonction H est strictement croissante sur $[0, 6]$.

3. b) 0,75 pts

Vérifier que $H(12-t)=H(t)$ pour tout t de $[0,12]$. En déduire que H est strictement décroissante sur $[6,12]$, puis la hauteur maximale de la nacelle.

INDICE

Outil : $\cos(2\pi-x)=\cos(-x)$ par périodicité, puis la parité du cosinus. **Début :** si $6\le t_1<t_2\le 12$, alors $0\le 12-t_2<12-t_1\le 6$.

CORRIGÉ

Symétrie. Soit t un réel de $[0,12]$. On a $\dfrac{\pi(12-t)}{6}=2\pi-\dfrac{\pi t}{6}$. Par périodicité puis par parité du cosinus :

$$\begin{aligned} &H(12-t)\\ &=10-8\cos\left(2\pi-\frac{\pi t}{6}\right)\\ &=10-8\cos\left(-\frac{\pi t}{6}\right)\\ &=10-8\cos\frac{\pi t}{6}\\ &=H(t). \end{aligned}$$

Sur $[6,12]$. Soit $6\le t_1<t_2\le 12$. Alors $0\le 12-t_2<12-t_1\le 6$. Comme H est strictement croissante sur $[0,6]$ (question a), $H(12-t_2)<H(12-t_1)$, c'est-à-dire $H(t_2)<H(t_1)$. Donc H est strictement décroissante sur $[6,12]$.

Maximum. D'après ces variations, $H(t)\le H(6)=18$ pour tout t de $[0,12]$. Plus généralement, pour tout $t\ge 0$, $\cos\dfrac{\pi t}{6}\ge -1$, donc $H(t)\le 10+8=18$.

Conclusion. H est strictement décroissante sur $[6,12]$, et la hauteur maximale de la nacelle est 18 m, atteinte au bout de 6 minutes.

4. 0,75 pts

La vue est dégagée lorsque la nacelle est à au moins 14 m de hauteur. En déduire, à l'aide des questions 2 et 3, les instants de $[0,12]$ où la vue est dégagée.

INDICE

Outil : $H(4)=H(8)=14$. **Point délicat :** raisonne séparément sur $[0,6]$ et sur $[6,12]$.

CORRIGÉ

On résout $H(t)\ge 14$ sur chacun des deux intervalles où le sens de variation est connu.

Sur $[0,6]$. La fonction H y est strictement croissante et $H(4)=14$: $H(t)\ge 14$ équivaut à $t\ge 4$. On garde $[4,6]$.

Sur $[6,12]$. La fonction H y est strictement décroissante et $H(8)=14$: $H(t)\ge 14$ équivaut à $t\le 8$. On garde $[6,8]$.

Conclusion. Sur un tour, la vue est dégagée pour $t\in[4,8]$, soit pendant 4 minutes.

5. 1 pts

On cherche les instants de $[0, 12]$ où la nacelle est à 16 m.

a) Tracer la courbe de H sur $[0, 12]$ et la droite d'équation $y = 16$, avec une calculatrice en mode radians ou un logiciel. Lire deux valeurs approchées de ces instants.

b) Calculer $H(4{,}6)$ et $H(4{,}7)$ à $0{,}01$ près. En déduire un encadrement d'amplitude $0{,}1$ de chaque instant.

INDICE

Pour a) : une valeur lue s'écrit avec $\approx$. **Pour b) :** un changement de signe de $H(t) - 16$ sur $[0, 6]$, où H est strictement croissante ; puis la symétrie de la question 3. b).

