BURHAN

Fonctions de référence

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/fonctions-de-reference/cours

Chapitre	Semestre
Fonctions de référence	Semestre 2

Des courbes qui reviennent partout

Tu dois parcourir 120 km. À 60 km/h, le trajet dure 2 heures ; à 40 km/h, il dure 3 heures. La durée dépend de la vitesse : c'est une fonction, $v \mapsto \dfrac{120}{v}$.

Autre situation : un carré de côté c a pour aire c^2. Si le côté passe de 3 cm à 6 cm, l'aire passe de 9 cm² à 36 cm².

Devine : Une prédiction

Sur le même trajet de 120 km, tu doubles ta vitesse : tu passes de 40 km/h à 80 km/h. Que devient la durée du trajet ?

A. Elle double.

Faux.
Rouler plus vite ne peut pas allonger le trajet : la durée diminue.

B. Elle est divisée par 2.

Juste.
Juste : $\dfrac{120}{80} = 1{,}5$ h, la moitié de 3 h.

C. Elle diminue de 2 heures.

Faux.
La durée passe de 3 h à $1{,}5$ h : elle diminue de $1{,}5$ h, pas de 2 h.

D. Elle est divisée par 4.

Faux.
C'est l'aire du carré qui est divisée par 4 quand le côté est divisé par 2. Ici, la vitesse n'est pas au carré.

Correction
La durée vaut $\dfrac{120}{v}$ heures. Pour $v = 40$, elle vaut 3 h. Pour $v = 80$, elle vaut :

$$\frac{120}{80} = 1{,}5 \text{ h}.$$

Quand la vitesse double, la durée est donc divisée par 2.

Pour l'aire du carré, c'est différent : quand le côté double, l'aire est multipliée par 4.

Ces deux fonctions, $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ et $x \mapsto ax^2$, sont des **fonctions de référence**. Dans ce chapitre, tu apprends leurs courbes et leurs variations. Tu étudies ensuite deux familles plus générales : les trinômes et les fonctions homographiques. Puis tu découvres des fonctions qui se répètent, comme sinus et cosinus. Enfin, tu résous des équations en lisant des courbes.

Rappels du collège : la fonction affine

Rappel du collège. Une fonction affine s'écrit $x \mapsto mx + p$. Sa courbe est une droite.

- Si $m > 0$, la fonction est croissante.
- Si $m < 0$, elle est décroissante.
- Si $m = 0$, elle est constante.

Dans ce chapitre, les courbes ne sont plus des droites.

Vérifie : Le sens d'une fonction affine

La fonction $x \mapsto 5 - 2x$ est-elle croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$?

A. Croissante, car $5 > 0$.
Faux.
Le nombre 5 est l'ordonnée à l'origine ; c'est le coefficient de x qui décide.

B. Constante, car 5 ne dépend pas de x.
Faux.
Le terme $-2x$ dépend de x : la fonction n'est pas constante.

C. Décroissante, car $-2 < 0$.
Juste.
Juste : le coefficient de x est $m = -2$, négatif.

D. Ni croissante ni décroissante.
Faux.
Une fonction affine non constante est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$.

Correction
On écrit $5 - 2x = -2x + 5$: ici $m = -2$ et $p = 5$.

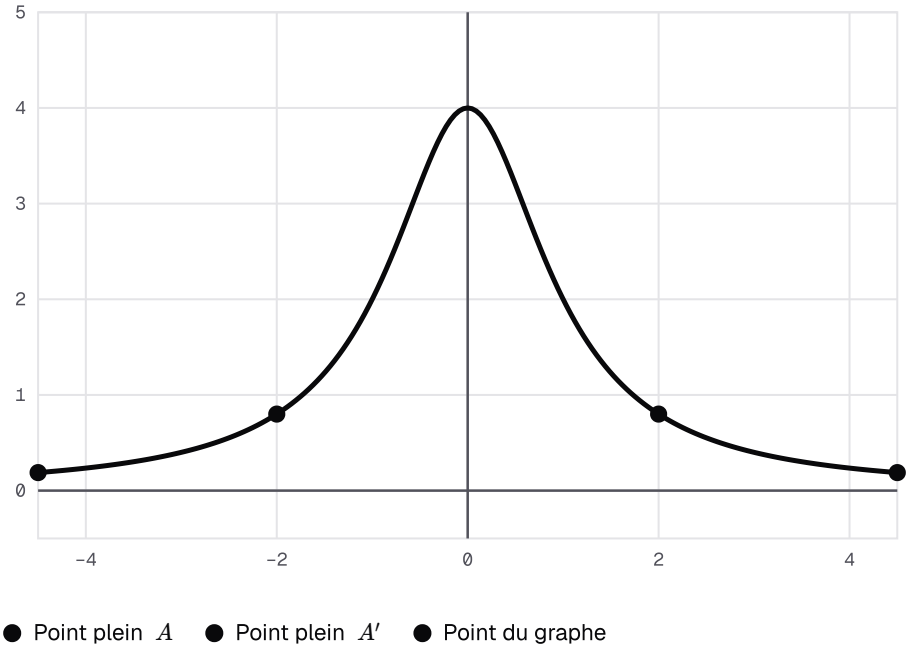
Comme $m < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Contrôle : l'image de 0 est 5, celle de 1 est 3, plus petite.

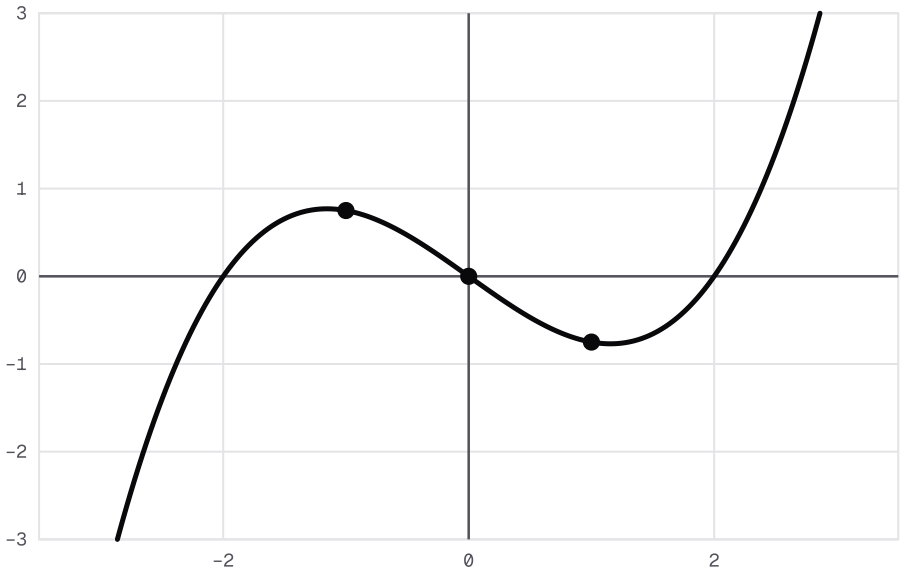
Rappel : Généralités sur les fonctions numériques.

- f est **paire** si, pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- f est **impaire** si, pour tout x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O.
- Pour un sens de variation sur un intervalle I, tu prends $x_1 < x_2$ dans I. Puis tu étudies le signe de $f(x_2) - f(x_1)$.
- f admet un **minimum** m en x_0 si $m = f(x_0)$ et si, pour tout x de D_f, $f(x) \geq m$. Pour un **maximum**, l'inégalité est $f(x) \leq f(x_0)$.



Une fonction paire : sa courbe se replie sur elle-même autour de l'axe des ordonnées, A et A' se correspondent.



Une fonction impaire : un demi-tour autour de l'origine O échange B et B' et laisse la courbe en place.

Rappel du collège.

- Identité remarquable : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
- Pour soustraire deux quotients, réduis-les au même dénominateur : $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 3}{6}$.
- Soit M un point hors d'une droite d. Son symétrique par rapport à d est le point M' tel que d passe par le milieu de $[MM']$ et soit perpendiculaire à (MM').
- Le symétrique de M par rapport à un point Ω est le point M' tel que Ω soit le milieu de $[MM']$.

Ces outils suffisent pour tout le chapitre. Pour chaque nouvelle fonction, tu te poses les mêmes questions. Est-elle paire ou impaire ? Sur quels intervalles croît-elle ? Quelle est l'allure de sa courbe ?

La fonction x ↦ ax²

Une aire, une chute

Deux situations. L'aire d'un carré de côté x est x^2.

Un objet lâché sans vitesse tombe de $d = 4{,}9t^2$ mètres en t secondes, si l'on néglige l'air. En 1 s, il tombe de $4{,}9$ m ; en 2 s, de $19{,}6$ m ; en 3 s, de $44{,}1$ m. Quand la durée double, la distance est multipliée par 4.

Ces deux grandeurs sont de la forme $x \mapsto ax^2$, avec $a = 1$ puis $a = 4{,}9$.

