BURHAN

# Fonctions de référence : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
|---|---|---|
| Fonctions de référence | Entraînement | 8 |

## Exercice 1

### La hauteur d'un ballon lancé vers le haut

On lance un ballon vers le haut. On étudie la fonction $H$ définie sur $\mathbb{R}$ par $H(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$. Pour $t \geq 0$, $H(t)$ est la hauteur du ballon, en mètres, $t$ secondes après le lancer. Ce modèle n'a de sens que pour $t \geq 0$ et $H(t) \geq 0$.

**1.**

Écrire $H(t)$ sous forme canonique, puis la vérifier en développant.

INDICE

**Outil :** $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = H(\alpha)$. **Début :** ici $a = -5$ et $b = 20$.

**2.**

Donner le sens de variation de la fonction $H$. En déduire la hauteur maximale du ballon et l'instant où il l'atteint.

INDICE

**Outil :** la propriété des variations d'un trinôme ; le signe de $a$ décide.

**3.**

Calculer $H(0)$ et $H(4)$. Expliquer l'égalité obtenue à l'aide de l'axe de symétrie de la courbe de $H$.

INDICE

**Outil :** pour tout réel $u$, $H(2+u) = H(2-u)$. **Début :** écris $0 = 2 - 2$ et $4 = 2 + 2$.

**4.**

Calculer $H(4{,}1)$. En déduire un encadrement d'amplitude $0{,}1$ de l'instant où le ballon touche le sol.

INDICE

**Outil :** sur $[2, +\infty[$, la fonction $H$ est strictement décroissante. **Point délicat :** compare les signes de $H(4)$ et de $H(4{,}1)$.

Exercice 2

## Étude complète d'une fonction homographique

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-x+5}{x-2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

**1.**

Déterminer $D_f$, vérifier que $f$ est homographique, puis écrire sa forme réduite.

INDICE

**Outil :** $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$, $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$. **Début :** ici $a=-1, b=5, c=1, d=-2$.

**2.**

Dresser le tableau de variations de $f$, puis donner le centre de symétrie $\Omega$ de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

**Outil :** le signe de $k$ donne le sens de variation sur chacun des deux intervalles ; le centre est $\Omega(\alpha, \beta)$.

**3.**

Calculer $f(3)$, $f(5)$ et $f(8)$. En déduire trois autres points de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie de centre $\Omega$, et vérifier l'un d'eux. Donner enfin les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes.

INDICE

**Outil :** le symétrique de $(x, y)$ par rapport à $\Omega(2,-1)$ est $(4-x, -2-y)$, car $\Omega$ est le milieu des deux points.

**4.**

Dans un repère orthogonal, tracer en pointillés les droites d'équations $x=2$ et $y=-1$. Placer $\Omega$ et les points obtenus à la question 3, puis tracer $\mathcal{C}_f$.

INDICE

**Outil :** le tableau de variations de la question 2. **Point délicat :** $f(x) = -1$ équivaut à $\dfrac{3}{x-2} = 0$, ce qui est impossible ; la courbe ne rencontre donc aucune des deux droites en pointillés.

### Exercice 3

## Une parabole et une hyperbole

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{16}{x}$. On pose, pour tout réel $x$ non nul, $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ et $g(x) = \frac{16}{x}$.

**1.**

Vérifier que le point $A(4, 4)$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{H}$.

INDICE

**Début :** calcule $f(4)$ et $g(4)$.

**2.**

Pour $x < 0$, comparer les signes de $f(x)$ et de $g(x)$. En déduire la position de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{H}$ sur $]-\infty, 0[$.

INDICE

**Outil :** un carré est positif ou nul ; le quotient de $16$ par un réel négatif est négatif.

**3.**

Donner le sens de variation de $f$ et celui de $g$ sur $]0, +\infty[$. En déduire que $f(x) < g(x)$ pour $0 < x < 4$, puis comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x > 4$.