CORRIGÉ

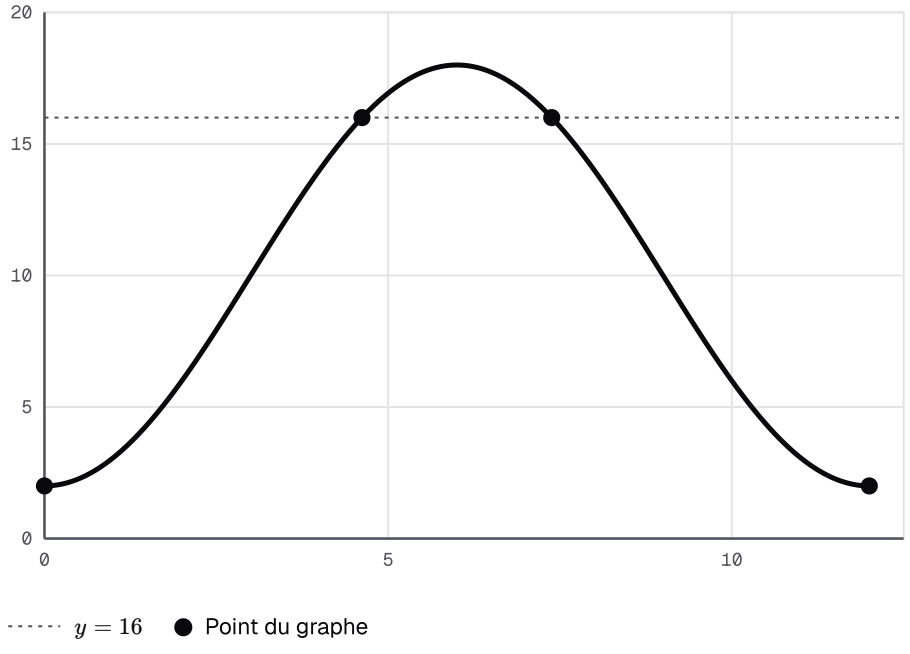
a) Lecture. Sur la figure, la courbe de H coupe la droite d'équation $y = 16$ en deux points, d'abscisses $t \approx 4{,}6$ et $t \approx 7{,}4$.

b) Premier instant. À la calculatrice, $H(4{,}6) \approx 15{,}95$, inférieur à 16, et $H(4{,}7) \approx 16{,}22$, supérieur à 16. Comme H est strictement croissante sur $[0, 6]$, elle ne prend qu'une fois la valeur 16 sur cet intervalle, entre $4{,}6$ et $4{,}7$.

b) Second instant. D'après la question 3. b), $H(12 - t) = H(t)$: si t est le premier instant, $12 - t$ est le second. De $4{,}6 < t < 4{,}7$, on tire :

$$7{,}3 < 12 - t < 7{,}4.$$

Conclusion. La nacelle est à 16 m une première fois entre $4{,}6$ et $4{,}7$ minutes, puis une seconde fois entre $7{,}3$ et $7{,}4$ minutes.



La hauteur H(t) de la nacelle sur un tour de 12 minutes et la droite y = 16 : deux instants, voisins de 4,6 et de 7,4.

Exercice 4 5 pts

Le coût moyen d'un atelier

Un atelier fabrique chaque jour x centaines d'objets, avec $x > 0$. Le coût total de fabrication, en milliers de dirhams, est $C(x) = 2x^2 + 18$, dont 18 milliers de dirhams de frais fixes. Le coût moyen par centaine d'objets est $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $M(x) = 2x + \dfrac{18}{x}$. Calculer ensuite $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$, $M(4{,}5)$ et $M(6)$.

INDICE

Début : divise chaque terme de $2x^2 + 18$ par x. **Point délicat :** $\dfrac{18}{4{,}5} = 4$.

CORRIGÉ

Écriture. Pour tout $x > 0$, on divise chaque terme du numérateur par x :

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{2x^2 + 18}{x} \\ &= \frac{2x^2}{x} + \frac{18}{x} \\ &= 2x + \frac{18}{x}. \end{aligned}$$

Valeurs.

- $M(1) = 2 + 18 = 20$ et $M(2) = 4 + 9 = 13$;
- $M(3) = 6 + 6 = 12$ et $M(4{,}5) = 9 + 4 = 13$;
- $M(6) = 12 + 3 = 15$.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $M(x) = 2x + \dfrac{18}{x}$; parmi ces productions, la plus faible valeur du coût moyen est $M(3) = 12$.

2. 1 pts

On note p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $p(x) = \dfrac{18}{x}$: c'est la part des frais fixes dans le coût moyen.

a) Donner le sens de variation de p sur $]0, +\infty[$ et celui de $x \mapsto 2x$.

b) Dans un repère, tracer la courbe de p pour x compris entre 1 et 9, à l'aide des valeurs $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(6)$ et $p(9)$, puis la droite d'équation $y = 2x$. Lire l'abscisse de leur point commun, puis la retrouver par le calcul.

