BURHAN

Fonctions de référence : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions de référence	Entraînement	8

Exercice 1

La hauteur d'un ballon lancé vers le haut

On lance un ballon vers le haut. On étudie la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$. Pour $t \geq 0$, $H(t)$ est la hauteur du ballon, en mètres, t secondes après le lancer. Ce modèle n'a de sens que pour $t \geq 0$ et $H(t) \geq 0$.

1.

Écrire $H(t)$ sous forme canonique, puis la vérifier en développant.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = H(\alpha)$. **Début :** ici $a = -5$ et $b = 20$.

CORRIGÉ

On lit $a = -5$ et $b = 20$ dans l'écriture de $H(t)$.

Calcul de α et β. On trouve $\alpha = -\dfrac{20}{2 \times (-5)} = 2$, puis :

$$\begin{aligned} \beta = H(2) &= -20 + 40 + 1{,}5 \\ &= 21{,}5. \end{aligned}$$

Forme canonique. D'après la propriété de la forme canonique, pour tout réel t :

$$H(t) = -5(t-2)^2 + 21{,}5.$$

Vérification. Pour tout réel t :

$$\begin{aligned} &-5(t-2)^2 + 21{,}5 \\ &= -5(t^2 - 4t + 4) + 21{,}5 \\ &= -5t^2 + 20t - 20 + 21{,}5 \\ &= -5t^2 + 20t + 1{,}5. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel t, $H(t) = -5(t-2)^2 + 21{,}5$.

2.

Donner le sens de variation de la fonction H. En déduire la hauteur maximale du ballon et l'instant où il l'atteint.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'un trinôme ; le signe de a décide.

CORRIGÉ

Variations. Le coefficient $a = -5$ est négatif. D'après la propriété des variations d'un trinôme, H est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$; son maximum, égal à $\beta = 21{,}5$, est atteint en $\alpha = 2$.

Dans la situation. Seuls les instants $t \geq 0$ ont un sens : pendant les 2 premières secondes, le ballon monte, puis il redescend.

Conclusion. La hauteur maximale du ballon est $21{,}5$ m ; il l'atteint 2 secondes après le lancer.

3.

Calculer $H(0)$ et $H(4)$. Expliquer l'égalité obtenue à l'aide de l'axe de symétrie de la courbe de H.

INDICE

Outil : pour tout réel u, $H(2+u) = H(2-u)$. **Début :** écris $0 = 2-2$ et $4 = 2+2$.

CORRIGÉ

Calcul. $H(0) = 1{,}5$ et $H(4) = -80 + 80 + 1{,}5 = 1{,}5$: les deux hauteurs sont égales.

Explication. La courbe de H admet pour axe de symétrie la droite d'équation $t = 2$; d'après la propriété de l'axe de symétrie, pour tout réel u, $H(2+u) = H(2-u)$. Les instants $0 = 2-2$ et $4 = 2+2$ sont symétriques par rapport à 2, d'où $H(0) = H(4)$.

Conclusion. $H(0) = H(4) = 1{,}5$: au bout de 4 secondes, le ballon repasse à sa hauteur de départ.

4.

Calculer $H(4{,}1)$. En déduire un encadrement d'amplitude $0{,}1$ de l'instant où le ballon touche le sol.

INDICE

Outil : sur $[2, +\infty[$, la fonction H est strictement décroissante. **Point délicat :** compare les signes de $H(4)$ et de $H(4{,}1)$.

CORRIGÉ

Calcul. D'après la forme canonique, avec $4{,}1 - 2 = 2{,}1$:

$$\begin{aligned} H(4{,}1) &= -5 \times 2{,}1^2 + 21{,}5 \\ &= -22{,}05 + 21{,}5 \\ &= -0{,}55. \end{aligned}$$

Changement de signe. On a $H(4) = 1{,}5$, positif, et $H(4{,}1) = -0{,}55$, négatif. Sur $[2, +\infty[$, la fonction H est strictement décroissante : elle ne prend la valeur 0 qu'une fois sur cet intervalle, et c'est entre 4 et $4{,}1$.

Conclusion. Le ballon touche le sol entre 4 s et $4{,}1$ s après le lancer ; le modèle cesse de valoir à cet instant.

Exercice 2

Étude complète d'une fonction homographique

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-x+5}{x-2}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Déterminer D_f, vérifier que f est homographique, puis écrire sa forme réduite.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$, $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$. **Début :** ici $a=-1, b=5, c=1, d=-2$.

CORRIGÉ

Ensemble de définition. Le dénominateur $x-2$ s'annule seulement pour $x=2$, donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Fonction homographique. On lit $a=-1, b=5, c=1$ et $d=-2$. On a $c\neq 0$ et :

$$\begin{aligned} &ad-bc \\ &= (-1)\times(-2) - 5\times 1 \\ &= -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Forme réduite. On obtient $\alpha = 2$, $\beta = -1$ et $k = \dfrac{5\times 1-(-1)\times(-2)}{1^2} = 3$. Pour tout réel $x\neq 2$, $f(x) = -1 + \dfrac{3}{x-2}$.

Contrôle. Pour tout réel $x\neq 2$:

$$\begin{aligned} -1+\frac{3}{x-2} &= \frac{-(x-2)+3}{x-2} \\ &= \frac{-x+5}{x-2}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est homographique sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, de forme réduite $-1+\dfrac{3}{x-2}$.

