BURHAN

Fonctions de référence : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Fonctions de référence	Application	10

Exercice 1

Deux paraboles de sommet O

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5}{2}x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{3}x^2$.

1.

Justifier que la fonction f est paire.

INDICE

Outil : une fonction est paire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout x.

CORRIGÉ

L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : pour tout réel x, le réel $-x$ est aussi dans $\mathbb{R}$.

Soit x un réel. Un nombre et son opposé ont le même carré, donc :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{5}{2}(-x)^2 \\ &= \frac{5}{2}x^2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est paire ; sa courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

2.

Donner le sens de variation de f, puis celui de g, sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Préciser l'extremum de chaque fonction.

INDICE

Outil : la propriété des variations de $x \mapsto ax^2$. **Début :** repère le signe de a pour chaque fonction.

CORRIGÉ

On applique la propriété des variations de $x \mapsto ax^2$: le signe du coefficient a fixe le sens de variation de part et d'autre de 0.

Fonction f. Son coefficient est $a = \frac{5}{2}$, positif. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Fonction g. Son coefficient est $a = -\frac{1}{3}$, négatif. Donc g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Conclusion. La fonction f admet en 0 un minimum égal à 0 ; la fonction g admet en 0 un maximum égal à 0.

3.

Calculer $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ et $g(3)$. En déduire $g(-1)$, $g(-2)$ et $g(-3)$ sans calcul, puis tracer la courbe de g dans un repère orthonormé, pour x compris entre -3 et 3.

INDICE

Outil : la fonction g est paire, comme f. **Point délicat :** relie les points par une courbe régulière, jamais par des segments.

CORRIGÉ

Valeurs pour x positif. On remplace x dans $-\frac{1}{3}x^2$: $g(0) = 0$, $g(1) = -\frac{1}{3}$, $g(2) = -\frac{4}{3}$ et $g(3) = -3$.

Valeurs pour x négatif. Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$, donc $g(-x) = g(x)$: la fonction g est paire. Les opposés ont donc les mêmes images : $g(-1) = -\frac{1}{3}$, $g(-2) = -\frac{4}{3}$ et $g(-3) = -3$.

Tracé. On place les sept points obtenus, puis on les joint par une courbe régulière, sans segments.

Conclusion. La courbe de g est une parabole de sommet O, tournée vers le bas, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



La courbe de g(x) = −x²/3 tracée de −3 à 3 à partir des sept points calculés.

Exercice 2

Une hyperbole avec a négatif

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{6}{x}$.

1.

Justifier que la fonction f est impaire. Que peut-on en déduire pour sa courbe ?

INDICE

Outil : une fonction est impaire si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x.

CORRIGÉ

L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 : l'opposé d'un réel non nul est encore non nul.

Soit x un réel non nul. On a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{6}{-x} \\ &= \frac{6}{x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. La fonction f est impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

2.

Donner le sens de variation de f sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. En déduire, sans calcul, la comparaison de $f(2)$ et $f(5)$.

INDICE

Outil : la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec ici $a = -6$.

CORRIGÉ

Variations. La fonction f est de la forme $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ avec $a = -6$, négatif. D'après la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Comparaison. Les réels 2 et 5 sont tous les deux dans $]0, +\infty[$, et $2 < 5$. Comme f est strictement croissante sur cet intervalle, elle conserve l'ordre :

$$f(2) < f(5).$$

Contrôle. $f(2) = -3$ et $f(5) = -\dfrac{6}{5}$, et l'on a bien $-3 < -\dfrac{6}{5}$.

Conclusion. La fonction f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles, et $f(2) < f(5)$.

3.

Calculer $f(-1)$ et $f(3)$. On a $-1 < 3$; expliquer pourquoi l'ordre de leurs images ne contredit pas la question 2.

INDICE

Point délicat : regarde dans quel intervalle se trouve chacun des réels -1 et 3.

CORRIGÉ

Images. On calcule :

$$f(-1) = -\frac{6}{-1} = 6$$

et

$$f(3) = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ainsi $-1 < 3$, mais $f(-1) > f(3)$.