INDICE

Outil : les variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ selon le signe de a ; une fonction linéaire de coefficient positif. **Pour le calcul :** pour $x > 0$, $2x = \dfrac{18}{x}$ équivaut à $x^2 = 9$.

CORRIGÉ

a) Variations. La fonction p est de la forme $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ avec $a = 18$, positif : d'après la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, p est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto 2x$ est linéaire de coefficient 2, positif : elle est strictement croissante.

b) Tracé. On calcule $p(1) = 18$, $p(2) = 9$, $p(3) = 6$, $p(6) = 3$ et $p(9) = 2$. On place ces points et on les joint par une courbe régulière qui descend. La droite d'équation $y = 2x$ passe par l'origine et par $(3, 6)$.

Point commun. On lit $x \approx 3$. Par le calcul, pour $x > 0$, $2x = \dfrac{18}{x}$ équivaut à $2x^2 = 18$, soit $x^2 = 9$. Comme $x > 0$, on obtient $x = 3$, et $p(3) = 6$.

Conclusion. Les deux courbes se coupent au point $(3, 6)$: pour 3 centaines d'objets, la part des frais fixes et la part $2x$ du coût moyen sont égales.

3. 1 pts

Vérifier que, pour tout $x > 0$, $M(x) - 12 = \dfrac{2(x-3)^2}{x}$. En déduire le coût moyen minimal et la production qui le donne.

INDICE

Début : réduis $2x + \dfrac{18}{x} - 12$ au même dénominateur x. **Outil :** un carré est positif ou nul, et ici $x > 0$.

CORRIGÉ

Vérification. Soit $x > 0$. On réduit au même dénominateur x, puis on reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned} M(x) - 12 &= \frac{2x^2 - 12x + 18}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 6x + 9)}{x} \\ &= \frac{2(x-3)^2}{x}. \end{aligned}$$

Minimum. Pour $x > 0$, le numérateur $2(x-3)^2$ est positif ou nul et le dénominateur x est positif. Donc $M(x) - 12 \geq 0$, c'est-à-dire $M(x) \geq 12$, avec égalité seulement pour $x = 3$.

Conclusion. Le coût moyen minimal est de 12 milliers de dirhams par centaine d'objets, obtenu pour une production de 3 centaines d'objets, abscisse du point commun de la question 2.

4. 1,25 pts

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $0 < x_1 < x_2$.

a) Vérifier que $M(x_2) - M(x_1) = \dfrac{2(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 9)}{x_1x_2}$.

b) En déduire que M est strictement décroissante sur $]0, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

INDICE

Pour a) : écris $M(x_2) - M(x_1) = 2(x_2 - x_1) + 18\left(\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}\right)$, puis réduis au même dénominateur x_1x_2. **Pour b) :** seul le signe de $x_1x_2 - 9$ change ; compare x_1x_2 à 9 dans chaque cas.

CORRIGÉ

a) Calcul. On a $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2}$. Donc :

$$\begin{aligned} &M(x_2) - M(x_1) \\ &= 2(x_2 - x_1) - \frac{18(x_2 - x_1)}{x_1x_2} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(2x_1x_2 - 18)}{x_1x_2} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 9)}{x_1x_2}. \end{aligned}$$

Signes connus. On a $x_2 - x_1 > 0$ et $x_1x_2 > 0$: la différence $M(x_2) - M(x_1)$ a le signe de $x_1x_2 - 9$.

b) Sur $]0, 3]$**.** Supposons $0 < x_1 < x_2 \leq 3$. On multiplie $x_1 < 3$ par x_2, positif, puis $x_2 \leq 3$ par 3 : on obtient $x_1x_2 < 3x_2 \leq 9$. Donc $M(x_2) - M(x_1) < 0$.

b) Sur $[3, +\infty[$**.** Supposons $3 \leq x_1 < x_2$, d'où $x_2 > 3$. On multiplie $x_2 > 3$ par x_1, positif, puis $x_1 \geq 3$ par 3 : on obtient $x_1x_2 > 3x_1 \geq 9$. Donc $M(x_2) - M(x_1) > 0$.