> **Devine : Deux images**
>
> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$. Sans tout calculer, compare $f(-3)$ et $f(3)$.

A. $f(-3) = f(3)$

Juste.

Juste : $(-3)^2 = 3^2 = 9$, donc les deux images valent 18.

B. $f(-3) = -f(3)$

Faux.

Le carré efface le signe : $(-3)^2 = 9$, pas -9.

C. $f(-3) < f(3)$

Faux.

Les deux images valent $2 \times 9 = 18$: aucune n'est plus petite.

D. $f(-3) = 2f(3)$

Faux.

Le coefficient 2 multiplie les deux carrés de la même façon.

Correction

Calculons les deux images :

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2 \times (-3)^2 \\ &= 2 \times 9 = 18, \\ f(3) &= 2 \times 3^2 = 18. \end{aligned}$$

Deux réels opposés ont le même carré, donc la même image. C'est l'idée de la parité.

Comment varie $x \mapsto ax^2$? Tu compares deux images $f(x_1)$ et $f(x_2)$, avec $x_1 < x_2$.

Pourquoi est-ce vrai ? La différence des deux images s'écrit :

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2).$$

Une identité remarquable la factorise. Le signe de chaque facteur dépend de la position de x_1 et x_2 par rapport à 0.

Parité et variations

Propriété : Parité et variations de la fonction x ↦ ax²

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$.

- La fonction f est **paire**.
- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un **minimum** égal à 0, atteint en 0.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$; elle admet un **maximum** égal à 0, atteint en 0.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x, le réel $-x$ est dans $\mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$: f est paire.

Étape 2. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $0 \leq x_1 < x_2$. Alors $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$, produit strictement positif. Donc $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2)$ a le signe de a : f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$.

Étape 3. Si $x_1 < x_2 \leq 0$, alors $0 \leq -x_2 < -x_1$. D'après l'étape 2 et la parité, $f(x_1) - f(x_2) = f(-x_1) - f(-x_2)$ a le signe de a : si $a > 0$, $f(x_1) > f(x_2)$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$; si $a < 0$, elle y est strictement croissante.

Étape 4. Pour tout réel x, $f(x) - f(0) = ax^2$ est nul en 0 et a le signe de a ailleurs : minimum si $a > 0$, maximum si $a < 0$.

Vérifie : Le signe d'un facteur

Dans la preuve, sur $[0, +\infty[$, pourquoi le facteur $x_2 + x_1$ est-il strictement positif ?

A. Car $x_2^2 > x_1^2$.

Faux.

C'est ce qu'on cherche à établir : on ne peut pas s'en servir.

B. Car $a > 0$.

Faux.

Le facteur $x_2 + x_1$ ne contient pas a ; et a peut être négatif.

C. Car $0 \leq x_1 < x_2$.

Juste.

Juste : $x_2 > 0$ et $x_1 \geq 0$, donc leur somme est strictement positive.

D. Car f est paire.

Faux.

La parité sert pour $]-\infty, 0]$, pas pour ce facteur.

Correction

On a $x_2 > x_1 \geq 0$, donc $x_2 > 0$ et $x_1 \geq 0$. Leur somme $x_2 + x_1$ est donc strictement positive.

L'autre facteur, $x_2 - x_1$, l'est aussi, car $x_1 < x_2$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer deux carrés, **factorise** :

$$x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Si $0 \leq x_1 < x_2$, les deux facteurs sont strictement positifs. Le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ est alors celui de a.

> Sur $]-\infty, 0]$, la parité renverse le sens : il suffit d'étudier $[0, +\infty[$.

Exemple : comparer sans calculer

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$, avec $a = 2 > 0$. D'après les variations de $x \mapsto ax^2$, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $1{,}5 < 2{,}5$, on a $f(1{,}5) < f(2{,}5)$. Contrôle : $4{,}5 < 12{,}5$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$, avec $a = -\dfrac{1}{2} < 0$: g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. Comme $-4 < -2 \leq 0$, on a $g(-4) < g(-2)$. Contrôle : $-8 < -2$.

Le minimum de f est 0, atteint en 0. Le maximum de g est 0, atteint en 0.

Tableau de variations de la fonction f définie par f(x) = 2x² : a est positif, le minimum 0 est atteint en 0.

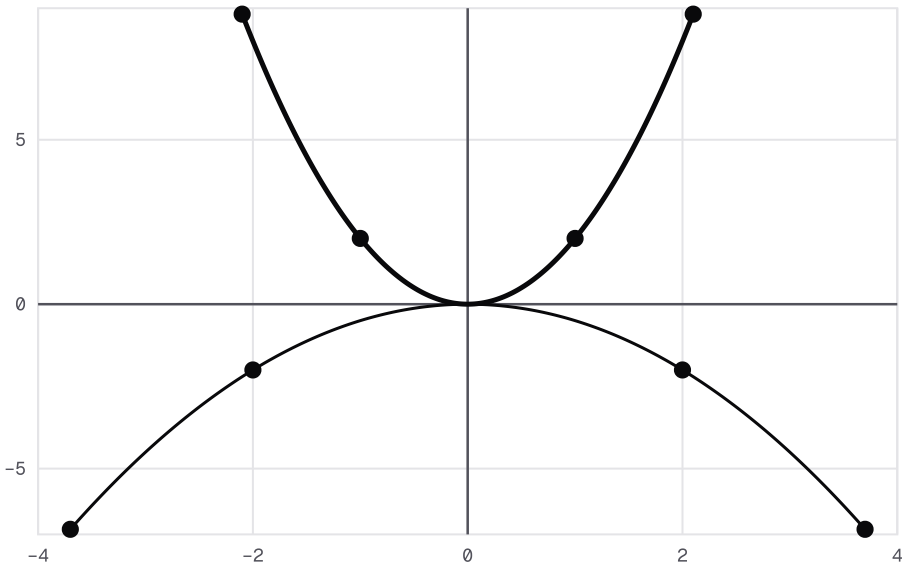
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

La parabole

Définition : Parabole d'équation y = ax²

Soit a un réel non nul. Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ s'appelle une **parabole** de **sommet** O et d'**axe** l'axe des ordonnées. On dit qu'elle a pour équation $y = ax^2$.

Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$.



Les paraboles d'équations y = 2x² (tournée vers le haut) et y = −x²/2 (tournée vers le bas), toutes deux de sommet O.

Méthode : tracer la courbe de x ↦ ax²

1. **Lis** le signe de a : il dit si la parabole s'ouvre vers le haut ($a > 0$) ou vers le bas ($a < 0$).
2. **Dresse** un petit tableau : images de 0, 1, 2 et 3.
3. **Reporte** ces points, puis leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, car la fonction est paire.
4. **Relie** les points d'un trait régulier, arrondi au sommet O.

Un tracé, un piège, à toi

Exemple : tracer une parabole tournée vers le bas

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$. Ici $a = -\frac{1}{2} < 0$: la parabole est tournée vers le bas.

- Tableau de valeurs pour $x \geq 0$: $g(0) = 0$, $g(1) = -0{,}5$, $g(2) = -2$, $g(3) = -4{,}5$.
- Par parité, $g(-1) = -0{,}5$, $g(-2) = -2$ et $g(-3) = -4{,}5$.
- Tu places ces sept points, puis tu les relies par une courbe régulière. Le sommet $O(0, 0)$ est le point le plus haut.

Attention : le signe de a change tout

✗ « $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$, comme $x \mapsto x^2$. »

✓ Ici $a < 0$: g est strictement **décroissante** sur $[0, +\infty[$. Par exemple, $g(1) = -0{,}5$ et $g(2) = -2$.

Les courbes de $x \mapsto 2x^2$ et de $x \mapsto -2x^2$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Regarde toujours le signe de a avant d'écrire un tableau.

À toi : Comparer sans calculer

Soit $q(x) = -\frac{3}{4}x^2$. Sans calculer les images, compare $q(-5)$ et $q(-3)$, puis $q(-4)$ et $q(1)$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Quel est le signe de a ? Dans quel intervalle sont -5 et -3 ?

Indice 2

Pour $q(-4)$, utilise la parité : tu te ramènes à deux réels de $[0, +\infty[$.

Indice 3

Point délicat : $a < 0$, donc le sens de variation est celui d'une parabole tournée vers le bas.

Réponse

Ici $a = -\frac{3}{4} < 0$. D'après les variations de $x \mapsto ax^2$, q est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Comparaison de $q(-5)$ et $q(-3)$. On a $-5 < -3 \leq 0$ et q croît sur $]-\infty, 0]$, donc $q(-5) < q(-3)$. Contrôle : $-18{,}75 < -6{,}75$.

Comparaison de $q(-4)$ et $q(1)$. La fonction q est paire, donc $q(-4) = q(4)$. Or $0 \leq 1 < 4$ et q décroît sur $[0, +\infty[$, donc $q(4) < q(1)$. Contrôle : $-12 < -0{,}75$.

Conclusion. $q(-5) < q(-3)$ et $q(-4) < q(1)$.