Pourquoi il n'y a pas de contradiction. Le réel -1 est dans $]-\infty, 0[$, le réel 3 dans $]0, +\infty[$. Le sens de variation trouvé à la question 2 vaut sur chaque intervalle pris séparément ; il ne permet de comparer que deux réels situés dans un **même** intervalle.

Conclusion. La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : l'ordre de $f(-1)$ et $f(3)$ ne contredit donc pas la question 2.

Exercice 3

Une forme canonique avec a = 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 10x + 21$.

1.

Calculer les réels α et β associés au trinôme $f(x)$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$. **Début :** lis a et b dans l'écriture de $f(x)$.

CORRIGÉ

Dans l'écriture $x^2 + 10x + 21$, on lit $a = 1$ et $b = 10$.

Calcul de α. $\alpha = -\dfrac{10}{2 \times 1} = -5$.

Calcul de β. C'est l'image de α : $\beta = f(-5) = 25 - 50 + 21 = -4$.

Conclusion. Les réels associés au trinôme sont $\alpha = -5$ et $\beta = -4$.

2.

Écrire la forme canonique de $f(x)$, puis la vérifier en développant.

INDICE

Outil : la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$. **Point délicat :** $x - (-5)$ s'écrit $x + 5$.

CORRIGÉ

D'après la propriété de la forme canonique, avec $a = 1$, $\alpha = -5$ et $\beta = -4$, on a pour tout réel x :

$$f(x) = (x + 5)^2 - 4.$$

Vérification. Pour tout réel x, avec l'identité remarquable $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$:

$$\begin{aligned} &(x + 5)^2 - 4 \\ &= x^2 + 10x + 25 - 4 \\ &= x^2 + 10x + 21. \end{aligned}$$

Conclusion. La forme canonique de $f(x)$ est $(x + 5)^2 - 4$.

3.

En déduire que $f(x) \geq -4$ pour tout réel x, et préciser pour quelle valeur de x l'égalité a lieu.

INDICE

Outil : un carré est toujours positif ou nul.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Un carré n'est jamais négatif, donc $(x+5)^2 \geq 0$. En retranchant 4 aux deux membres :

$$f(x) = (x+5)^2 - 4 \geq -4.$$

Cas d'égalité. L'égalité $f(x) = -4$ a lieu exactement lorsque $(x+5)^2 = 0$, donc lorsque $x + 5 = 0$, c'est-à-dire $x = -5$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) \geq -4$, avec égalité seulement pour $x = -5$. Le minimum de f est donc -4, atteint en -5.

Exercice 4

Sommet et axe d'une parabole tournée vers le bas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

1.

Calculer α et β, puis donner les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$; le sommet est $S(\alpha, \beta)$.

CORRIGÉ

On lit $a = -3$ et $b = 12$.

Calcul de α et β. On obtient $\alpha = -\dfrac{12}{2 \times (-3)} = 2$, puis :

$$\begin{aligned} \beta = f(2) &= -12 + 24 - 7 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Conclusion. Le sommet de la parabole $\mathcal{C}_f$ est le point $S(2, 5)$.

2.

Donner une équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. La fonction f admet-elle un minimum ou un maximum ? Préciser sa valeur.

INDICE

Outil : l'axe est la droite d'équation $x = \alpha$; la nature de l'extremum dépend du signe de a.

CORRIGÉ

Axe. L'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$ est la droite verticale qui passe par le sommet, d'équation $x = 2$.

Extremum. Le coefficient $a = -3$ est négatif : la parabole est tournée vers le bas et son sommet en est le point le plus haut.

Conclusion. L'axe de symétrie a pour équation $x = 2$, et f admet un maximum égal à 5, atteint en 2.

3.

Calculer $f(0)$. En déduire un autre point de $\mathcal{C}_f$ de même ordonnée, puis le vérifier par le calcul.

INDICE

Outil : pour tout réel h, $f(2+h) = f(2-h)$. **Début :** écris $0 = 2 - 2$.

CORRIGÉ

Image de 0. $f(0) = -7$: le point $(0, -7)$ est sur $\mathcal{C}_f$.