Conclusion. La fonction M est strictement décroissante sur $]0, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

5. 1 pts

L'atelier veut un coût moyen inférieur ou égal à 13 milliers de dirhams par centaine d'objets. Vérifier que, pour $x > 0$, $M(x) \leq 13$ équivaut à $2x^2 - 13x + 18 \leq 0$, puis que $2x^2 - 13x + 18 = (2x - 9)(x - 2)$. En déduire les productions qui conviennent, et contrôler avec les questions 1 et 4.

INDICE

Début : multiplie les deux membres de $M(x) \leq 13$ par x, qui est strictement positif : le sens de l'inégalité ne change pas. **Outil :** un tableau de signes des facteurs $2x - 9$ et $x - 2$.

CORRIGÉ

Équivalence. Soit $x > 0$. On multiplie les deux membres de $M(x) \leq 13$ par x, qui est positif : le sens de l'inégalité est conservé. L'inéquation équivaut à $2x^2 + 18 \leq 13x$, soit $2x^2 - 13x + 18 \leq 0$.

Factorisation. En développant :

$$\begin{aligned}&(2x - 9)(x - 2)\\ &= 2x^2 - 4x - 9x + 18\\ &= 2x^2 - 13x + 18.\end{aligned}$$

Signe. Le facteur $x - 2$ s'annule en 2 et le facteur $2x - 9$ en $\dfrac{9}{2} = 4{,}5$. D'après le tableau de signes, le produit est négatif ou nul si et seulement si $2 \leq x \leq 4{,}5$, et tous ces réels sont positifs.

Contrôle. $M(2) = M(4{,}5) = 13$ (question 1) ; d'après la question 4, M décroît sur $[2, 3]$ jusqu'à 12 puis croît sur $[3, 4{,}5]$: elle reste inférieure ou égale à 13 sur cet intervalle.

Conclusion. Les productions qui conviennent sont celles de $[2, 4{,}5]$ centaines, soit entre 200 et 450 objets par jour.

Exercice 5 5 pts

Une fonction périodique faite d'arcs de parabole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 4, telle que $f(x) = x^2 - 4x$ pour tout x de $[0, 4]$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. 0,75 pts

Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$. En déduire $f(5)$, $f(6)$, $f(-1)$ et $f(14)$.

INDICE

Outil : pour tout réel x, $f(x+4) = f(x)$ et $f(x-4) = f(x)$; $4n$ est aussi une période pour tout entier naturel n non nul. **Début :** $5 = 1 + 4$, $-1 = 3 - 4$ et $14 = 2 + 3 \times 4$.

CORRIGÉ

Sur $[0, 4]$. On utilise $f(x) = x^2 - 4x$:

- $f(0) = 0$ et $f(4) = 16 - 16 = 0$;
- $f(1) = 1 - 4 = -3$ et $f(3) = 9 - 12 = -3$;
- $f(2) = 4 - 8 = -4$.

Par la période. On se ramène à $[0, 4]$ en ajoutant ou en retranchant un multiple de 4 :

- $f(5) = f(1 + 4) = f(1) = -3$;
- $f(6) = f(2 + 4) = f(2) = -4$;
- $f(-1) = f(3 - 4) = f(3) = -3$;
- $f(14) = f(2 + 3 \times 4) = f(2) = -4$.

Conclusion. $f(5) = f(-1) = -3$ et $f(6) = f(14) = -4$.

2. 1 pts

Écrire $x^2 - 4x$ sous forme canonique. En déduire le sens de variation de f sur $[0, 2]$ et sur $[2, 4]$, puis son minimum et son maximum sur $[0, 4]$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, puis la propriété des variations d'un trinôme. **Point délicat :** les variations ne valent que sur $[0, 4]$, où $f(x) = x^2 - 4x$.

CORRIGÉ

Forme canonique. Avec $a = 1$ et $b = -4$, on trouve $\alpha = -\dfrac{-4}{2} = 2$ et $\beta = 4 - 8 = -4$. Pour tout réel x, $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$.