La fonction x ↦ a/x

Une durée de trajet

Reprends le trajet de 120 km. La durée vaut $\frac{120}{v}$ heures : 4 h à 30 km/h, 3 h à 40 km/h, 2 h à 60 km/h, 1 h à 120 km/h. Plus la vitesse est grande, plus la durée est courte.

C'est une fonction de la forme $x \mapsto \frac{a}{x}$, avec $a = 120$. Elle n'est pas définie en 0 : on ne divise jamais par 0.

Devine : Une image d'un réel négatif

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3}{x}$. Que vaut $f(-1)$?

A. $f(-1) = 3$

Faux.

Diviser 3 par un nombre négatif donne un nombre négatif.

B. $f(-1) = -\dfrac{1}{3}$

Faux.

Tu as calculé $\dfrac{-1}{3}$; or $f(-1) = \dfrac{3}{-1}$.

C. $f(-1) = -3$

Juste.

Juste : $\dfrac{3}{-1} = -3$, l'opposé de $f(1) = 3$.

D. $f(-1)$ n'existe pas

Faux.

Seul 0 est interdit ; -1 appartient à $\mathbb{R}^*$.

Correction

$f(-1) = \dfrac{3}{-1} = -3$ et $f(1) = \dfrac{3}{1} = 3$.

Les images de deux réels opposés sont opposées : c'est l'idée d'une fonction impaire.

Comment varie $x \mapsto \dfrac{a}{x}$?

Pourquoi est-ce vrai ? On réduit $\dfrac{a}{x_2} - \dfrac{a}{x_1}$ au même dénominateur, $x_1 x_2$. Le signe du résultat dépend de a, de $x_1 - x_2$ et de $x_1 x_2$.

Le produit $x_1 x_2$ n'est positif que si x_1 et x_2 ont le même signe.

Parité et variations

Propriété : Parité et variations de la fonction x ↦ a/x

Soit a un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{a}{x}$.

- La fonction f est **impaire**.
- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x non nul, le réel $-x$ est non nul et $f(-x) = \dfrac{a}{-x} = -\dfrac{a}{x} = -f(x)$: f est impaire.

Étape 2. Soit x_1 et x_2 deux réels d'un **même** intervalle, $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, tels que $x_1 < x_2$. Alors

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}.$$

Étape 3. Les réels x_1 et x_2 ont le même signe, donc $x_1x_2 > 0$; de plus $x_1 - x_2 < 0$. Ainsi $f(x_2) - f(x_1)$ a le signe de $-a$: f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles si $a > 0$, strictement croissante si $a < 0$.

Vérifie : Un même intervalle

Dans la preuve, pourquoi prend-on x_1 et x_2 dans un même intervalle, $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$?

A. Pour que $x_1x_2 > 0$.

Juste.

Juste : deux réels de même signe ont un produit strictement positif.

B. Pour que $x_1 - x_2 < 0$.

Faux.

Cela vient seulement de $x_1 < x_2$, quel que soit l'intervalle.

C. Pour que $a > 0$.

Faux.

Le réel a est fixé par la fonction ; l'intervalle n'y change rien.

D. Pour que f soit impaire.

Faux.

L'imparité est établie à l'étape 1, sans cette condition.

Correction

Si x_1 et x_2 sont dans un même intervalle, ils ont le même signe, donc $x_1x_2 > 0$. Avec $x_1 - x_2 < 0$, le quotient

$$\frac{a(x_1 - x_2)}{x_1x_2}$$

a le signe de $-a$.

Si $x_1 < 0 < x_2$, le produit x_1x_2 est négatif et la conclusion change.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer deux quotients, **réduis au même dénominateur** :

$$\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1x_2}.$$

Tu étudies ensuite le signe de chaque morceau. Le dénominateur x_1x_2 n'est positif que si x_1 et x_2 sont du même côté de 0.

C'est pourquoi l'étude se fait sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, **séparément**.

Exemple : comparer deux quotients

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3}{x}$, avec $a = 3 > 0$. D'après les variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Comme $1 < 2$, on a $f(1) > f(2)$: $3 > 1{,}5$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -\dfrac{2}{x}$, avec $a = -2 < 0$: g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Comme $1 < 4$, on a $g(1) < g(4)$: $-2 < -0{,}5$.

Dans le tableau de variations ci-dessous, une **double barre** marque la valeur interdite 0 : la fonction n'y est pas définie.

Tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par f(x) = 3/x : la double barre marque la valeur interdite 0.

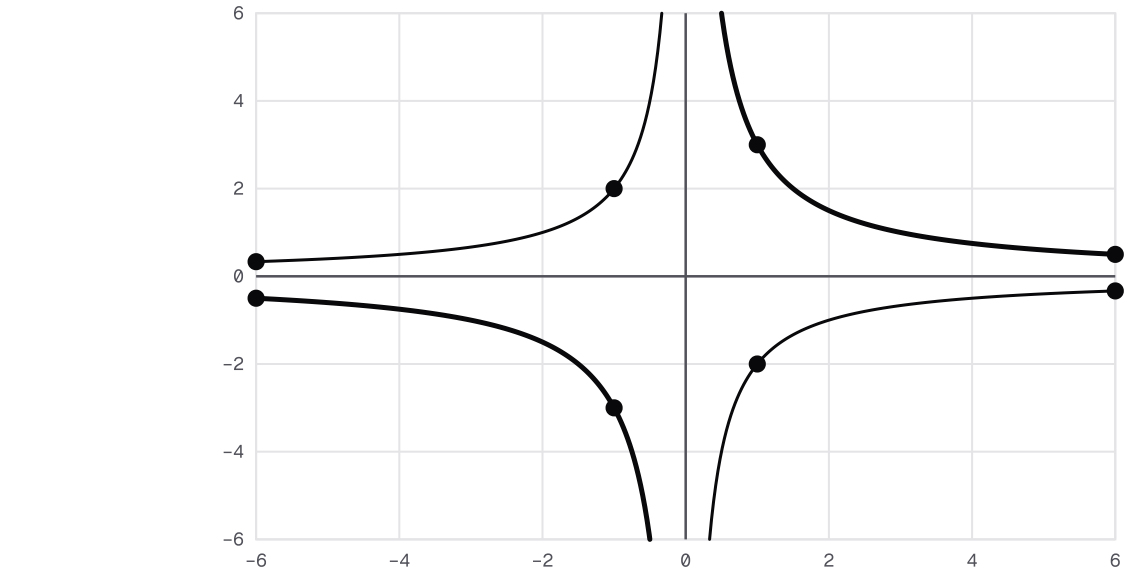
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

L'hyperbole

Définition : Hyperbole d'équation y = a/x

Soit a un réel non nul. Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ s'appelle une **hyperbole** de **centre** O. On dit qu'elle a pour équation $y = \dfrac{a}{x}$.

Elle est formée de deux **branches**, l'une formée des points d'abscisse $x < 0$, l'autre des points d'abscisse $x > 0$, symétriques l'une de l'autre par rapport au point O.



Les hyperboles d'équations y = 3/x et y = −2/x, de centre O, chacune formée de deux branches.

Exemple : près de 0 et pour x grand

Pour $f(x) = \dfrac{3}{x}$ et $x > 0$:

- près de 0 : $f(0{,}1) = 30$, $f(0{,}01) = 300$, $f(0{,}001) = 3\,000$. Les images deviennent de plus en plus grandes.
- pour x grand : $f(10) = 0{,}3$, $f(100) = 0{,}03$, $f(1\,000) = 0{,}003$. Les images sont de plus en plus proches de 0, sans jamais l'atteindre, car $\dfrac{3}{x} \neq 0$.

Par imparité, la branche de gauche se déduit par symétrie par rapport à O.

Un piège, puis à toi

Attention : décroissante sur chaque intervalle, séparément

✗ « $f(x) = \dfrac{3}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$. »

✓ Elle est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, **séparément**. On a $-1 < 1$, et pourtant :

$$f(-1) = -3 < 3 = f(1).$$

Dans le tableau de variations, une double barre sépare les deux intervalles.

Trouve l'erreur : Une comparaison à vérifier

Un élève écrit : « $-2 < 3$ et $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}$ est décroissante, donc $f(-2) > f(3)$. » Que penses-tu de ce raisonnement ?

A. Il est juste.

Faux.

Calcule : $f(-2) = -1{,}5$ et $f(3) = 1$, donc $f(-2) < f(3)$.

B. Faux : f est croissante sur $\mathbb{R}^*$, car son coefficient est positif.

Faux.

Avec $a = 3 > 0$, f est décroissante sur chaque intervalle.

C. Faux : -2 et 3 sont de part et d'autre de 0.

Juste.

Juste : le sens de variation ne vaut que sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$.

D. Faux : $f(-2)$ n'existe pas.

Faux.

Seul 0 est interdit ; $f(-2) = -1{,}5$.

Correction

Le sens de variation de f ne vaut que sur un intervalle qui ne contient pas 0. Or $-2 < 0 < 3$: la règle ne s'applique pas à ces deux réels.