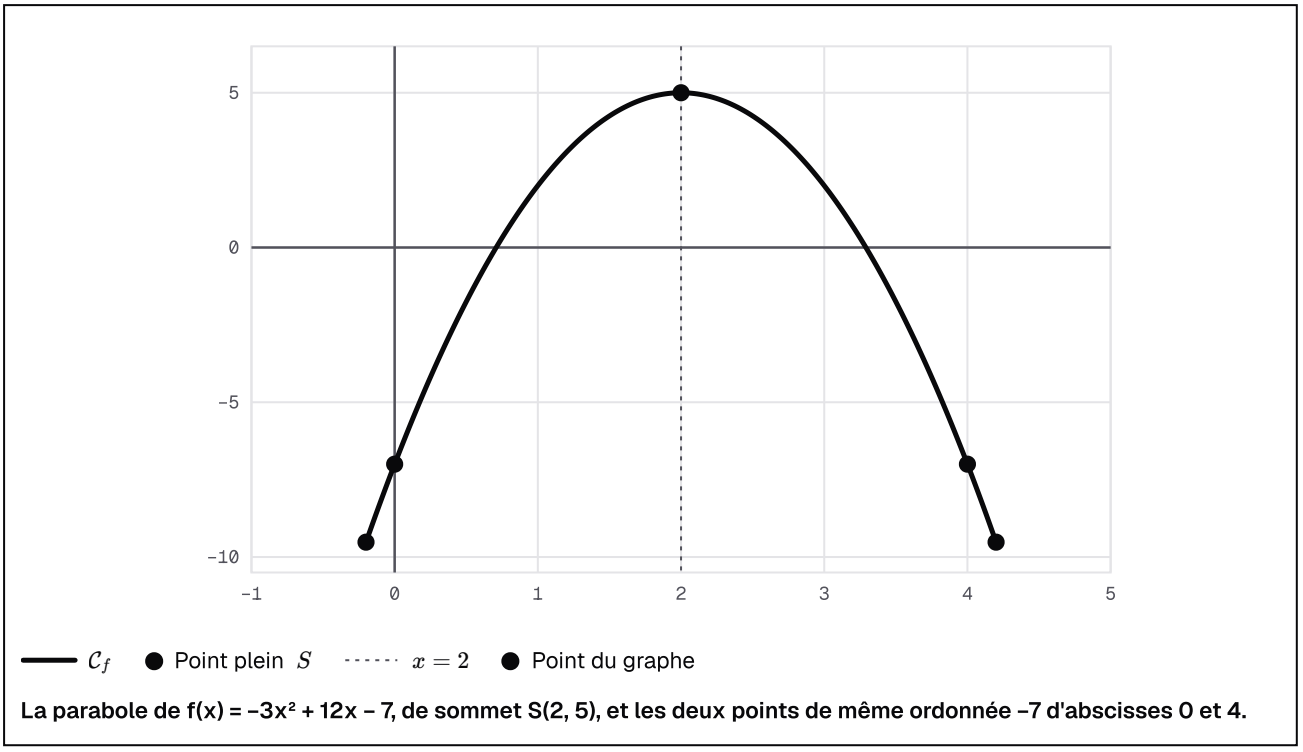
Point de même ordonnée. D'après la propriété de l'axe de symétrie, pour tout réel h, $f(2+h) = f(2-h)$. On écrit $0 = 2 - 2$ et l'on prend $h = 2$:

$$f(4) = f(0) = -7.$$

Le point $(4, -7)$, symétrique de $(0, -7)$ par rapport à la droite d'équation $x = 2$, est donc sur $\mathcal{C}_f$.

Vérification. Par le calcul, $f(4) = -48 + 48 - 7 = -7$.

Conclusion. Le point $(4, -7)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ et a la même ordonnée que le point d'abscisse 0.



La parabole de f(x) = −3x² + 12x − 7, de sommet S(2, 5), et les deux points de même ordonnée −7 d'abscisses 0 et 4.

Exercice 5

Valeur interdite et forme réduite

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x+2}{x-3}$.

1.

Déterminer la valeur interdite, puis l'ensemble de définition D_f.

INDICE

Outil : un quotient n'existe que si son dénominateur n'est pas nul.

CORRIGÉ

Le quotient $\dfrac{5x+2}{x-3}$ n'existe que si son dénominateur n'est pas nul. Or $x-3=0$ équivaut à $x=3$.