2.

Dresser le tableau de variations de f, puis donner le centre de symétrie Ω de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : le signe de k donne le sens de variation sur chacun des deux intervalles ; le centre est $\Omega(\alpha,\beta)$.

CORRIGÉ

Variations. D'après la question 1, $k=3$, positif. D'après la propriété des variations d'une fonction homographique, f est strictement décroissante sur $]-\infty,2[$ et strictement décroissante sur $]2,+\infty[$.

Tableau. Il comporte une double barre sous la valeur interdite 2, et une flèche descendante de chaque côté.

Centre. D'après la propriété du centre de symétrie, le centre est le point de coordonnées (α,β).

Conclusion. La fonction f décroît strictement sur chacun des deux intervalles, et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $\Omega(2,-1)$.

3.

Calculer $f(3)$, $f(5)$ et $f(8)$. En déduire trois autres points de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie de centre Ω, et vérifier l'un d'eux. Donner enfin les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes.

INDICE

Outil : le symétrique de (x, y) par rapport à $\Omega(2, -1)$ est $(4 - x, -2 - y)$, car Ω est le milieu des deux points.

CORRIGÉ

Images. On calcule $f(3) = \dfrac{2}{1} = 2$, $f(5) = \dfrac{0}{3} = 0$ et $f(8) = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$.

Symétriques. Le point $\Omega(2, -1)$ est le milieu d'un point (x, y) de $\mathcal{C}_f$ et de son symétrique $(4 - x, -2 - y)$. On obtient ainsi trois autres points de $\mathcal{C}_f$: $(1, -4)$, $(-1, -2)$ et $\left(-4, -\dfrac{3}{2}\right)$.

Vérification de l'un d'eux. $f(-1) = \dfrac{6}{-3} = -2$: le point $(-1, -2)$ est bien sur $\mathcal{C}_f$.

Intersections avec les axes. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $-x + 5 = 0$, soit $x = 5$: c'est le point $(5, 0)$. De plus $f(0) = -\dfrac{5}{2}$: c'est le point $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $(5, 0)$ et l'axe des ordonnées au point $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$.

4.

Dans un repère orthogonal, tracer en pointillés les droites d'équations $x = 2$ et $y = -1$. Placer Ω et les points obtenus à la question 3, puis tracer $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : le tableau de variations de la question 2. **Point délicat :** $f(x) = -1$ équivaut à $\dfrac{3}{x-2} = 0$, ce qui est impossible ; la courbe ne rencontre donc aucune des deux droites en pointillés.

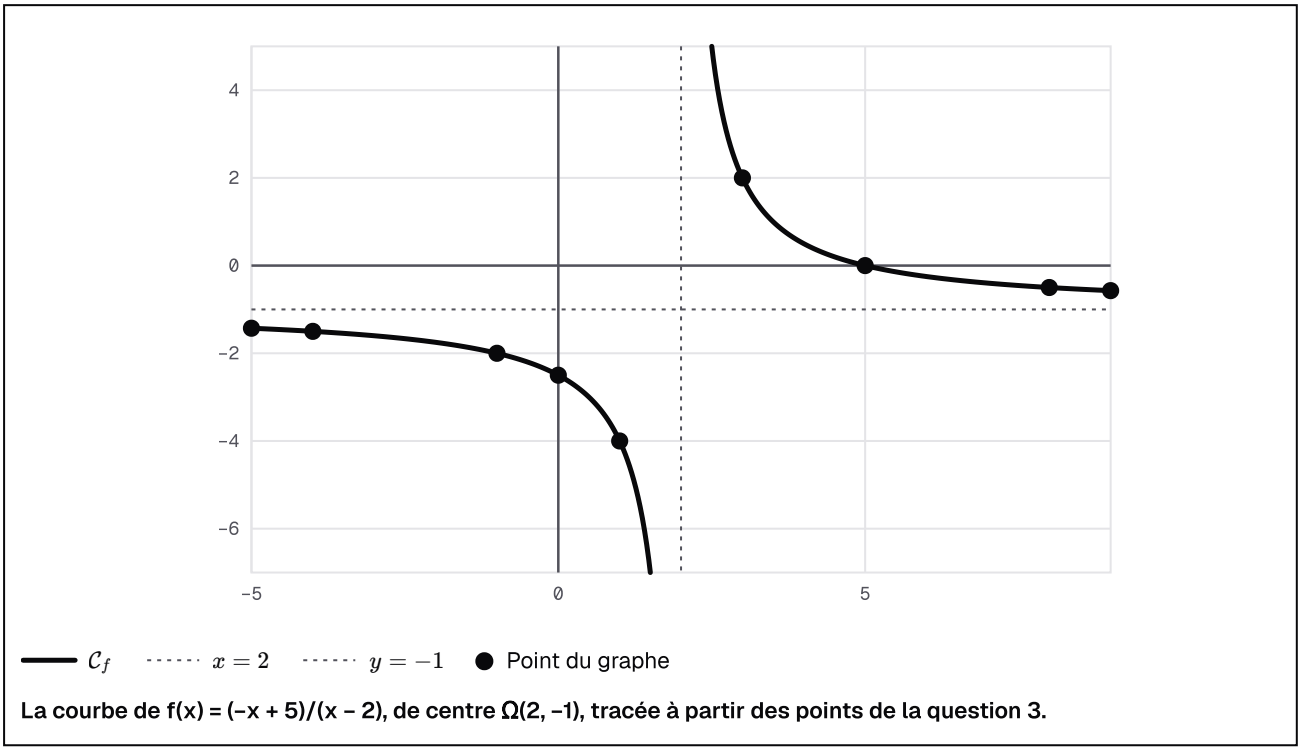
CORRIGÉ

Position par rapport à la droite d'équation $y = -1$. D'après la forme réduite, $f(x) - (-1) = \dfrac{3}{x-2}$, qui a le signe de $x - 2$.