Le calcul tranche : $f(-2) = \dfrac{3}{-2} = -1{,}5$ et $f(3) = 1$, donc $f(-2) < f(3)$.

La conclusion de l'élève est fausse.

À toi : Comparer des images

Soit $g(x) = -\dfrac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Compare $g(-3)$ et $g(-1)$, puis $g(0{,}5)$ et $g(2)$, sans calculer d'abord. Vérifie ensuite par le calcul. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère le signe de a : il donne le sens de variation sur chaque intervalle.

Indice 2

-3 et -1 sont dans $]-\infty, 0[$; $0{,}5$ et 2 sont dans $]0, +\infty[$.

Indice 3

Point délicat : $a = -2 < 0$, donc g est croissante sur chaque intervalle, pas décroissante.

Réponse

Ici $a = -2 < 0$. D'après les variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Sur $]-\infty, 0[$. On a $-3 < -1 < 0$, donc $g(-3) < g(-1)$. Calcul : $g(-3) = \dfrac{2}{3}$ et $g(-1) = 2$.

Sur $]0, +\infty[$. On a $0 < 0{,}5 < 2$, donc $g(0{,}5) < g(2)$. Calcul : $g(0{,}5) = -4$ et $g(2) = -1$.

Conclusion. $g(-3) < g(-1)$ et $g(0{,}5) < g(2)$: les calculs confirment la prévision.

La forme canonique d'un trinôme

Des valeurs qui se répètent

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. Voici quelques images : $f(0) = 5$, $f(1) = -1$, $f(2) = -3$, $f(3) = -1$, $f(4) = 5$.

Les valeurs se répètent de part et d'autre de 2 : $f(1) = f(3)$ et $f(0) = f(4)$. La plus petite valeur du tableau, -3, est atteinte en 2.

Devine : Une image prévue

Avec ce tableau, quelle égalité prévois-tu pour $f(5)$?

A. $f(5) = f(1)$

Faux.

1 est à 1 de 2, alors que 5 en est à 3.

B. $f(5) = f(0)$

Faux.

0 est à 2 de 2 ; il faut un réel à 3 de 2, à gauche.

C. $f(5) = 5$

Faux.

5 est l'image de 0 et de 4, pas celle de 5.

D. $f(5) = f(-1)$

Juste.

Juste : $5 = 2 + 3$ et $-1 = 2 - 3$.

Correction

Les valeurs se répètent à égale distance de 2. Or $5 = 2 + 3$ et $-1 = 2 - 3$: on prévoit $f(5) = f(-1)$.

Contrôle :

$$f(5) = 50 - 40 + 5 = 15,$$
$$f(-1) = 2 + 8 + 5 = 15.$$

En clair. Développe $2(x-2)^2 - 3$: pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 2(x-2)^2 - 3 &= 2x^2 - 8x + 8 - 3 \\ &= 2x^2 - 8x + 5. \end{aligned}$$

Tout trinôme s'écrit ainsi, avec un carré.

Pourquoi est-ce vrai ? On choisit α pour retrouver le terme en x. Il reste alors une constante, que l'on calcule en un point bien choisi.

La forme canonique

Propriété : Forme canonique d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On pose

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Alors, pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de $f(x)$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x, $a(x-\alpha)^2 = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2$. Or $-2a\alpha = -2a \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = b$, donc $a(x-\alpha)^2 = ax^2 + bx + a\alpha^2$.

Étape 2. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - a(x-\alpha)^2 = c - a\alpha^2$: cette différence est un nombre k qui ne dépend pas de x.

Étape 3. Pour $x = \alpha$, on obtient $f(\alpha) - 0 = k$, donc $k = \beta$. Par conséquent, pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Vérifie : La constante

Dans la preuve, la différence $f(x) - a(x-\alpha)^2$ est une constante k. Comment trouve-t-on k ?

A. On remplace x par α.

Juste.

Juste : le carré s'annule, et il reste $k = f(\alpha) = \beta$.

B. On la lit : $k = c$.

Faux.

En général $k = c - a\alpha^2$, qui n'est pas c.

C. On prend $k = b$.

Faux.

Le coefficient b a déjà servi à fixer α.

D. On divise $f(x)$ par a.

Faux.

Diviser par a ne fait apparaître aucune constante.

Correction

Pour $x = \alpha$, on a $a(\alpha - \alpha)^2 = 0$.

L'égalité $f(x) - a(x-\alpha)^2 = k$, écrite pour $x = \alpha$, donne alors $f(\alpha) = k$. Donc $k = \beta$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux gestes à retenir.

- Le **terme en** x fixe α : le développement de $a(x-\alpha)^2$ donne $-2a\alpha x$, qui doit valoir bx.
- La **constante** se trouve en un seul point : pour $x = \alpha$, le carré s'annule et il reste $\beta = f(\alpha)$.

Exemple : une forme canonique pas à pas

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$: $a = 2, b = -8, c = 5$.

- $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{4} = 2$.
- $\beta = f(2) = 8 - 16 + 5 = -3$.
- D'après la forme canonique d'un trinôme, pour tout réel x, $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$.
- Contrôle en $x = 0$: $2 \times 4 - 3 = 5 = f(0)$.

Un coefficient négatif, un piège, à toi

Exemple : un coefficient a négatif

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x + 3$: $a = -1, b = 2, c = 3$.

- $\alpha = -\dfrac{2}{2 \times (-1)} = 1$ et $\beta = g(1) = -1 + 2 + 3 = 4$.
- D'après la forme canonique, pour tout réel x, $g(x) = -(x-1)^2 + 4$.
- Contrôle en $x = 3$: $-(3-1)^2 + 4 = 0$, et $g(3) = -9 + 6 + 3 = 0$.

Le signe moins se place devant le carré : $a = -1$.

Attention : les signes de α et de β

✗ « $r(x) = 2(x+3)^2 - 5$, donc $\alpha = 3$. »

✓ On écrit $x + 3 = x - (-3)$: $\alpha = -3$ et $\beta = -5$.

Autre piège : β n'est pas c. Pour $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, on a $\beta = -3$, et non 5.

À toi : Une forme canonique

Soit $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Écris $p(x)$ sous forme canonique, puis vérifie ton résultat en un point.

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Repère a, b et c, puis calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Indice 2

Ici $2a = 1$: le calcul de α est court. Calcule ensuite $\beta = p(\alpha)$, en gardant les parenthèses.

Indice 3

Point délicat : si α est négatif, $x - \alpha$ s'écrit comme une somme ; et β n'est pas c.

Réponse

Ici $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -4$.

Calcul de α et de β.

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = -1, \\ \beta &= p(-1) \\ &= \frac{1}{2} - 1 - 4 = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Forme canonique. D'après la forme canonique, pour tout réel x, $p(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2}$.

Contrôle en $x = 1$. $\frac{1}{2} \times 4 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}$, et $p(1) = \frac{1}{2} + 1 - 4 = -\frac{5}{2}$.

Variations et courbe d'un trinôme

Les variations

Devine : La plus petite valeur

Tu sais que $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$. Quelle est la plus petite valeur de $f(x)$ quand x parcourt $\mathbb{R}$?

A. -3, atteinte en 2

Juste.

Juste : un carré est positif ou nul, et il est nul en $x = 2$.

B. 5, atteinte en 0

Faux.

$f(0) = 5$, mais $f(2) = -3$ est plus petit.

C. -3, atteinte en -2

Faux.

$(x-2)^2$ s'annule en 2, pas en -2 : $f(-2) = 29$.

D. Il n'y en a pas

Faux.

$f(x) - (-3) = 2(x-2)^2 \geq 0$: $f(x)$ ne descend jamais sous -3.

Correction
Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geq 0$, donc $2(x-2)^2 \geq 0$ et $f(x) \geq -3$.

De plus, $f(2) = -3$.

La plus petite valeur de $f(x)$ est donc -3, atteinte en 2 : c'est un minimum.

Le minimum se lit sur la forme canonique. Mais où la fonction croît-elle ?

Pourquoi est-ce vrai ? La différence $f(x_2) - f(x_1)$ fait apparaître deux carrés. Leur différence se factorise.

Le signe dépend alors de la position de x_1 et x_2 par rapport à α.

Propriété : Variations d'une fonction trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.

- Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$; elle admet un **minimum** égal à β, atteint en α.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$; elle admet un **maximum** égal à β, atteint en α.

Démonstration
Étape 1. D'après la forme canonique, pour tous réels x_1 et x_2,

$$f(x_2) - f(x_1) = a\left[(x_2-\alpha)^2 - (x_1-\alpha)^2\right] = a(x_2-x_1)(x_2+x_1-2\alpha).$$

Étape 2. Si $\alpha \leq x_1 < x_2$, alors $x_2 - x_1 > 0$ et $x_2 + x_1 - 2\alpha = (x_2-\alpha) + (x_1-\alpha) > 0$: $f(x_2) - f(x_1)$ a le signe de a. Si $x_1 < x_2 \leq \alpha$, alors $x_2 + x_1 - 2\alpha < 0$: $f(x_2) - f(x_1)$ a le signe de $-a$.