INDICE

**Outil :** les propriétés des variations de $x \mapsto ax^2$ et de $x \mapsto \frac{a}{x}$. **Point délicat :** compare chaque image au nombre $4 = f(4) = g(4)$.

**4.**

En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. Tracer ensuite $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ dans un même repère, pour $x$ compris entre $-8$ et $8$, et contrôler la réponse sur la figure.

INDICE

**Point délicat :** l'inégalité est large, donc l'abscisse de $A$ convient. **Pour tracer :** calcule $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$, puis $g(1)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(8)$, et complète par parité.

**Exercice 4**

## Les variations d'un trinôme par la définition

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$. On étudie ses variations à partir de la définition.

**1.**

Vérifier que, pour tous réels $x_1$ et $x_2$, $f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 1)$.

INDICE

**Outil :** l'identité $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$. **Ensuite :** mets $2(x_2 - x_1)$ en facteur.

**2.**

On suppose d'abord $x_1 < x_2 \leq -\dfrac{1}{2}$, puis $-\dfrac{1}{2} \leq x_1 < x_2$. Étudier dans chaque cas le signe de $f(x_2) - f(x_1)$, et en déduire le sens de variation de $f$ sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ et sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

INDICE

**Début :** le facteur $x_2 - x_1$ est positif dans les deux cas. **Point délicat :** compare $x_1 + x_2$ à $-1$ en ajoutant des inégalités.

**3.**

En déduire l'extremum de $f$. Contrôler ce résultat avec la forme canonique de $f(x)$.

INDICE

**Outil :** une fonction décroissante puis croissante atteint son minimum au point de changement. **Ensuite :** calcule $\alpha$ et $\beta$.

**Exercice 5**

## Une fonction sinus de période 2π/3

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(3x)$. On admet que $f$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

**1.**

Calculer $f(x)$ pour $x = 0$, $\dfrac{\pi}{18}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

INDICE

**Début :** calcule d'abord $3x$ dans chaque cas. **Point délicat :** $\sin\dfrac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**2.**

Étudier la parité de $f$. Justifier que $-2 \leq f(x) \leq 2$ pour tout réel $x$.

INDICE

**Outil :** la fonction sinus est impaire et ses valeurs sont comprises entre $-1$ et $1$.

**3.**

Dans un repère orthogonal, placer les points de la question 1 et tracer la courbe de $f$ sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Reproduire ce motif pour obtenir la courbe sur $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

INDICE

**Outil :** la période $\dfrac{2\pi}{3}$ : le motif se recopie de $\dfrac{2\pi}{3}$ en $\dfrac{2\pi}{3}$. **Début :** prends par exemple $1$ cm pour $\dfrac{\pi}{6}$ en abscisse et $1$ cm pour une unité en ordonnée.

**4.**

Donner trois réels de $[0, 2\pi]$ en lesquels $f$ prend la valeur $2$.

INDICE

**Outil :** $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$ ; ajoute la période, une fois puis deux fois.

### Exercice 6

## Une tension alternative

Aux bornes d'un générateur, la tension, en volts, à l'instant $t$, en secondes, est $u(t) = 4\cos(100\pi t)$, pour tout réel $t$. On observe la tension pour $t \geq 0$.

**1.**

Vérifier que $\dfrac{1}{50}$ est une période de $u$.

INDICE

**Outil :** la périodicité du cosinus. **Début :** calcule $100\pi \times \dfrac{1}{50}$.

**2.**

Calculer $u(0)$, $u\left(\dfrac{1}{200}\right)$, $u\left(\dfrac{1}{100}\right)$, $u\left(\dfrac{3}{200}\right)$ et $u\left(\dfrac{1}{50}\right)$. Quelles sont la plus grande et la plus petite valeur de la tension ?