Branche de droite, pour $x > 2$. Ici $f(x) > -1$. On joint $(3, 2)$, $(5, 0)$ et $\left(8, -\dfrac{1}{2}\right)$ par une courbe régulière qui descend en restant au-dessus de la droite d'équation $y = -1$.

Branche de gauche, pour $x < 2$. Ici $f(x) < -1$. On joint $\left(-4, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(-1, -2)$, $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$ et $(1, -4)$: la branche descend elle aussi, au-dessous de la droite d'équation $y = -1$.

Conclusion. Les deux branches de $\mathcal{C}_f$ ne touchent aucune des droites en pointillés et sont symétriques l'une de l'autre par rapport à $\Omega(2, -1)$.



La courbe de f(x) = (−x + 5)/(x − 2), de centre Ω(2, −1), tracée à partir des points de la question 3.

Exercice 3

Une parabole et une hyperbole

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \dfrac{16}{x}$. On pose, pour tout réel x non nul, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ et $g(x) = \dfrac{16}{x}$.

1.

Vérifier que le point $A(4, 4)$ appartient à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{H}$.

INDICE

Début : calcule $f(4)$ et $g(4)$.

CORRIGÉ

Un point est sur une courbe lorsque son ordonnée est l'image de son abscisse. Ici $f(4) = \dfrac{16}{4} = 4$ et $g(4) = \dfrac{16}{4} = 4$.

Conclusion. Le point $A(4, 4)$ appartient à la fois à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{H}$.

2.

Pour $x < 0$, comparer les signes de $f(x)$ et de $g(x)$. En déduire la position de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{H}$ sur $]-\infty, 0[$.

INDICE

Outil : un carré est positif ou nul ; le quotient de 16 par un réel négatif est négatif.

CORRIGÉ

Soit x un réel strictement négatif.

Signe de $f(x)$. Le carré x^2 est strictement positif, donc $f(x) = \dfrac{x^2}{4} > 0$.

Signe de $g(x)$. Le quotient de 16 par un réel négatif est négatif : $g(x) = \dfrac{16}{x} < 0$.

Conclusion. Pour tout $x < 0$, $f(x) > 0 > g(x)$: sur $]-\infty, 0[$, la parabole $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

3.

Donner le sens de variation de f et celui de g sur $]0,+\infty[$. En déduire que $f(x) < g(x)$ pour $0 < x < 4$, puis comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x > 4$.

INDICE

Outil : les propriétés des variations de $x \mapsto ax^2$ et de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$. **Point délicat :** compare chaque image au nombre $4 = f(4) = g(4)$.

CORRIGÉ

Variations. Pour f, le coefficient $\dfrac{1}{4}$ est positif : d'après la propriété des variations de $x \mapsto ax^2$, f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Pour g, le coefficient 16 est positif : d'après la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

Cas $0 < x < 4$. La croissance de f donne $f(x) < f(4) = 4$, la décroissance de g donne $g(x) > g(4) = 4$. Ainsi :

$$f(x) < 4 < g(x).$$

Cas $x > 4$. De même, $f(x) > 4$ et $g(x) < 4$, donc $f(x) > g(x)$.

Conclusion. Pour $0 < x < 4$, $f(x) < g(x)$: $\mathcal{P}$ est au-dessous de $\mathcal{H}$. Pour $x > 4$, $f(x) > g(x)$: $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{H}$.

4.

En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. Tracer ensuite $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ dans un même repère, pour x compris entre -8 et 8, et contrôler la réponse sur la figure.

INDICE

Point délicat : l'inégalité est large, donc l'abscisse de A convient. **Pour tracer :** calcule $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$, $f(8)$, puis $g(1)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(8)$, et complète par parité.

CORRIGÉ

Solutions. On rassemble les questions précédentes :