Conclusion. La valeur interdite est 3, et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2.

Vérifier que f est une fonction homographique.

INDICE

Outil : lis a, b, c, d, puis calcule $ad-bc$.

CORRIGÉ

On écrit $f(x)$ sous la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$: on lit $a=5$, $b=2$, $c=1$ et $d=-3$.

On vérifie les deux conditions de la définition :

- $c=1$, donc $c \neq 0$;
- $ad-bc = 5\times(-3) - 2\times 1 = -17 \neq 0$.

Conclusion. Les deux conditions sont remplies : f est une fonction homographique.

3.

Écrire la forme réduite de $f(x)$, puis la contrôler pour $x=0$.

INDICE

Outil : $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$ et $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$.

CORRIGÉ

Paramètres. Avec les formules de la forme réduite, on obtient $\alpha = -\dfrac{-3}{1} = 3$, $\beta = \dfrac{5}{1} = 5$ et

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\times 1 - 5\times(-3)}{1^2} \\ &= 17. \end{aligned}$$

Forme réduite. D'après la propriété de la forme réduite, pour tout réel $x \neq 3$, $f(x) = 5 + \dfrac{17}{x-3}$.

Contrôle pour $x=0$. D'un côté, $f(0) = \dfrac{2}{-3} = -\dfrac{2}{3}$; de l'autre, $5 + \dfrac{17}{-3} = \dfrac{15-17}{3} = -\dfrac{2}{3}$.

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 3$, $f(x) = 5 + \dfrac{17}{x-3}$.

Exercice 6

Le centre d'une hyperbole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-2}$.

1.

Vérifier que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x-1}$. Lire ensuite α, β et k.

INDICE

Début : réduis $\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ au même dénominateur $2(x-1)$. **Point délicat :** $2(x-1) = 2x-2$.

CORRIGÉ

Vérification. Soit x un réel différent de 1. On réduit au dénominateur commun $2(x-1)$, qui vaut $2x-2$:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2} + \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{3(x-1)+4}{2(x-1)} \\ &= \frac{3x+1}{2x-2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Lecture. L'écriture obtenue est de la forme réduite $\beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$, avec $\alpha = 1$, $\beta = \dfrac{3}{2}$ et $k = 2$.

Conclusion. Pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x-1}$.

2.

Donner le centre de symétrie Ω de la courbe de f. Le contrôler avec les points d'abscisses 0 et 2.

INDICE

Outil : le centre est $\Omega(\alpha, \beta)$, et $f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta$. **Début :** $0 = 1 - 1$ et $2 = 1 + 1$.

CORRIGÉ

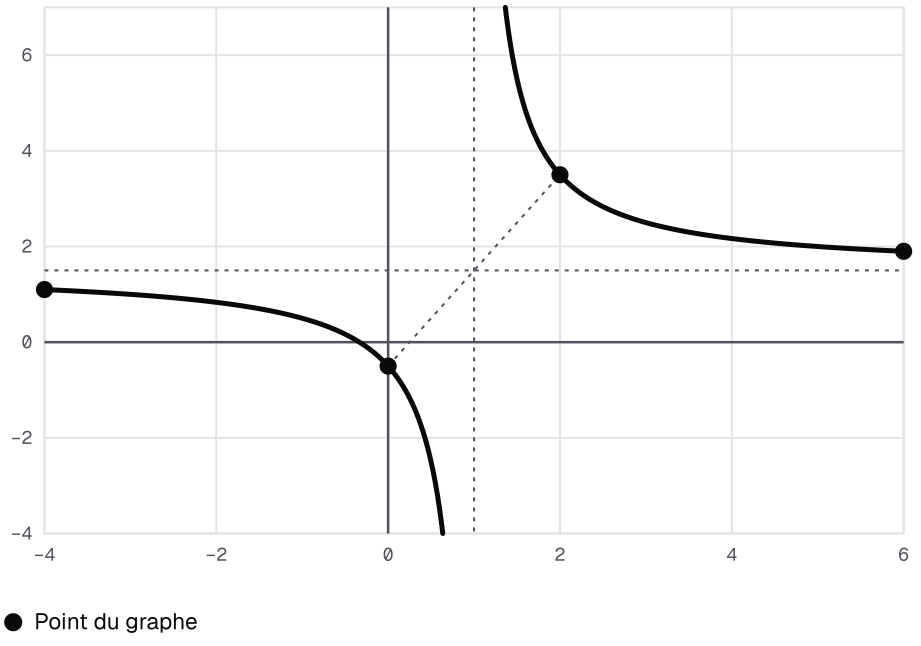
D'après la propriété du centre de symétrie, le centre de la courbe de f est le point de coordonnées (α, β), soit $\Omega\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Contrôle. On a $0 = 1 - 1$ et $2 = 1 + 1$: les abscisses 0 et 2 sont symétriques par rapport à 1. Leurs images sont $f(2) = \dfrac{7}{2}$ et $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, d'où :