Étape 3. On en déduit le sens de variation sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$, selon le signe de a. Enfin, pour tout réel x, $f(x) - \beta = a(x-\alpha)^2$ est nul en α et a le signe de a ailleurs : β est un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

Vérifie : La bonne factorisation

Dans la preuve, quelle écriture de $f(x_2) - f(x_1)$ donne son signe ?

A. $a(x_2+x_1)(x_2-x_1-2\alpha)$
Faux.
Les signes sont échangés : $A - B = x_2 - x_1$ et $A + B = x_2 + x_1 - 2\alpha$.

B. $a(x_2-x_1)(x_2+x_1)$
Faux.

C'est le cas $\alpha = 0$ seulement ; il manque -2α.

C. $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - \alpha)$

Faux.

Il manque le facteur a, et α doit être compté deux fois.

D. $a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2\alpha)$

Juste.

Juste : c'est l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Correction

On pose $A = x_2 - \alpha$ et $B = x_1 - \alpha$. D'après la forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a(A^2 - B^2) \\ &= a(A - B)(A + B). \end{aligned}$$

Or $A - B = x_2 - x_1$ et $A + B = x_2 + x_1 - 2\alpha$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La forme canonique transforme $f(x_2) - f(x_1)$ en différence de deux carrés. La factorisation donne le signe :

$$\begin{aligned} &f(x_2) - f(x_1) \\ &= a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2\alpha). \end{aligned}$$

Le facteur $x_2 + x_1 - 2\alpha$ est positif si x_1 et x_2 sont à droite de α, négatif s'ils sont à gauche.

Le réel α joue le rôle de 0 pour $x \mapsto ax^2$.

Le tableau de variations

Exemple : les variations d'un trinôme

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 5 = 2(x - 2)^2 - 3$, pour tout réel x. Ici $a = 2 > 0$, $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

D'après les variations d'une fonction trinôme, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Elle admet un minimum égal à -3, atteint en 2.

Contrôle : $f(0) = 5$, $f(2) = -3$, $f(3) = -1$.

Tableau de variations de f(x) = 2x² − 8x + 5 : minimum −3 atteint en 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-3	↗	

Un axe de symétrie

Le tableau de valeurs de la section précédente montrait $f(1) = f(3)$ et $f(0) = f(4)$. Les réels 1 et 3 sont à égale distance de 2, comme 0 et 4.

Pourquoi est-ce vrai ? Dans la forme canonique, $f(2+h)$ et $f(2-h)$ font apparaître h^2 et $(-h)^2$, qui sont égaux.

Propriété : Axe de symétrie de la courbe d'un trinôme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Pour tout réel h,

$$f(\alpha + h) = f(\alpha - h).$$

Dans un repère orthogonal, la courbe de f est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

Démonstration

Étape 1. D'après la forme canonique, avec $\beta = f(\alpha)$, pour tout réel h, $f(\alpha + h) = ah^2 + \beta$ et $f(\alpha - h) = a(-h)^2 + \beta = ah^2 + \beta$. Donc $f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$.

Étape 2. Soit $M(x, y)$ un point de la courbe et $h = x - \alpha$. Si $h = 0$, M est sur la droite d'équation $x = \alpha$: il est son propre symétrique. Si $h \neq 0$, le point $M'(\alpha - h, y)$ est aussi sur la courbe, d'après l'étape 1. Le milieu de $[MM']$ est le point (α, y), situé sur la droite d'équation $x = \alpha$, et la droite (MM') est parallèle à l'axe des abscisses, donc perpendiculaire à cette droite dans un repère orthogonal.

Étape 3. Ainsi le symétrique de tout point de la courbe par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ est sur la courbe : la courbe est symétrique par rapport à cette droite.

Vérifie : Symétriques par rapport à une droite

Dans la preuve, avec $h = x - \alpha \neq 0$, les points $M(\alpha + h, y)$ et $M'(\alpha - h, y)$ sont sur la courbe. Pourquoi M' est-il le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$?

A. Car M et M' ont la même abscisse, sur une même verticale.

Faux.

Leurs abscisses sont $\alpha + h$ et $\alpha - h$: elles diffèrent si $h \neq 0$.

B. Car le milieu de $[MM']$ est sur la droite, perpendiculaire à (MM').

Juste.

Juste : ce sont les deux conditions de la symétrie axiale, vues au collège.

C. Car la longueur MM' vaut $2|h|$, qui ne dépend que du réel h choisi.

Faux.

Une longueur ne suffit pas : il faut une position par rapport à la droite.

D. Car la fonction f est paire, comme la fonction carré.

Faux.

f n'est pas paire en général : l'axe est la droite d'équation $x = \alpha$.

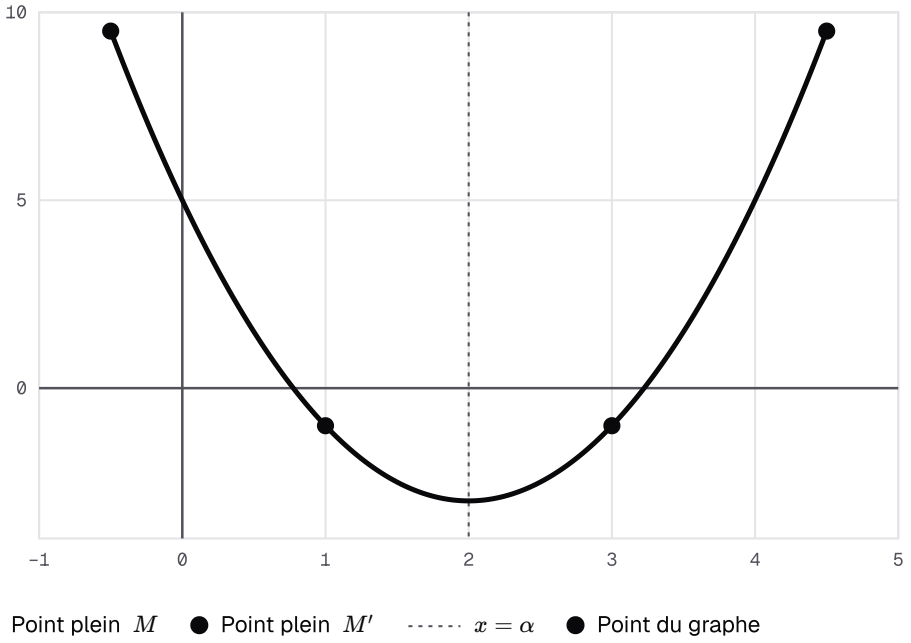
Correction

Le milieu de $[MM']$ a pour ordonnée y et pour abscisse :

$$\frac{(\alpha + h) + (\alpha - h)}{2} = \alpha.$$

Il est donc sur la droite d'équation $x = \alpha$.

La droite (MM') est parallèle à l'axe des abscisses, donc perpendiculaire à cette droite dans un repère orthogonal. Ce sont les deux conditions de la symétrie axiale.



Exemple de la situation de l'activité avec f(x) = 2x² − 8x + 5, où α = 2 et h = 1 : deux points M et M' de même ordonnée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux réels **à égale distance de** α, $\alpha + h$ et $\alpha - h$, ont la même image. La forme canonique le montre : $h^2 = (-h)^2$.

Sur la courbe, les deux points ont la même ordonnée. Leur milieu est sur la droite d'équation $x = \alpha$, et le segment qui les joint est horizontal.

Un point de la courbe situé sur cette droite ($h = 0$) est son propre symétrique.

Exemple : des points symétriques

Soit $g(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$, pour tout réel x, avec $\alpha = 1$. D'après l'axe de symétrie de la courbe d'un trinôme, pour tout réel h :

$$g(1+h) = g(1-h).$$

- Avec $h = 1$: $g(2) = g(0) = 3$.
- Avec $h = 2$: $g(3) = g(-1) = 0$.