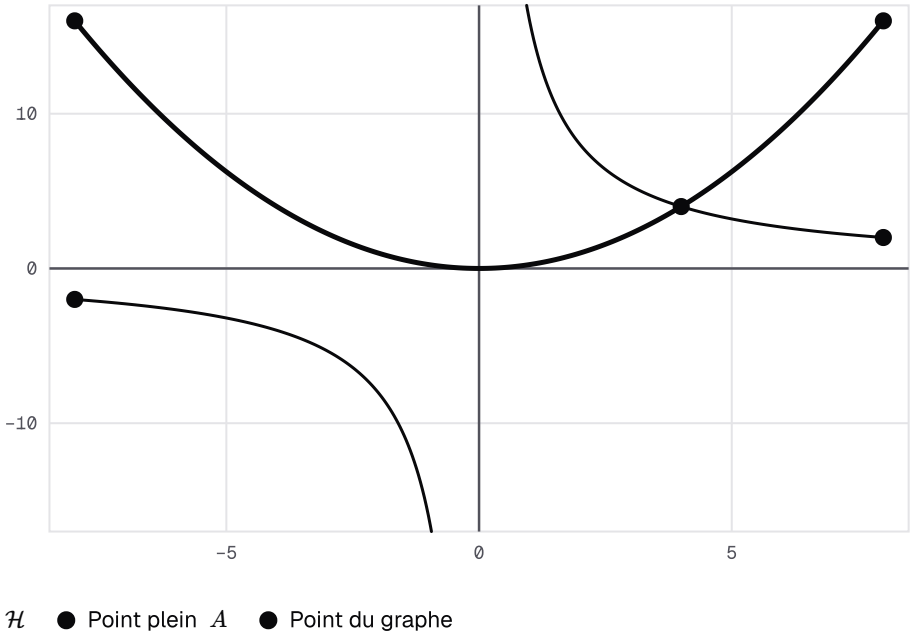
- pour $x < 0$, $f(x) > g(x)$ (question 2) ;
- pour $0 < x < 4$, $f(x) < g(x)$ (question 3) ;
- pour $x = 4$, $f(4) = g(4)$ (question 1), et l'inégalité large est vérifiée ;
- pour $x > 4$, $f(x) > g(x)$ (question 3).

Les solutions de $f(x) \geq g(x)$ sont donc les réels de $]-\infty, 0[$ et ceux de $[4, +\infty[$.

Tracé. On calcule $f(2) = 1$, $f(4) = 4$, $f(6) = 9$ et $f(8) = 16$, puis $g(1) = 16$, $g(2) = 8$, $g(4) = 4$ et $g(8) = 2$. Comme f est paire et g impaire, on place aussi les symétriques de ces points, par rapport à l'axe des ordonnées pour $\mathcal{P}$ et par rapport à O pour $\mathcal{H}$.

Contrôle. Sur la figure, $\mathcal{P}$ passe au-dessus de $\mathcal{H}$ à gauche de l'axe des ordonnées et à droite du point A.

Conclusion. Sur $\mathbb{R}^*$, l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ a pour solutions les réels de $]-\infty, 0[$ et ceux de $[4, +\infty[$.



La parabole P d'équation y = x²/4 et l'hyperbole H d'équation y = 16/x de −8 à 8, qui se rencontrent en A(4, 4).

Exercice 4

Les variations d'un trinôme par la définition

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$. On étudie ses variations à partir de la définition.

1.

Vérifier que, pour tous réels x_1 et x_2, $f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 1)$.

INDICE

Outil : l'identité $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$. **Ensuite :** mets $2(x_2 - x_1)$ en facteur.

CORRIGÉ

Soit x_1 et x_2 deux réels. Les termes constants -3 disparaissent dans la différence :

$$\begin{aligned} &f(x_2) - f(x_1) \\ &= 2(x_2^2 - x_1^2) + 2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Factorisation. D'après l'identité $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$, le facteur $2(x_2 - x_1)$ apparaît dans les deux termes ; on le met en facteur.

Conclusion. Pour tous réels x_1 et x_2, $f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 1)$.

2.

On suppose d'abord $x_1 < x_2 \leq -\dfrac{1}{2}$, puis $-\dfrac{1}{2} \leq x_1 < x_2$. Étudier dans chaque cas le signe de $f(x_2) - f(x_1)$, et en déduire le sens de variation de f sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ et sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

INDICE

Début : le facteur $x_2 - x_1$ est positif dans les deux cas. **Point délicat :** compare $x_1 + x_2$ à -1 en ajoutant des inégalités.

CORRIGÉ

Dans les deux cas, $x_1 < x_2$, donc le facteur $x_2 - x_1$ est strictement positif. Le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ est donc celui de $x_2 + x_1 + 1$.

Premier cas : $x_1 < x_2 \leq -\dfrac{1}{2}$. On a $x_1 < -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 \leq -\dfrac{1}{2}$. En ajoutant ces deux inégalités, $x_1 + x_2 < -1$, donc $x_2 + x_1 + 1 < 0$ et $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Second cas : $-\dfrac{1}{2} \leq x_1 < x_2$. On a $x_1 \geq -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 > -\dfrac{1}{2}$. En ajoutant, $x_1 + x_2 > -1$, donc $x_2 + x_1 + 1 > 0$ et $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Conclusion. D'après la définition du sens de variation, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

3.

En déduire l'extremum de f. Contrôler ce résultat avec la forme canonique de $f(x)$.

INDICE

Outil : une fonction décroissante puis croissante atteint son minimum au point de changement. **Ensuite :** calcule α et β.

CORRIGÉ

Extremum. D'après la question 2, f décroît jusqu'en $-\frac{1}{2}$, puis croît : elle y atteint son minimum. On calcule :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} - 1 - 3 \\ &= -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle par la forme canonique. On trouve $\alpha = -\frac{2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{7}{2}$. D'après la propriété de la forme canonique, pour tout réel x, $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$. En développant :

$$\begin{aligned} &2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{7}{2} \\ &= 2x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f admet un minimum égal à $-\frac{7}{2}$, atteint en $-\frac{1}{2}$; la forme canonique donne le même résultat.