$$\begin{aligned} f(2) + f(0) &= 3 \\ &= 2 \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Le milieu des points $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(2, \dfrac{7}{2}\right)$ est donc bien Ω.

Conclusion. La courbe de f admet pour centre de symétrie le point $\Omega\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.



L'hyperbole de f(x) = (3x + 1)/(2x − 2) et son centre Ω(1, 3/2), milieu des points d'abscisses 0 et 2.

3.

Donner le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.

INDICE

Outil : la propriété des variations d'une fonction homographique, selon le signe de k.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $k = 2$, qui est positif. D'après la propriété des variations d'une fonction homographique, une fonction de forme réduite $\beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$ avec $k > 0$ décroît strictement de chaque côté de α.

Conclusion. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Exercice 7

Une période de 4π

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.

1.

Vérifier que 4π est une période de f.

INDICE

Outil : la définition d'une fonction périodique et la périodicité du cosinus. **Début :** écris $\dfrac{x+4\pi}{2}$ autrement.

CORRIGÉ

Soit x un réel. Les réels $x+4\pi$ et $x-4\pi$ sont dans $\mathbb{R}$, ensemble de définition de f.

Calcul. Comme $\dfrac{x+4\pi}{2} = \dfrac{x}{2} + 2\pi$ et que 2π est une période du cosinus :

$$\begin{aligned} f(x+4\pi) &= \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) \\ &= \cos\frac{x}{2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition d'une fonction périodique, 4π est une période de f.

2.

Calculer $f(0)$, $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $f(2\pi)$. En déduire $f\left(\dfrac{14\pi}{3}\right)$.

INDICE

Outil : les valeurs remarquables du cosinus. **Début :** $\dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 4\pi$.

CORRIGÉ

Valeurs. On divise chaque réel par 2, puis on utilise les valeurs remarquables du cosinus :

- $f(0) = \cos 0 = 1$;
- $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$;
- $f(2\pi) = \cos\pi = -1$.

Déduction. On remarque que $\dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 4\pi$. Comme 4π est une période de f (question 1) :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{14\pi}{3}\right) &= f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $f\left(\dfrac{14\pi}{3}\right) = f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

3.

Le réel 2π est-il une période de f ? Justifier.

INDICE

Outil : un seul réel x pour lequel $f(x+2\pi) \neq f(x)$ suffit à répondre.

CORRIGÉ

Pour que 2π soit une période, il faudrait $f(x+2\pi) = f(x)$ pour **tout** réel x. Un seul contre-exemple suffit à l'exclure.

Contre-exemple. Pour $x = 0$, la question 2 donne $f(0+2\pi) = f(2\pi) = -1$, alors que $f(0) = 1$.

Conclusion. L'égalité $f(x+2\pi) = f(x)$ est fausse pour $x = 0$: le réel 2π n'est pas une période de f.

Exercice 8

Sinus et cosinus sans calculatrice

1.

Calculer $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

INDICE

Outil : la fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire. **Ensuite :** $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Sinus. La fonction sinus est impaire, donc :

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) &= -\sin\frac{\pi}{6}\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Cosinus. La fonction cosinus est paire ; on écrit ensuite $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ et l'on utilise $\cos(\pi - x) = -\cos x$:

$$\begin{aligned}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\frac{3\pi}{4}\\ &= -\cos\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.