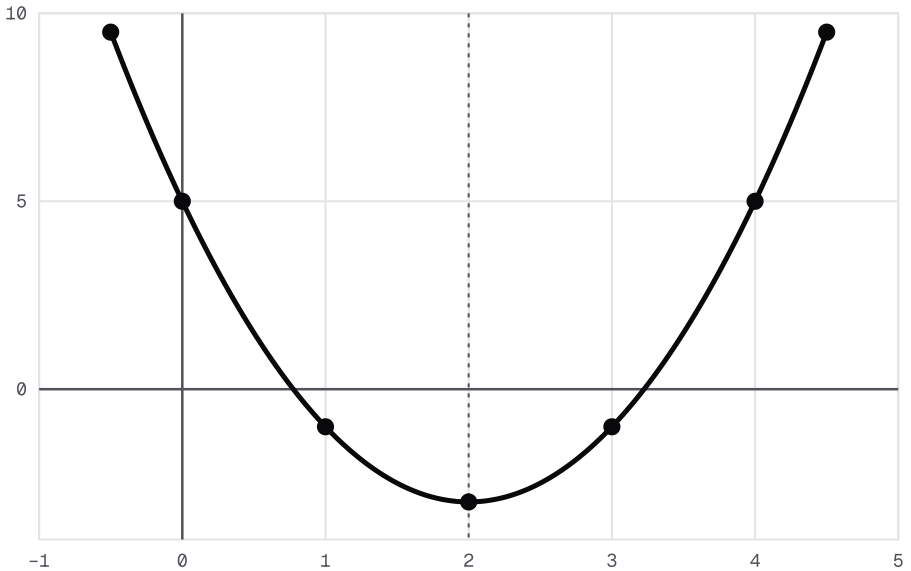
La courbe passe par $(0, 3)$ et $(2, 3)$, puis par $(-1, 0)$ et $(3, 0)$. Ces points sont symétriques deux à deux par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

La parabole de sommet S

Définition : Parabole de sommet S

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c$. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ s'appelle une **parabole** de **sommet** $S(\alpha, \beta)$ et d'**axe** la droite d'équation $x = \alpha$.

Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et tournée vers le bas si $a < 0$.



$y = 2x^2 - 8x + 5$ ● Point plein $S(2, -3)$ ● Point plein A ● Point plein A' ● Point plein B ● Point plein B' ------ $x = 2$ ● Point du graphe

La parabole d'équation y = 2x² − 8x + 5, de sommet S(2, −3) et d'axe la droite d'équation x = 2, tracée en pointillés.

Méthode : étudier et tracer un trinôme

1. **Trouve** $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, puis l'image $\beta = f(\alpha)$.

2. **Écris** $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$; contrôle l'égalité pour une valeur de x.
3. **Déduis** les variations du signe de a, dans un tableau.
4. **Marque** le sommet $S(\alpha, \beta)$; trace en pointillés la droite d'équation $x = \alpha$.
5. **Ajoute** des points $(\alpha + h, f(\alpha + h))$ et leurs reflets $(\alpha - h, f(\alpha + h))$, puis trace la parabole.

À toi, puis le Coin devoir

À toi : Une étude complète

Soit $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Tu as trouvé $p(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2}$. Dresse le tableau de variations de p. Donne le sommet et l'axe de sa courbe. Calcule $p(1)$ et $p(2)$, puis donne les points symétriques. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le signe de $a = \frac{1}{2}$ donne le sens de la parabole.

Indice 2

Lis α et β sur la forme canonique : le sommet est $S(\alpha, \beta)$. Puis écris 1 et 2 sous la forme $\alpha + h$.

Indice 3

Point délicat : le symétrique de $\alpha + h$ est $\alpha - h$, et non $-(\alpha + h)$; l'axe n'est pas l'axe des ordonnées.

Réponse

Ici $a = \frac{1}{2} > 0$, $\alpha = -1$ et $\beta = -\frac{9}{2}$.

Variations. D'après les variations d'une fonction trinôme, p est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. Son minimum est $-\frac{9}{2}$, atteint en -1.

Sommet et axe. La courbe est une parabole de sommet $S\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$, d'axe la droite d'équation $x = -1$.

Points symétriques. $p(1) = -\frac{5}{2}$ et $p(2) = 0$. Or $1 = -1 + 2$ et $2 = -1 + 3$: leurs symétriques par rapport à -1 sont -3 et -4. Par symétrie, $p(-3) = -\frac{5}{2}$ et $p(-4) = 0$.

Remarque : Coin devoir : rédiger l'étude d'un trinôme

En devoir, l'étude d'un trinôme se rédige en trois phrases. Pour $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, écris :

« On a $\alpha = -\frac{b}{2a} = 1$ et $\beta = g(1) = 4$. D'après la forme canonique, $g(x) = -(x-1)^2 + 4$ pour tout réel x. Comme $a = -1 < 0$, g est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$; son maximum est 4, atteint en 1. »

Nomme toujours la propriété employée.

Fonction homographique : forme réduite

Un quotient de deux expressions affines

Considère le quotient $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Calcule quelques images : $f(2) = 5$, $f(4) = 3$, $f(11) = 2{,}3$, $f(101) = 2{,}03$.

Quand x devient grand, les images sont de plus en plus proches de 2, en restant au-dessus.

Devine : Une valeur interdite

Pour quel réel x le quotient $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ n'est-il pas défini ?

A. $x = -\dfrac{1}{2}$

Faux.

En $-\dfrac{1}{2}$, c'est le numérateur qui s'annule : $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

B. $x = 1$

Juste.

Juste : $1 - 1 = 0$, et on ne divise pas par 0.

C. $x = 2$

Faux.

$f(2) = 5$ existe.

D. Aucun réel

Faux.

Le dénominateur $x - 1$ s'annule pour un réel.

Correction

$f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$.

Le réel 1 est la **valeur interdite** : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Définition : Fonction homographique

Soit a, b, c, d quatre réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$. La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

s'appelle une **fonction homographique**. Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, car $cx + d = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{d}{c}$.

Exemple : reconnaître une fonction homographique

- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$: $a=2, b=1, c=1, d=-1$. On a $c \neq 0$ et $ad-bc = -2-1 = -3 \neq 0$. C'est une fonction homographique, et $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- $g(x) = \dfrac{-x+3}{2x+4}$: $a=-1, b=3, c=2, d=4$. On a $ad-bc = -4-6 = -10 \neq 0$, et $-\dfrac{d}{c} = -2$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

La forme réduite

En clair. Pour $u(x) = \dfrac{x-4}{x-2}$, on écrit le numérateur avec le dénominateur : $x-4 = (x-2)-2$. Donc, pour tout réel $x \neq 2$:

$$u(x) = 1 - \frac{2}{x-2}$$

Pourquoi est-ce vrai en général ? On fait apparaître $cx+d$ dans $ax+b$, comme dans une division avec reste.

Propriété : Forme réduite d'une fonction homographique

Soit f la fonction homographique définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, avec $c \neq 0$ et $ad-bc \neq 0$. On pose

$$\alpha = -\frac{d}{c}, \quad \beta = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad k = \frac{bc-ad}{c^2}.$$

Alors $k \neq 0$ et, pour tout réel $x \neq \alpha$, $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$.

Démonstration

Étape 1. Comme $c \neq 0$, on peut écrire $cx+d = c(x-\alpha)$ pour tout réel x.

Étape 2. Pour tout réel x, $\beta(cx+d) = \dfrac{a}{c}(cx+d) = ax + \dfrac{ad}{c}$, donc

$$ax+b = \beta(cx+d) + b - \frac{ad}{c} = \beta(cx+d) + \frac{bc-ad}{c}.$$

Étape 3. Pour $x \neq \alpha$, on divise par $cx+d = c(x-\alpha)$, qui n'est pas nul : $f(x) = \beta + \dfrac{bc-ad}{c \times c(x-\alpha)} = \beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$.

Étape 4. Enfin $k \neq 0$, car $bc-ad = -(ad-bc) \neq 0$.

Vérifie : Diviser sans risque

Dans la preuve, pourquoi a-t-on le droit de diviser par $cx+d$?

A. Car $c \neq 0$.

Faux.
Avec $c \neq 0$, $cx + d$ peut encore s'annuler : en $x = \alpha$.

B. Car $ad - bc \neq 0$.

Faux.
Cette condition donne $k \neq 0$; elle ne concerne pas le dénominateur.

C. Car $k \neq 0$.

Faux.
k est au numérateur de la fraction finale.

D. Car $x \neq \alpha$.

Juste.
Juste : $cx + d = c(x - \alpha)$ n'est nul qu'en α.

Correction
On a $cx + d = c(x - \alpha)$, avec $c \neq 0$. Ce produit n'est nul que si $x = \alpha$.

Pour $x \neq \alpha$, on peut donc diviser par $cx + d$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste de la preuve : écrire **le numérateur à l'aide du dénominateur**. On cherche β tel que, pour tout réel x :

$$ax + b = \beta(cx + d) + r,$$

avec un reste r qui ne dépend pas de x. Puis on divise par $cx + d$, qui n'est pas nul hors de la valeur interdite.

Exemple : avec les formules

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = \dfrac{-x + 3}{2x + 4}$: $a = -1, b = 3, c = 2, d = 4$.

- $\alpha = -\dfrac{d}{c} = -2$ et $\beta = \dfrac{a}{c} = -\dfrac{1}{2}$.
- $k = \dfrac{bc - ad}{c^2} = \dfrac{6 + 4}{4} = \dfrac{5}{2}$.
- D'après la forme réduite, pour tout réel $x \neq -2$, $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{k}{x + 2}$ avec $k = \dfrac{5}{2}$, soit $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(x + 2)}$.
- Contrôle en $x = 0$: $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4} = g(0)$.