Exercice 5

Une fonction sinus de période 2π/3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(3x)$. On admet que f est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

1.

Calculer $f(x)$ pour $x = 0$, $\dfrac{\pi}{18}$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

INDICE

Début : calcule d'abord $3x$ dans chaque cas. **Point délicat :** $\sin\dfrac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

CORRIGÉ

On calcule d'abord $3x$: on obtient 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$ et 2π. Pour la valeur délicate, $\sin\dfrac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{2} = -1$.

Valeurs de f. On multiplie chaque sinus par 2 :

- $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{\pi}{18}\right) = 1$;
- $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$ et $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$;
- $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$ et $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$.

Conclusion. Sur ces six réels, f prend successivement les valeurs 0, 1, 2, 0, -2 et 0.

2.

Étudier la parité de f. Justifier que $-2 \leq f(x) \leq 2$ pour tout réel x.

INDICE

Outil : la fonction sinus est impaire et ses valeurs sont comprises entre -1 et 1.

CORRIGÉ

Parité. L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Soit x un réel ; la fonction sinus étant impaire :

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\sin(-3x) \\ &= -2\sin(3x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est donc impaire.

Encadrement. Pour tout réel x, le sinus de $3x$ est compris entre -1 et 1 : $-1 \leq \sin(3x) \leq 1$. En multipliant par 2, qui est positif, on obtient $-2 \leq f(x) \leq 2$.

Conclusion. La fonction f est impaire, et $-2 \leq f(x) \leq 2$ pour tout réel x.

3.

Dans un repère orthogonal, placer les points de la question 1 et tracer la courbe de f sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. Reproduire ce motif pour obtenir la courbe sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

INDICE

Outil : la période $\frac{2\pi}{3}$: le motif se recopie de $\frac{2\pi}{3}$ en $\frac{2\pi}{3}$. **Début :** prends par exemple 1 cm pour $\frac{\pi}{6}$ en abscisse et 1 cm pour une unité en ordonnée.

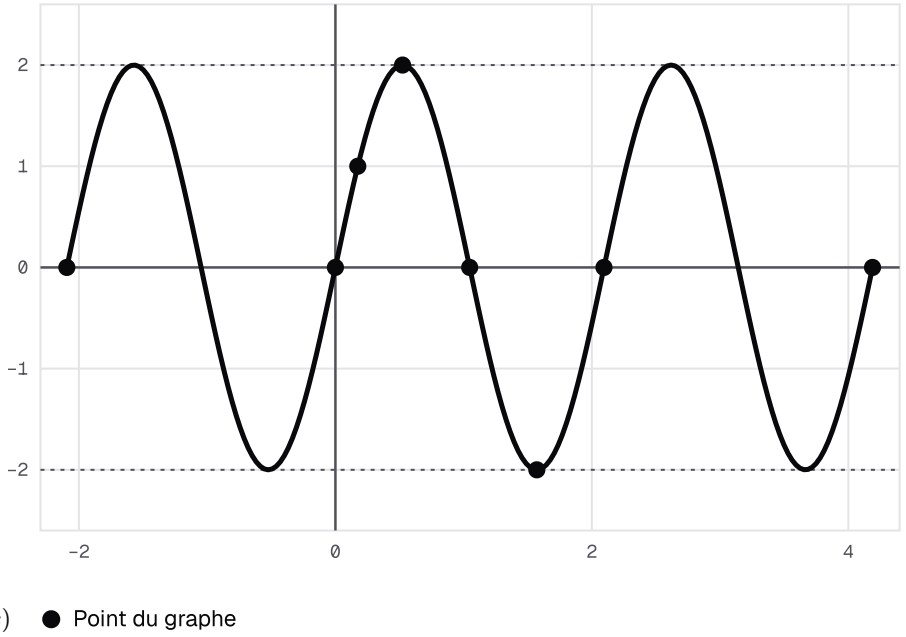
CORRIGÉ

Motif. On place les six points $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{18}, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ et $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$, puis on les joint par une courbe régulière qui reste entre les droites d'équations $y = -2$ et $y = 2$.

Reproduction. La période est $\frac{2\pi}{3}$: on recopie le motif par glissement horizontal sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ et sur $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Contrôle. La courbe obtenue est symétrique par rapport à l'origine, ce qui s'accorde avec l'imparité de f.

Conclusion. La courbe de f sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ est formée de trois copies du motif tracé sur $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.



La courbe de f(x) = 2 sin(3x) : le motif tracé sur [0, 2π/3] à partir des six points, recopié de part et d'autre.

4.

Donner trois réels de $[0, 2\pi]$ en lesquels f prend la valeur 2.

INDICE

Outil : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$; ajoute la période, une fois puis deux fois.

CORRIGÉ

On part de $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ (question 1) et l'on ajoute la période $\frac{2\pi}{3}$, une fois puis deux fois :

- $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$, donc $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2$;
- $\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, donc $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$.

Les trois réels $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$ sont compris entre 0 et 2π.

Conclusion. Sur $[0, 2\pi]$, la fonction f prend la valeur 2 en $\frac{\pi}{6}$, en $\frac{5\pi}{6}$ et en $\frac{3\pi}{2}$.

Exercice 6

Une tension alternative

Aux bornes d'un générateur, la tension, en volts, à l'instant t, en secondes, est $u(t) = 4\cos(100\pi t)$, pour tout réel t. On observe la tension pour $t \geq 0$.