Calculer $\sin\frac{13\pi}{6}$ et $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

INDICE

Outil : la période 2π. **Début :** écris $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, et ajoute 2π à $-\frac{5\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π : on se ramène à un angle usuel en ajoutant ou en retranchant 2π.

Sinus. On a $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, donc $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Cosinus. On a $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Conclusion. $\sin\frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

3.

Sans calculatrice, comparer $\cos(-2)$ et $\cos(-1)$. Contrôler ensuite à la calculatrice, réglée en radians.

INDICE

Outil : le sens de variation du cosinus sur $[-\pi, 0]$. **Point délicat :** vérifie que -2 et -1 sont dans cet intervalle.

CORRIGÉ

Les deux réels sont dans $[-\pi, 0]$. Comme $\pi \approx 3{,}14$, on a :

$$-\pi < -2 < -1 < 0.$$

Comparaison. D'après les variations du cosinus, la fonction cosinus est strictement croissante sur $[-\pi, 0]$: elle conserve l'ordre sur cet intervalle. De $-2 < -1$, on déduit $\cos(-2) < \cos(-1)$.

Contrôle. À la calculatrice, en radians : $\cos(-2) \approx -0{,}42$ et $\cos(-1) \approx 0{,}54$.

Conclusion. $\cos(-2) < \cos(-1)$.

Exercice 9

Le cosinus et la droite d'équation y = x

On cherche les solutions de l'équation $\cos x = x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aucun calcul ne permet de les trouver exactement : on les cherche graphiquement.

1.

À la calculatrice ou au logiciel, réglé en radians, tracer la courbe du cosinus et la droite d'équation $y = x$, pour x et y compris entre 0 et $1{,}6$. Combien de points communs voit-on sur cette fenêtre ?

INDICE

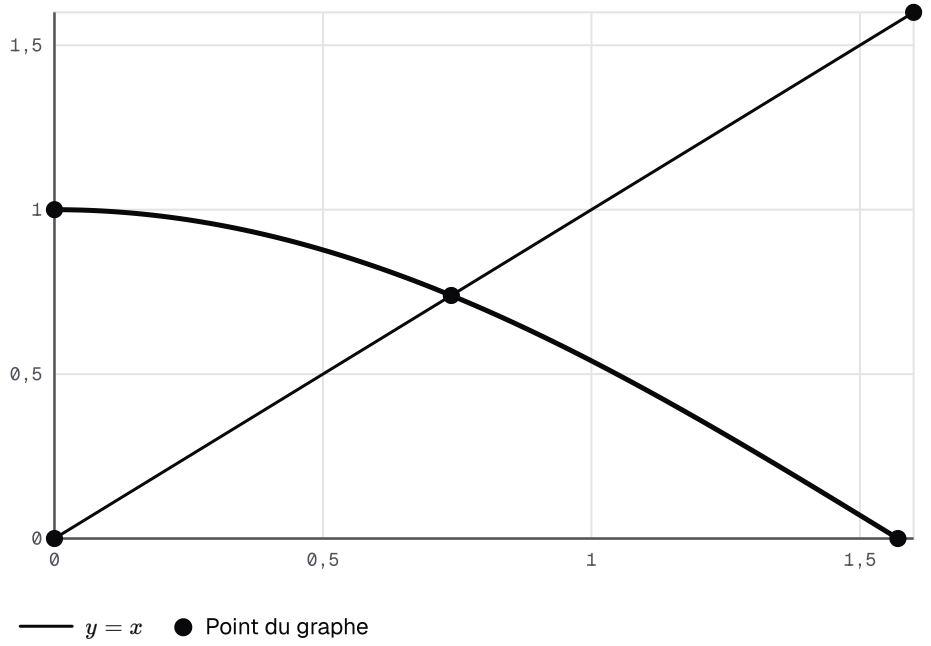
Début : une solution de $\cos x = x$ est l'abscisse d'un point commun aux deux courbes. **Point délicat :** $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, donc la fenêtre contient l'intervalle étudié.

CORRIGÉ

Traduction graphique. Un réel x est solution de $\cos x = x$ lorsque le point de la courbe du cosinus d'abscisse x est aussi sur la droite d'équation $y = x$. Les solutions sont donc les abscisses des points communs aux deux courbes.

