BURHAN

Fonctions de référence : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions de référence	Application	10

Exercice 1

Deux paraboles de sommet O

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5}{2}x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$.

1.

Justifier que la fonction f est paire.

INDICE

Outil : une fonction est paire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout x.

2.

Donner le sens de variation de f, puis celui de g, sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Préciser l'extremum de chaque fonction.

INDICE

Outil : la propriété des variations de $x \mapsto ax^2$. **Début :** repère le signe de a pour chaque fonction.

3.

Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$. En déduire $g(-1)$, $g(-2)$ et $g(-3)$ sans calcul, puis tracer la courbe de g dans un repère orthonormé, pour x compris entre -3 et 3.

INDICE

Outil : la fonction g est paire, comme f. **Point délicat :** relie les points par une courbe régulière, jamais par des segments.

Exercice 2

Une hyperbole avec a négatif

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{6}{x}$.

1.

Justifier que la fonction f est impaire. Que peut-on en déduire pour sa courbe ?

INDICE

Outil : une fonction est impaire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x.

2.

Donner le sens de variation de f sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. En déduire, sans calcul, la comparaison de $f(2)$ et $f(5)$.

INDICE

Outil : la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec ici $a = -6$.

3.

Calculer $f(-1)$ et $f(3)$. On a $-1 < 3$; expliquer pourquoi l'ordre de leurs images ne contredit pas la question 2.

INDICE

Point délicat : regarde dans quel intervalle se trouve chacun des réels -1 et 3.

Exercice 3

Une forme canonique avec a = 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 10x + 21$.

1.

Calculer les réels α et β associés au trinôme $f(x)$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$. **Début :** lis a et b dans l'écriture de $f(x)$.

2.

Écrire la forme canonique de $f(x)$, puis la vérifier en développant.

INDICE

Outil : la forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$. **Point délicat :** $x - (-5)$ s'écrit $x + 5$.

3.

En déduire que $f(x) \geq -4$ pour tout réel x, et préciser pour quelle valeur de x l'égalité a lieu.

INDICE

Outil : un carré est toujours positif ou nul.

Exercice 4

Sommet et axe d'une parabole tournée vers le bas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Calculer α et β, puis donner les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$; le sommet est $S(\alpha, \beta)$.

2.

Donner une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. La fonction f admet-elle un minimum ou un maximum ? Préciser sa valeur.

INDICE

Outil : l'axe est la droite d'équation $x = \alpha$; la nature de l'extremum dépend du signe de a.

3.

Calculer $f(0)$. En déduire un autre point de $\mathcal{C}_f$ de même ordonnée, puis le vérifier par le calcul.

INDICE

Outil : pour tout réel h, $f(2+h) = f(2-h)$. **Début :** écris $0 = 2 - 2$.

Exercice 5

Valeur interdite et forme réduite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x+2}{x-3}$.

1.

Déterminer la valeur interdite, puis l'ensemble de définition D_f.

INDICE

Outil : un quotient n'existe que si son dénominateur n'est pas nul.

2.

Vérifier que f est une fonction homographique.

INDICE

Outil : lis a, b, c, d, puis calcule $ad - bc$.

3.

Écrire la forme réduite de $f(x)$, puis la contrôler pour $x = 0$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$ et $k = \dfrac{bc - ad}{c^2}$.

Exercice 6

Le centre d'une hyperbole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-2}$.

1.

Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x-1}$. Lire ensuite α, β et k.

INDICE

Début : réduis $\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ au même dénominateur $2(x-1)$. **Point délicat :** $2(x-1) = 2x - 2$.

2.

Donner le centre de symétrie Ω de la courbe de f. Le contrôler avec les points d'abscisses 0 et 2.

INDICE

Outil : le centre est $\Omega(\alpha, \beta)$, et $f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta$. **Début :** $0 = 1 - 1$ et $2 = 1 + 1$.

3.

Donner le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'une fonction homographique, selon le signe de k.

Exercice 7

Une période de 4π

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.

1.

Vérifier que 4π est une période de f.

INDICE

Outil : la définition d'une fonction périodique et la périodicité du cosinus. **Début :** écris $\dfrac{x+4\pi}{2}$ autrement.

2.

Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $f(2\pi)$. En déduire $f\left(\dfrac{14\pi}{3}\right)$.

INDICE

Outil : les valeurs remarquables du cosinus. **Début :** $\dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 4\pi$.

3.

Le réel 2π est-il une période de f ? Justifier.

INDICE

Outil : un seul réel x pour lequel $f(x+2\pi) \neq f(x)$ suffit à répondre.

Exercice 8

Sinus et cosinus sans calculatrice

1.

Calculer $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

INDICE

Outil : la fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire. **Ensuite :** $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$.

2.

Calculer $\sin\dfrac{13\pi}{6}$ et $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

INDICE

Outil : la période 2π. **Début :** écris $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi$, et ajoute 2π à $-\dfrac{5\pi}{3}$.

3.

Sans calculatrice, comparer $\cos(-2)$ et $\cos(-1)$. Contrôler ensuite à la calculatrice, réglée en radians.

INDICE

Outil : le sens de variation du cosinus sur $[-\pi, 0]$. **Point délicat :** vérifie que -2 et -1 sont dans cet intervalle.

Exercice 9

Le cosinus et la droite d'équation y = x

On cherche les solutions de l'équation $\cos x = x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aucun calcul ne permet de les trouver exactement : on les cherche graphiquement.

1.

À la calculatrice ou au logiciel, réglé en radians, tracer la courbe du cosinus et la droite d'équation $y = x$, pour x et y compris entre 0 et $1{,}6$. Combien de points communs voit-on sur cette fenêtre ?

INDICE

Début : une solution de $\cos x = x$ est l'abscisse d'un point commun aux deux courbes. **Point délicat :** $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, donc la fenêtre contient l'intervalle étudié.

2.

Lire l'abscisse de ce point commun à $0{,}1$ près.

INDICE

Point délicat : une valeur lue sur une figure s'écrit avec $\approx$, accompagnée de sa précision.

3.

Contrôler la lecture : calculer $\cos(0{,}7) - 0{,}7$ et $\cos(0{,}8) - 0{,}8$ à $0{,}01$ près, la calculatrice étant réglée en radians. Conclure.

INDICE

Outil : si $\cos x - x$ change de signe entre deux réels, la courbe du cosinus traverse la droite entre ces deux réels.

Exercice 10

La loi de Boyle-Mariotte

À température constante, la pression P d'un gaz, en bars, et son volume V, en litres, vérifient la loi de Boyle-Mariotte. Pour un certain gaz, $P \times V = 24$. Ainsi, pour tout volume $V > 0$, $P = \dfrac{24}{V}$.

1.

Calculer la pression pour un volume de 2 L, de 4 L, puis de 8 L. Que devient la pression quand le volume double ?

INDICE

Début : remplace V par chaque valeur dans $\dfrac{24}{V}$.

2.

Donner le sens de variation de la fonction $V \mapsto \dfrac{24}{V}$ sur $]0, +\infty[$, puis l'interpréter.

INDICE

Outil : la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$; repère le signe de a.

3.

Quel volume faut-il pour obtenir une pression de $1{,}5$ bar ?

INDICE

Début : résous l'équation $\dfrac{24}{V} = 1{,}5$, avec $V > 0$.