1.

Vérifier que $\dfrac{1}{50}$ est une période de u.

INDICE

Outil : la périodicité du cosinus. **Début :** calcule $100\pi \times \dfrac{1}{50}$.

CORRIGÉ

Soit t un réel. Les nombres $t + \dfrac{1}{50}$ et $t - \dfrac{1}{50}$ sont des réels, donc dans l'ensemble de définition de u.

Calcul. On a $100\pi \times \dfrac{1}{50} = 2\pi$. D'après la périodicité du cosinus :

$$\begin{aligned} & u\left(t + \frac{1}{50}\right) \\ &= 4\cos(100\pi t + 2\pi) \\ &= 4\cos(100\pi t) \\ &= u(t). \end{aligned}$$

Conclusion. Le réel $\dfrac{1}{50}$ est une période de u : la tension se répète toutes les $\dfrac{1}{50}$ s, soit toutes les $0{,}02$ s.

2.

Calculer $u(0)$, $u\left(\frac{1}{200}\right)$, $u\left(\frac{1}{100}\right)$, $u\left(\frac{3}{200}\right)$ et $u\left(\frac{1}{50}\right)$. Quelles sont la plus grande et la plus petite valeur de la tension ?

INDICE

Début : les valeurs de $100\pi t$ sont 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π. **Outil :** $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.

CORRIGÉ

Valeurs. Les valeurs de $100\pi t$ sont 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π. On en déduit :

- $u(0) = 4\cos 0 = 4$;
- $u\left(\frac{1}{200}\right) = 4\cos\frac{\pi}{2} = 0$;
- $u\left(\frac{1}{100}\right) = 4\cos\pi = -4$;
- $u\left(\frac{3}{200}\right) = 4\cos\frac{3\pi}{2} = 0$;
- $u\left(\frac{1}{50}\right) = 4\cos 2\pi = 4$.

Extremums. Pour tout réel t, $-1 \leq \cos(100\pi t) \leq 1$; en multipliant par 4, $-4 \leq u(t) \leq 4$. Les valeurs 4 et -4 sont atteintes, en 0 et en $\frac{1}{100}$.

Conclusion. La plus grande valeur de la tension est 4 V, la plus petite -4 V.

3.

On pose $\theta = 100\pi t$. Quand t décrit $\left[0, \frac{1}{50}\right]$, θ décrit $[0, 2\pi]$, et $u(t) = 2$ équivaut à $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Justifier que, sur $[0, \pi]$, cette équation a pour seule solution $\theta = \frac{\pi}{3}$.

INDICE

Outil : le sens de variation du cosinus sur $[0, \pi]$ et les valeurs remarquables.

CORRIGÉ

Au plus une solution. D'après les variations du cosinus, la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$: deux réels distincts de cet intervalle ont des cosinus distincts. L'équation $\cos\theta = \frac{1}{2}$ a donc au plus une solution dans $[0, \pi]$.

Une solution. On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et $\frac{\pi}{3}$ est dans $[0, \pi]$.

Conclusion. Sur $[0, \pi]$, l'équation $\cos\theta = \frac{1}{2}$ a pour seule solution $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4.

Vérifier que $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ pour tout réel θ. En déduire la solution de $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ sur $[\pi, 2\pi]$, puis les instants de $\left[0, \dfrac{1}{50}\right]$ où $u(t) = 2$, exacts et approchés.

INDICE

Outil : la période 2π, puis la parité du cosinus. **Début :** si θ appartient à $[\pi, 2\pi]$, alors $2\pi - \theta$ appartient à $[0, \pi]$.

CORRIGÉ

Égalité. Soit θ un réel. Par périodicité, puis par parité du cosinus :

$$\begin{aligned}\cos(2\pi - \theta) &= \cos(-\theta)\\ &= \cos\theta.\end{aligned}$$

Sur $[\pi, 2\pi]$. Si θ est dans $[\pi, 2\pi]$, le réel $2\pi - \theta$ est dans $[0, \pi]$ et a le même cosinus que θ. D'après la question 3, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ équivaut alors à $2\pi - \theta = \dfrac{\pi}{3}$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$.

Instants. Sur $[0, 2\pi]$, les solutions sont donc $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{5\pi}{3}$. Comme $t = \dfrac{\theta}{100\pi}$, on obtient $t = \dfrac{1}{300}$ ou $t = \dfrac{1}{60}$.

Conclusion. Sur $\left[0, \dfrac{1}{50}\right]$, la tension vaut 2 V aux instants $t = \dfrac{1}{300}$ et $t = \dfrac{1}{60}$, soit $t \approx 0{,}0033$ s et $t \approx 0{,}0167$ s.

Exercice 7

Un enclos contre un mur

Avec 40 m de grillage, on clôture un enclos rectangulaire adossé à un mur : le mur ferme l'un des côtés. On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur, avec $0 < x < 20$.



L'enclos adossé au mur : deux côtés de longueur x perpendiculaires au mur, le troisième côté face au mur.

1.

Exprimer en fonction de x la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$ de l'enclos.

INDICE

Début : le grillage forme deux côtés de longueur x et un troisième côté.

CORRIGÉ

Côté parallèle au mur. Les 40 m de grillage forment deux côtés de longueur x et le côté face au mur. Ce dernier mesure donc $40 - 2x$ mètres.