Lecture de la figure. En 0, la courbe du cosinus passe par $(0, 1)$, au-dessus de la droite ; avant $\frac{\pi}{2}$, elle est passée au-dessous.

Conclusion. Sur cette fenêtre, on voit un seul point commun aux deux courbes.



La courbe du cosinus et la droite d'équation y = x pour x et y entre 0 et 1,6 : un seul point commun.

2.

Lire l'abscisse de ce point commun à $0{,}1$ près.

INDICE

Point délicat : une valeur lue sur une figure s'écrit avec $\approx$, accompagnée de sa précision.

CORRIGÉ

On lit sur la figure l'abscisse du point commun : elle est voisine de $0{,}7$. Une lecture graphique ne donne pas une valeur exacte ; on l'écrit avec le symbole $\approx$ et sa précision.

Conclusion. La solution vaut $x \approx 0{,}7$, valeur lue à $0{,}1$ près.

3.

Contrôler la lecture : calculer $\cos(0{,}7) - 0{,}7$ et $\cos(0{,}8) - 0{,}8$ à $0{,}01$ près, la calculatrice étant réglée en radians. Conclure.

INDICE

Outil : si $\cos x - x$ change de signe entre deux réels, la courbe du cosinus traverse la droite entre ces deux réels.

CORRIGÉ

Calcul. À la calculatrice, en radians :

- $\cos(0{,}7) - 0{,}7 \approx 0{,}06$, positif : en $0{,}7$, la courbe du cosinus est au-dessus de la droite ;
- $\cos(0{,}8) - 0{,}8 \approx -0{,}10$, négatif : en $0{,}8$, elle est au-dessous.

Interprétation. La différence $\cos x - x$ change de signe entre $0{,}7$ et $0{,}8$: la courbe traverse la droite entre ces deux abscisses.

Conclusion. La solution est comprise entre $0{,}7$ et $0{,}8$, ce qui confirme la lecture : $x \approx 0{,}7$ à $0{,}1$ près, par défaut.

Exercice 10

La loi de Boyle-Mariotte

À température constante, la pression P d'un gaz, en bars, et son volume V, en litres, vérifient la loi de Boyle-Mariotte. Pour un certain gaz, $P \times V = 24$. Ainsi, pour tout volume $V > 0$, $P = \dfrac{24}{V}$.

1.

Calculer la pression pour un volume de 2 L, de 4 L, puis de 8 L. Que devient la pression quand le volume double ?

INDICE

Début : remplace V par chaque valeur dans $\dfrac{24}{V}$.

CORRIGÉ

Valeurs. On divise 24 par chaque volume :

- pour $V = 2$, $P = 12$;
- pour $V = 4$, $P = 6$;
- pour $V = 8$, $P = 3$.

Volume doublé. Pour tout volume $V > 0$, le volume $2V$ donne la pression :

$$\frac{24}{2V} = \frac{1}{2} \times \frac{24}{V}.$$

Conclusion. Quand le volume double, la pression est divisée par 2.

2.

Donner le sens de variation de la fonction $V \mapsto \dfrac{24}{V}$ sur $]0, +\infty[$, puis l'interpréter.

INDICE

Outil : la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$; repère le signe de a.

CORRIGÉ

La fonction $V \mapsto \dfrac{24}{V}$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec $a = 24$, positif. D'après la propriété des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, elle est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Conclusion. La fonction $V \mapsto \dfrac{24}{V}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$: plus le volume du gaz augmente, plus sa pression diminue.

3.

Quel volume faut-il pour obtenir une pression de $1{,}5$ bar ?

INDICE

Début : résous l'équation $\dfrac{24}{V} = 1{,}5$, avec $V > 0$.

CORRIGÉ

On cherche $V > 0$ tel que $\dfrac{24}{V} = 1{,}5$. Comme V n'est pas nul, on peut multiplier par V puis diviser par $1{,}5$; l'équation équivaut à :

$$\begin{aligned} V &= \frac{24}{1{,}5} \\ &= 16. \end{aligned}$$

Contrôle. $1{,}5 \times 16 = 24$.

Conclusion. Il faut un volume de 16 L pour obtenir une pression de $1{,}5$ bar.