Variations. Sur $[0, 4]$, $f(x) = x^2 - 4x$. Le coefficient $a = 1$ est positif : d'après la propriété des variations d'un trinôme, f est strictement décroissante sur $[0, 2]$ et strictement croissante sur $[2, 4]$.

Extremums. Le minimum sur $[0, 4]$ est $f(2) = -4$. Le maximum est atteint aux bornes : $f(0) = f(4) = 0$.

Conclusion. Sur $[0, 4]$, f a pour minimum -4, atteint en 2, et pour maximum 0, atteint en 0 et en 4.

3. 1 pts

Soit x un réel de $[4, 8]$. Justifier que $f(x) = f(x-4)$ avec $x-4$ dans $[0, 4]$, puis que $f(x) = (x-6)^2 - 4$. En déduire le sens de variation de f sur $[4, 6]$ et sur $[6, 8]$, et dresser le tableau de variations de f sur $[0, 8]$.

INDICE

Début : si $4 \leq x \leq 8$, alors $0 \leq x-4 \leq 4$. **Ensuite :** remplace x par $x-4$ dans $(x-2)^2 - 4$.

CORRIGÉ

Expression. Soit x un réel de $[4, 8]$. Alors $0 \leq x-4 \leq 4$, et par la période 4, $f(x) = f(x-4)$. On applique la forme canonique de la question 2 au réel $x-4$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-4) \\ &= (x-4-2)^2 - 4 \\ &= (x-6)^2 - 4. \end{aligned}$$

Variations sur $[4, 8]$. C'est un trinôme de coefficient $a = 1$, positif, avec $\alpha = 6$: f est strictement décroissante sur $[4, 6]$ et strictement croissante sur $[6, 8]$, avec $f(6) = -4$ et $f(4) = f(8) = 0$.

Tableau sur $[0, 8]$.

- sur $[0, 2]$, f décroît de 0 à -4 ;
- sur $[2, 4]$, f croît de -4 à 0 ;
- sur $[4, 6]$, f décroît de 0 à -4 ;
- sur $[6, 8]$, f croît de -4 à 0.

Conclusion. Pour tout x de $[4, 8]$, $f(x) = (x-6)^2 - 4$; le motif de variations de $[0, 4]$ se répète sur $[4, 8]$.

4. 1,25 pts

a) Soit x un réel de $[0, 4]$. Calculer $f(-x)$ en remarquant que $-x + 4$ est dans $[0, 4]$. En déduire que $f(-x) = f(x)$ pour tout x de $[-4, 4]$.

b) Dans le repère, placer les points d'abscisses entières de -4 à 8, puis tracer $\mathcal{C}_f$ sur $[-4, 8]$.

INDICE

Pour a) : $f(-x) = f(-x + 4)$ par la période, puis développe $(4 - x)^2 - 4(4 - x)$. Pour x de $[-4, 0]$, applique le résultat à $-x$, qui est dans $[0, 4]$. **Pour b) :** l'arc tracé sur $[0, 4]$ se reproduit sur chaque intervalle de longueur 4.

CORRIGÉ

a) Pour x dans $[0, 4]$. On a $0 \leq 4 - x \leq 4$. Par la période, $f(-x) = f(4 - x)$, puis on utilise l'expression de f sur $[0, 4]$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (4 - x)^2 - 4(4 - x) \\ &= 16 - 8x + x^2 \\ &\quad - 16 + 4x \\ &= x^2 - 4x = f(x). \end{aligned}$$