Aire. L'aire d'un rectangle est le produit de ses deux dimensions. Pour tout x de $]0, 20[$, $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$.

Conclusion. Le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$ m, et l'aire de l'enclos est $A(x) = -2x^2 + 40x$, en m².

2.

Écrire $A(x)$ sous forme canonique. En déduire les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = A(\alpha)$; le signe de a donne la nature de l'extremum.

CORRIGÉ

Forme canonique. On lit $a = -2$ et $b = 40$, d'où $\alpha = -\dfrac{40}{2 \times (-2)} = 10$ et :

$$\begin{aligned} \beta = A(10) &= -200 + 400 \\ &= 200. \end{aligned}$$

Pour tout x de $]0, 20[$, $A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$.

Maximum. Le coefficient $a = -2$ est négatif : l'aire est maximale pour $x = 10$, et ce maximum vaut 200. Le côté face au mur mesure alors $40 - 20 = 20$ m.

Conclusion. L'enclos d'aire maximale mesure 10 m sur 20 m, pour une aire de 200 m².

3.

Calculer $A(5)$ et $A(15)$. En déduire, à l'aide du sens de variation de A, les valeurs de x pour lesquelles l'aire est au moins égale à 150 m².

INDICE

Outil : A est strictement croissante sur $]0, 10]$ et strictement décroissante sur $[10, 20[$. **Point délicat :** raisonne sur chacun des deux intervalles.

CORRIGÉ

Valeurs. $A(5) = 5 \times 30 = 150$ et $A(15) = 15 \times 10 = 150$.

Sur $]0, 10]$. La fonction A y est strictement croissante : $A(x) \geq A(5)$ équivaut à $x \geq 5$. On garde les réels de $[5, 10]$.

Sur $[10, 20[$. La fonction A y est strictement décroissante : $A(x) \geq A(15)$ équivaut à $x \leq 15$. On garde les réels de $[10, 15]$.

Conclusion. L'aire est au moins égale à 150 m² si et seulement si $5 \leq x \leq 15$.

4.

On veut une aire de 180 m². À la calculatrice ou au logiciel, tracer la courbe de A sur $[0, 20]$ et la droite d'équation $y = 180$, puis lire deux valeurs approchées de x. Encadrer la plus petite à $0{,}1$ près à l'aide de $A(6{,}8)$ et $A(6{,}9)$, puis en déduire un encadrement de l'autre.

INDICE

Outil : un changement de signe de $A(x) - 180$ sur $]0, 10]$, où A est strictement croissante. **Ensuite :** l'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = 10$.

CORRIGÉ

Lecture. Sur la figure, la courbe de A coupe la droite d'équation $y = 180$ en deux points, d'abscisses $x \approx 6{,}8$ et $x \approx 13{,}2$.

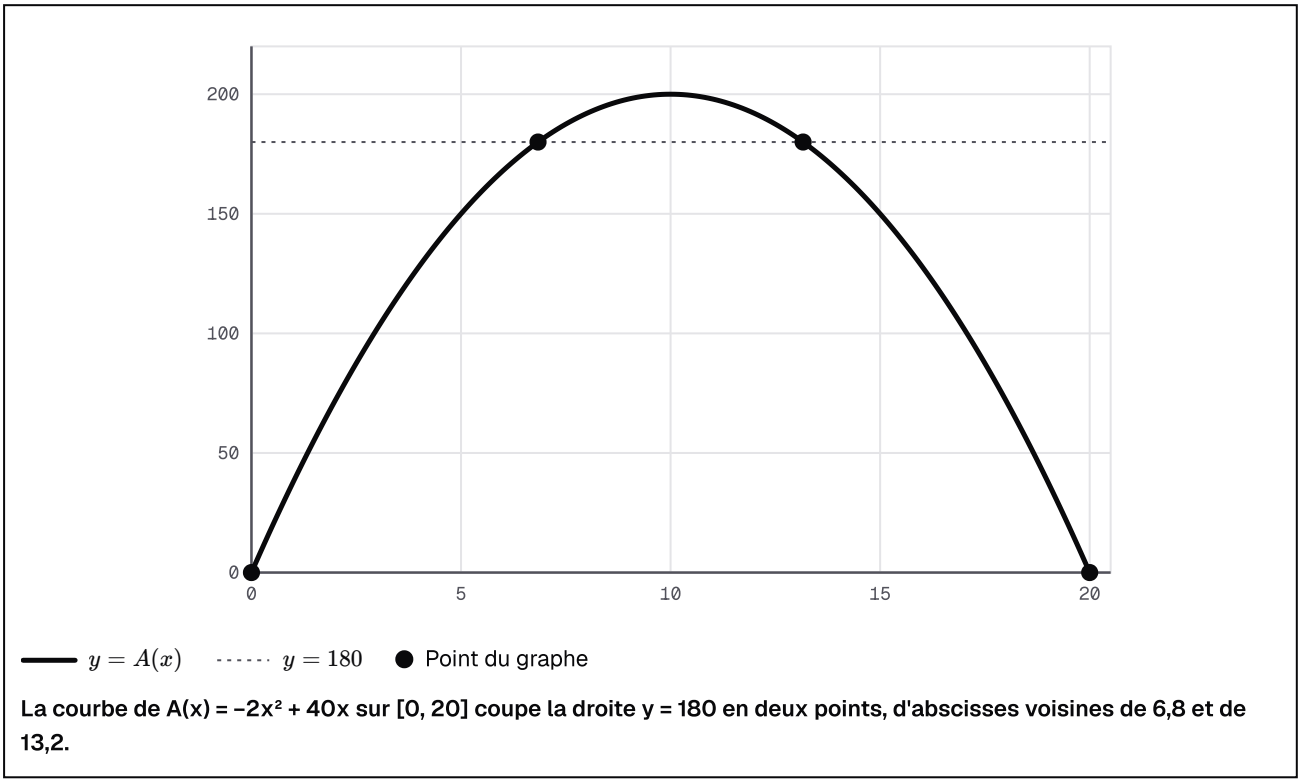
Encadrement de la plus petite. On calcule :