INDICE

**Début :** les valeurs de $100\pi t$ sont $0$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\pi$, $\dfrac{3\pi}{2}$ et $2\pi$. **Outil :** $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

**3.**

On pose $\theta = 100\pi t$. Quand $t$ décrit $\left[0, \dfrac{1}{50}\right]$, $\theta$ décrit $[0, 2\pi]$, et $u(t) = 2$ équivaut à $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$. Justifier que, sur $[0, \pi]$, cette équation a pour seule solution $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

INDICE

**Outil :** le sens de variation du cosinus sur $[0, \pi]$ et les valeurs remarquables.

**4.**

Vérifier que $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ pour tout réel $\theta$. En déduire la solution de $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ sur $[\pi, 2\pi]$, puis les instants de $\left[0, \dfrac{1}{50}\right]$ où $u(t) = 2$, exacts et approchés.

INDICE

**Outil :** la période $2\pi$, puis la parité du cosinus. **Début :** si $\theta$ appartient à $[\pi, 2\pi]$, alors $2\pi - \theta$ appartient à $[0, \pi]$.

### Exercice 7

## Un enclos contre un mur

Avec $40$ m de grillage, on clôture un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur ferme l'un des côtés. On note $x$ la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur, avec $0 < x < 20$.




**L'enclos adossé au mur : deux côtés de longueur x perpendiculaires au mur, le troisième côté face au mur.**

**1.**

Exprimer en fonction de $x$ la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$ de l'enclos.

INDICE

**Début :** le grillage forme deux côtés de longueur $x$ et un troisième côté.

**2.**

Écrire $A(x)$ sous forme canonique. En déduire les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

INDICE

**Outil :** $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = A(\alpha)$ ; le signe de $a$ donne la nature de l'extremum.

**3.**

Calculer $A(5)$ et $A(15)$. En déduire, à l'aide du sens de variation de $A$, les valeurs de $x$ pour lesquelles l'aire est au moins égale à $150$ m².

INDICE

**Outil :** $A$ est strictement croissante sur $]0, 10]$ et strictement décroissante sur $[10, 20[$. **Point délicat :** raisonne sur chacun des deux intervalles.

**4.**

On veut une aire de $180$ m². À la calculatrice ou au logiciel, tracer la courbe de $A$ sur $[0, 20]$ et la droite d'équation $y = 180$, puis lire deux valeurs approchées de $x$. Encadrer la plus petite à $0{,}1$ près à l'aide de $A(6{,}8)$ et $A(6{,}9)$, puis en déduire un encadrement de l'autre.

INDICE

**Outil :** un changement de signe de $A(x) - 180$ sur $]0, 10]$, où $A$ est strictement croissante. **Ensuite :** l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = 10$.

## Exercice 8

### Du sirop ajouté à une boisson

Une bouteille contient $10$ L d'une boisson, dont $2$ L de sirop. On y ajoute $x$ litres de sirop pur, avec $x \geq 0$. La proportion de sirop dans le mélange est alors $p(x) = \dfrac{x + 2}{x + 10}$.

**1.**

Vérifier que $p$ est une fonction homographique et écrire sa forme réduite.

INDICE

**Outil :** $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$, $k = \dfrac{bc - ad}{c^2}$, avec ici $a = 1, b = 2, c = 1, d = 10$.

**2.**

Donner le sens de variation de $p$ sur $[0, +\infty[$. Justifier que $p(x) < 1$ pour tout $x \geq 0$, puis calculer $p(0)$, $p(10)$, $p(90)$ et $p(990)$. Interpréter.

INDICE

**Outil :** le signe de $k$ donne le sens de variation sur $]-10, +\infty[$, qui contient $[0, +\infty[$. **Ensuite :** quel est le signe de $\dfrac{8}{x + 10}$ ?

**3.**

Quelle quantité de sirop faut-il ajouter pour que la boisson contienne autant de sirop que d'autres liquides ?

INDICE

**Début :** traduis la question par l'équation $p(x) = \dfrac{1}{2}$, puis utilise la forme réduite.