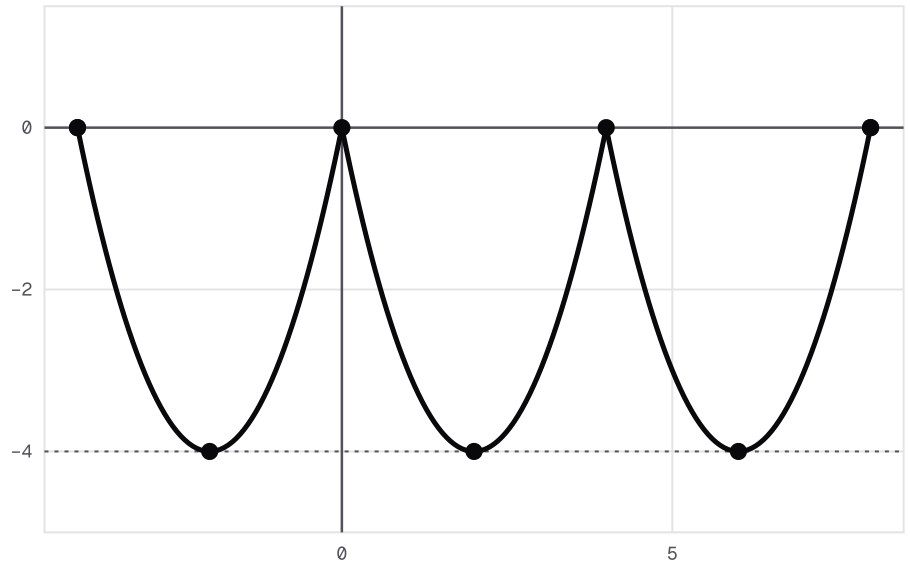
a) Pour x dans $[-4, 0]$. Le réel $-x$ est dans $[0, 4]$; d'après ce qui précède, appliqué à $-x$, $f(x) = f(-(-x)) = f(-x)$.

Ainsi $f(-x) = f(x)$ pour tout x de $[-4, 4]$: sur cet intervalle, $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Points. Aux abscisses entières de -4 à 8 : $(-4, 0)$, $(-3, -3)$, $(-2, -4)$, $(-1, -3)$, $(0, 0)$, $(1, -3)$, $(2, -4)$, $(3, -3)$, $(4, 0)$, $(5, -3)$, $(6, -4)$, $(7, -3)$ et $(8, 0)$.

b) Tracé. Sur $[0, 4]$, on trace un arc de parabole tourné vers le haut, de sommet $(2, -4)$; le même arc se répète sur $[4, 8]$ et sur $[-4, 0]$.

Conclusion. La courbe $\mathcal{C}_f$ est faite d'arcs identiques, compris entre les droites d'équations $y = -4$ et $y = 0$, et symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sur $[-4, 4]$.



$\mathcal{C}_f$ ● Point du graphe

La courbe de f sur [−4, 8] : l'arc de parabole de [0, 4] répété de 4 en 4, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées sur [−4, 4].

Ruptures du tracé près de x ≈ 0, x ≈ 4, x ≈ 8 : l'appartenance des extrémités n'a pas pu être établie ; aucune n'est marquée.

5. 1 pts

Résoudre l'équation $f(x) = -3$ sur $[0, 4]$. En déduire, sans nouveau calcul, ses solutions sur $[-4, 8]$, puis contrôler sur la figure.

INDICE

Début : sur $[0, 4]$, $f(x) = -3$ équivaut à $(x-2)^2 - 4 = -3$. **Ensuite :** ajoute ou retranche la période 4 aux solutions trouvées, sans sortir de $[-4, 8]$.

CORRIGÉ

Sur $[0, 4]$. D'après la forme canonique, $f(x) = -3$ équivaut à $(x-2)^2 = 1$, soit $x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1$: les solutions sont 1 et 3.

Sur $[-4, 0]$. Pour x dans cet intervalle, $x + 4$ est dans $[0, 4]$ et $f(x) = f(x+4)$. L'équation équivaut à $x + 4 = 1$ ou $x + 4 = 3$: les solutions sont $1 - 4 = -3$ et $3 - 4 = -1$.

Sur $[4, 8]$. Pour x dans cet intervalle, $x - 4$ est dans $[0, 4]$ et $f(x) = f(x-4)$. L'équation équivaut à $x - 4 = 1$ ou $x - 4 = 3$: les solutions sont $1 + 4 = 5$ et $3 + 4 = 7$.

Contrôle. Sur la figure, la droite d'équation $y = -3$ coupe chacun des trois arcs en deux points.

Conclusion. Sur $[-4, 8]$, l'équation $f(x) = -3$ a six solutions : -3, -1, 1, 3, 5 et 7.