- $A(6{,}8) = 6{,}8 \times 26{,}4 = 179{,}52$, inférieur à 180 ;
- $A(6{,}9) = 6{,}9 \times 26{,}2 = 180{,}78$, supérieur à 180.

Comme A est strictement croissante sur $]0, 10]$, elle ne prend qu'une fois la valeur 180 sur cet intervalle, et c'est entre $6{,}8$ et $6{,}9$.

L'autre solution. La droite d'équation $x = 10$ est l'axe de symétrie de la courbe : pour tout réel h, $A(10 + h) = A(10 - h)$. Si $A(x) = 180$, alors $A(20 - x) = 180$. De $6{,}8 < x < 6{,}9$, on tire $13{,}1 < 20 - x < 13{,}2$.

Conclusion. Une aire de 180 m² s'obtient pour une valeur de x entre $6{,}8$ et $6{,}9$, et pour une autre entre $13{,}1$ et $13{,}2$.



La courbe de A(x) = −2x² + 40x sur [0, 20] coupe la droite y = 180 en deux points, d'abscisses voisines de 6,8 et de 13,2.

Exercice 8

Du sirop ajouté à une boisson

Une bouteille contient 10 L d'une boisson, dont 2 L de sirop. On y ajoute x litres de sirop pur, avec $x \geq 0$. La proportion de sirop dans le mélange est alors $p(x) = \dfrac{x+2}{x+10}$.

1.

Vérifier que p est une fonction homographique et écrire sa forme réduite.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$, $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$, avec ici $a=1, b=2, c=1, d=10$.

CORRIGÉ

Condition. On lit $a=1, b=2, c=1$ et $d=10$. On a $c \neq 0$ et $ad - bc = 10 - 2 = 8 \neq 0$: la fonction p est homographique.

Forme réduite. On obtient $\alpha = -10$, $\beta = 1$ et $k = \dfrac{2\times 1 - 1\times 10}{1^2} = -8$. Pour tout réel $x \neq -10$, $p(x) = 1 - \dfrac{8}{x+10}$.

Contrôle. Pour tout réel $x \neq -10$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{8}{x+10} &= \frac{x+10-8}{x+10} \\ &= \frac{x+2}{x+10}. \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction p est homographique, de forme réduite $1 - \dfrac{8}{x+10}$.

2.

Donner le sens de variation de p sur $[0, +\infty[$. Justifier que $p(x) < 1$ pour tout $x \geq 0$, puis calculer $p(0)$, $p(10)$, $p(90)$ et $p(990)$. Interpréter.

INDICE

Outil : le signe de k donne le sens de variation sur $]-10, +\infty[$, qui contient $[0, +\infty[$. **Ensuite :** quel est le signe de $\dfrac{8}{x+10}$?

CORRIGÉ

Variations. Ici $k = -8$, négatif. D'après la propriété des variations d'une fonction homographique, p est strictement croissante sur $]-10, +\infty[$, intervalle qui contient $[0, +\infty[$.

Majoration. D'après la question 1, $p(x) = 1 - \dfrac{8}{x+10}$. Pour $x \geq 0$, on a $x + 10 > 0$, donc $\dfrac{8}{x+10} > 0$ et $p(x) < 1$.

Valeurs. $p(0) = 0{,}2$, $p(10) = \dfrac{12}{20} = 0{,}6$, $p(90) = \dfrac{92}{100} = 0{,}92$ et $p(990) = \dfrac{992}{1000} = 0{,}992$.

Conclusion. La proportion de sirop augmente avec la quantité ajoutée et s'approche de 1, sans jamais l'atteindre : le mélange ne devient jamais du sirop pur.

3.

Quelle quantité de sirop faut-il ajouter pour que la boisson contienne autant de sirop que d'autres liquides ?

INDICE

Début : traduis la question par l'équation $p(x) = \dfrac{1}{2}$, puis utilise la forme réduite.

CORRIGÉ

Autant de sirop que d'autres liquides signifie que le sirop forme la moitié du mélange : on résout $p(x) = \dfrac{1}{2}$, avec $x \geq 0$.

Résolution. D'après la forme réduite, l'équation s'écrit $1 - \dfrac{8}{x+10} = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{8}{x+10} = \dfrac{1}{2}$. Comme $x + 10$ n'est pas nul, cela équivaut à $x + 10 = 16$, donc à $x = 6$.

Contrôle. $p(6) = \dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Il faut ajouter 6 L de sirop.