Un piège, puis à toi

Attention : vérifier que ad − bc n'est pas nul

✗ « $x \mapsto \dfrac{3x+6}{x+2}$ est une fonction homographique. »

✓ Ici $ad - bc = 3 \times 2 - 6 \times 1 = 0$. Pour tout réel $x \neq -2$:

$$\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} = 3.$$

La courbe est une droite privée d'un point, pas une hyperbole. Vérifie toujours $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ avant d'appliquer les formules.

Vérifie : Une fonction qui n'en est pas une

Parmi ces fonctions, laquelle n'est **pas** une fonction homographique ?

A. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

Faux.

$ad - bc = -1 - 1 = -2 \neq 0$: elle est homographique.

B. $x \mapsto \dfrac{2x}{x+3}$

Faux.

$ad - bc = 6 - 0 = 6 \neq 0$: elle est homographique.

C. $x \mapsto \dfrac{4x-2}{2x-1}$

Juste.

Juste : $ad - bc = -4 + 4 = 0$; elle vaut 2 pour $x \neq \dfrac{1}{2}$.

D. $x \mapsto \dfrac{1}{x+5}$

Faux.

$a = 0, b = 1, c = 1, d = 5$: $ad - bc = -1 \neq 0$.

Correction

On calcule $ad - bc$ pour chacune : -2, 6, 0 et -1. Seule $x \mapsto \dfrac{4x-2}{2x-1}$ donne 0.

En effet $4x - 2 = 2(2x - 1)$, donc elle vaut 2 pour tout $x \neq \dfrac{1}{2}$.

À toi : Une forme réduite

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Écris $f(x)$ sous la forme $\beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$, puis vérifie en $x = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Calcule $\alpha = -\dfrac{d}{c}$ et $\beta = \dfrac{a}{c}$, puis $k = \dfrac{bc - ad}{c^2}$.

Indice 2

Tu peux aussi écrire $2x+1 = 2(x-1) + \ldots$ et compléter.

Indice 3

Point délicat : d est négatif ; garde ses parenthèses dans le produit ad.

Réponse

Ici $a=2, b=1, c=1, d=-1$, et $ad-bc = -3 \neq 0$.

Calcul de α, β et k. On trouve $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et

$$\begin{aligned} k &= \frac{1\times 1 - 2\times(-1)}{1} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Forme réduite. D'après la forme réduite, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$. On le retrouve avec $2x+1 = 2(x-1)+3$.

Contrôle en $x=0$. $2 + \dfrac{3}{-1} = -1$, et $f(0) = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Variations et courbe d'une fonction homographique

Les variations

Devine : Quand x grandit

Soit $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$. Sur $]1, +\infty[$, quand x augmente, $x-1$ augmente. Que fait $f(x)$?

A. Elle augmente.

Faux.

Le quotient $\dfrac{3}{x-1}$ diminue quand son dénominateur positif augmente.

B. Elle diminue.

Juste.

Juste : $\dfrac{3}{x-1}$ diminue, donc $2 + \dfrac{3}{x-1}$ aussi.

C. Elle reste égale à 2.

Faux.

$f(2) = 5$ et $f(4) = 3$: elle n'est pas constante.

D. Elle change de signe.

Faux.

Sur $]1, +\infty[$, $\dfrac{3}{x-1} > 0$, donc $f(x) > 2$.

Correction

Sur $]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$. Quand x augmente, $x-1$ augmente, donc $\dfrac{3}{x-1}$ diminue.

Ainsi $f(x)$ diminue : par exemple $f(2) = 5$, $f(4) = 3$, $f(7) = 2{,}5$.

C'est le même mécanisme que pour $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec $x - \alpha$ à la place de x.

Pourquoi est-ce vrai ? On réduit $f(x_2) - f(x_1)$ au même dénominateur. Le produit $(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)$ est positif si x_1 et x_2 sont du même côté de α.

Propriété : Variations d'une fonction homographique

Soit f une fonction homographique, écrite sous la forme réduite $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$ avec $k \neq 0$.

- Si $k > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha, +\infty[$.
- Si $k < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$.

Démonstration

Étape 1. Soit x_1 et x_2 deux réels d'un **même** intervalle, $]-\infty, \alpha[$ ou $]\alpha, +\infty[$, tels que $x_1 < x_2$. D'après la forme réduite,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2 - \alpha} - \frac{k}{x_1 - \alpha} = \frac{k(x_1 - x_2)}{(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)}.$$

Étape 2. Les réels $x_1 - \alpha$ et $x_2 - \alpha$ ont le même signe, donc leur produit est strictement positif ; de plus $x_1 - x_2 < 0$.

Étape 3. Ainsi $f(x_2) - f(x_1)$ a le signe de $-k$: f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles si $k > 0$, strictement croissante si $k < 0$.

Vérifie : Un produit positif

Dans la preuve, pourquoi le produit $(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)$ est-il strictement positif ?

A. Car x_1 et x_2 sont du même côté de α.
Juste.
Juste : $x_1 - \alpha$ et $x_2 - \alpha$ ont alors le même signe.

B. Car $x_1 < x_2$, donc l'écart est positif.
Faux.
L'ordre de x_1 et x_2 ne dit rien du signe de $x_1 - \alpha$.

C. Car le réel k est strictement positif.
Faux.
k n'apparaît pas dans ce produit, et il peut être négatif.

D. Car c'est le carré d'un nombre réel, toujours positif.
Faux.
Ce n'est un carré que si $x_1 = x_2$.

Correction

- Si x_1 et x_2 sont dans $]-\infty, \alpha[$, les deux facteurs sont négatifs.

- S'ils sont dans $]\alpha, +\infty[$, les deux facteurs sont positifs.

Dans les deux cas, le produit est strictement positif.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ est celui de $-k$, à condition que x_1 et x_2 soient **du même côté de** α.

C'est la preuve des variations de $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, avec $x - \alpha$ à la place de x. Le réel β disparaît dans la différence : il ne joue aucun rôle dans le sens de variation.

Le tableau de variations

Exemple : un réel k négatif

Soit $u(x) = \dfrac{x-4}{x-2} = 1 - \dfrac{2}{x-2}$, pour tout réel $x \neq 2$: $\alpha = 2, \beta = 1, k = -2 < 0$.

D'après les variations d'une fonction homographique, u est strictement croissante sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$. Contrôle sur $]2, +\infty[$: $u(3) = -1$ et $u(4) = 0$, et $-1 < 0$.

Attention : $1 < 3$ et pourtant $u(1) = 3 > u(3) = -1$. Les réels 1 et 3 sont de part et d'autre de 2 : ils ne sont pas dans un même intervalle.

Tableau de variations de u(x) = (x − 4)/(x − 2) : croissante de part et d'autre de la valeur interdite 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$u(x)$		↗	‖	↗	

Un centre de symétrie

Reprends $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$. On a $f(2) = 5$ et $f(0) = -1$: leur moyenne vaut $\dfrac{5 + (-1)}{2} = 2$. De même, $f(4) = 3$ et $f(-2) = 1$, de moyenne 2.

Pourquoi est-ce vrai ? Les réels $1 + h$ et $1 - h$ donnent $\dfrac{3}{h}$ et $-\dfrac{3}{h}$, qui s'annulent dans la somme.

Propriété : Centre de symétrie de la courbe d'une fonction homographique

Soit f une fonction homographique, écrite sous la forme réduite $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$ avec $k \neq 0$. Pour tout réel h non nul, les réels $\alpha + h$ et $\alpha - h$ appartiennent à D_f et

$$f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta.$$

La courbe de f est donc symétrique par rapport au point $\Omega(\alpha, \beta)$.

Démonstration

Étape 1. Soit h un réel non nul. Les réels $\alpha + h$ et $\alpha - h$ sont différents de α, donc ils appartiennent à D_f.

Étape 2. D'après la forme réduite, $f(\alpha + h) = \beta + \dfrac{k}{h}$ et $f(\alpha - h) = \beta - \dfrac{k}{h}$. Donc $f(\alpha + h) + f(\alpha - h) = 2\beta$.

Étape 3. Soit $M(\alpha + h, f(\alpha + h))$ et $M'(\alpha - h, f(\alpha - h))$, deux points de la courbe. Le milieu de $[MM']$ a pour abscisse α et pour ordonnée $\dfrac{f(\alpha + h) + f(\alpha - h)}{2} = \beta$: c'est Ω.

Étape 4. Tout point de la courbe a une abscisse $x \neq \alpha$; avec $h = x - \alpha$, il s'écrit $M(\alpha + h, f(\alpha + h))$, et son symétrique par rapport à Ω est M', qui est sur la courbe. Donc Ω est un centre de symétrie de la courbe.

Vérifie : Le milieu

Dans la preuve, quelle égalité dit que Ω est le milieu de $[MM']$?

A. $f(\alpha + h) = f(\alpha - h)$

Faux.

C'est la condition d'un axe de symétrie, pas d'un centre.

B. $\dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha - h)}{2} = \beta$

Faux.

La demi-différence vaut $\dfrac{k}{h}$; c'est la demi-somme qui vaut β.

C. $f(\alpha + h) = -f(\alpha - h)$

Faux.

Ce serait un centre en $(\alpha, 0)$, pas en (α, β).

D. $\dfrac{f(\alpha + h) + f(\alpha - h)}{2} = \beta$

Juste.

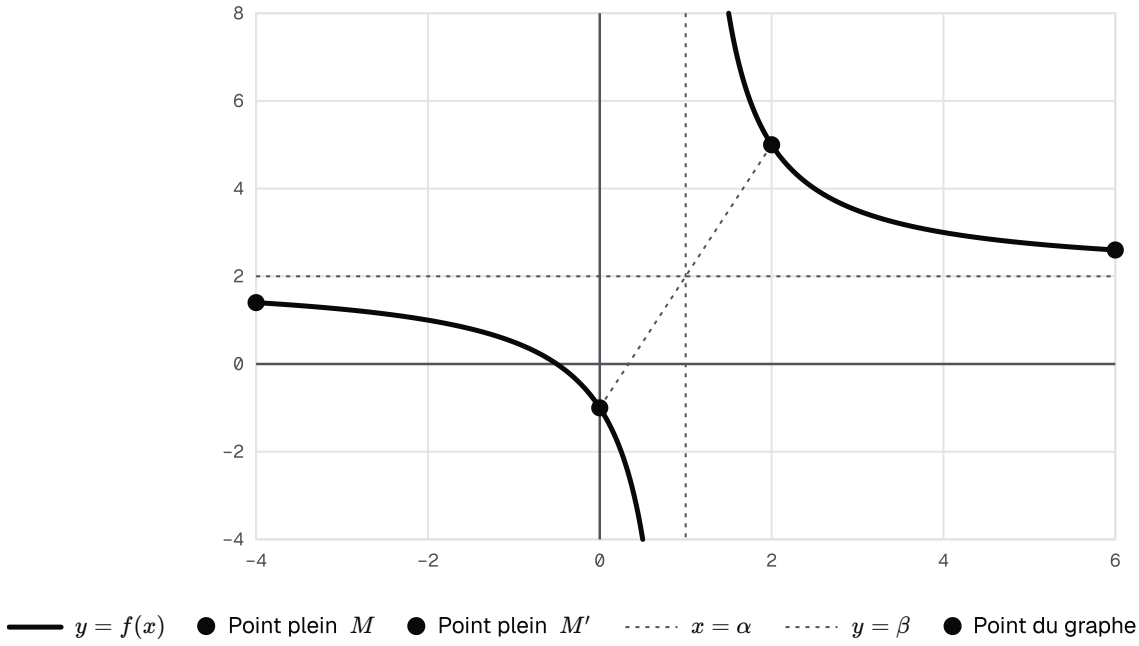
Juste : c'est l'ordonnée du milieu de $[MM']$.

Correction

Le milieu de $[MM']$ a pour abscisse $\dfrac{(\alpha + h) + (\alpha - h)}{2} = \alpha$. Son ordonnée vaut :

$$\frac{f(\alpha + h) + f(\alpha - h)}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta.$$

Ce milieu est donc $\Omega(\alpha, \beta)$.



Avec f(x) = 2 + 3/(x − 1), donc α = 1, β = 2 et h = 1 : le segment [MM'] passe par le point Ω où se croisent les deux pointillés.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour un centre de symétrie, on **additionne** les images de deux réels à égale distance de α. Les termes $\frac{k}{h}$ et $-\frac{k}{h}$ s'annulent, et la somme vaut 2β.

Le milieu des deux points est donc $\Omega(\alpha, \beta)$. Tout point de la courbe s'écrit ainsi, avec $h = x - \alpha$.

Pour un axe de symétrie, au contraire, on montrait que les deux images sont égales.

Exemple : des points symétriques par rapport au centre

Soit $u(x) = 1 - \dfrac{2}{x-2}$, de centre $\Omega(2, 1)$. D'après le centre de symétrie de la courbe d'une fonction homographique, pour tout réel h non nul :

$$u(2+h) + u(2-h) = 2.$$

- Avec $h = 1$: $u(3) = -1$ et $u(1) = 3$; leur somme vaut 2.
- Avec $h = 2$: $u(4) = 0$ et $u(0) = 2$; leur somme vaut 2.

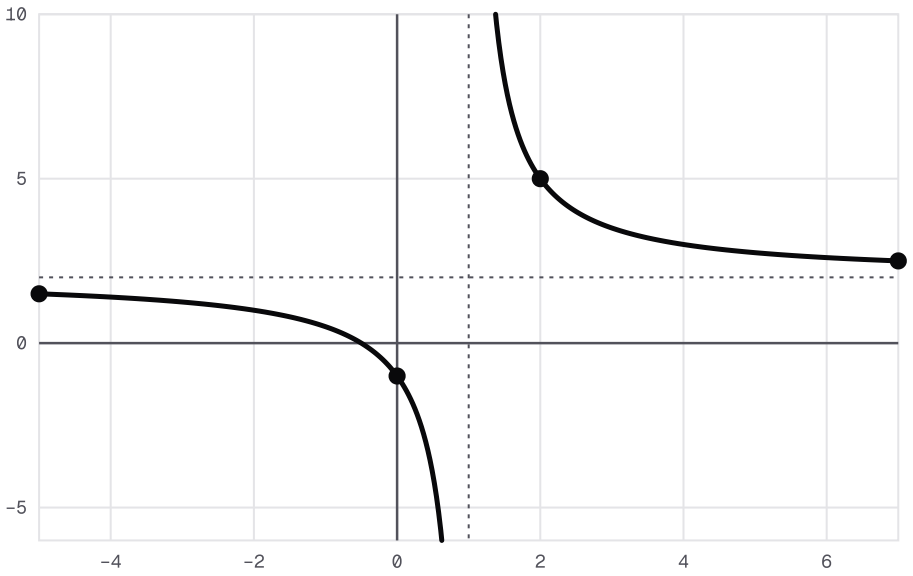
Les points $(3, -1)$ et $(1, 3)$ sont symétriques par rapport à Ω, comme $(4, 0)$ et $(0, 2)$.

L'hyperbole de centre Ω

Définition : Hyperbole de centre Ω

Soit f une fonction homographique, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$, et $\alpha = -\dfrac{d}{c}$, $\beta = \dfrac{a}{c}$. La courbe représentative de f s'appelle une **hyperbole** de **centre** $\Omega(\alpha, \beta)$.

Elle est formée de deux **branches**, l'une formée des points d'abscisse $x < \alpha$, l'autre des points d'abscisse $x > \alpha$, symétriques l'une de l'autre par rapport au point Ω.



L'hyperbole d'équation y = (2x + 1)/(x − 1), de centre Ω(1, 2) ; les droites d'équations x = 1 et y = 2 sont en pointillés.

Méthode : étudier et tracer une fonction homographique

1. **Contrôle** les conditions $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$; la valeur interdite est $\alpha = -\dfrac{d}{c}$.
2. **Passe** à la forme réduite $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x - \alpha}$; teste-la pour une valeur de x.
3. **Déduis** les variations du signe de k ; une double barre sépare les deux intervalles.
4. **Dessine** en pointillés les droites d'équations $x = \alpha$ et $y = \beta$; elles se coupent en $\Omega(\alpha, \beta)$.
5. **Calcule** des images à droite de α ; leurs symétriques par rapport à Ω donnent la branche de gauche.

À toi, puis le Coin devoir

À toi : Une étude complète

Soit $w(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$. Écris $w(x)$ sous forme réduite. Dresse le tableau de variations de w et donne le centre de sa courbe. Calcule $w(1)$, puis déduis-en l'image de -3 par symétrie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Repère a, b, c et d ; contrôle $ad - bc \neq 0$, puis calcule α, β et k.
Indice 2
Le signe de k donne le sens de variation sur chaque intervalle ; écris 1 et -3 sous la forme $\alpha + h$ et $\alpha - h$.
Indice 3
Point délicat : la somme des images de deux réels symétriques par rapport à α vaut 2β, et non 0.

Réponse
Ici $a = 1, b = 3, c = 1, d = 1$, et $ad - bc = -2 \neq 0$.

Forme réduite. $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $k = \dfrac{3 \times 1 - 1 \times 1}{1} = 2$. D'après la forme réduite, pour tout réel $x \neq -1$, $w(x) = 1 + \dfrac{2}{x+1}$.

Variations et centre. Comme $k = 2 > 0$, d'après les variations d'une fonction homographique, w est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$. Sa courbe est une hyperbole de centre $\Omega(-1, 1)$.

Image de -3. $w(1) = \dfrac{4}{2} = 2$. Les réels 1 et -3 sont symétriques par rapport à -1, donc $w(1) + w(-3) = 2\beta = 2$, et $w(-3) = 0$. Contrôle : $w(-3) = \dfrac{0}{-2} = 0$.

Remarque : **Coin devoir : rédiger l'étude d'une fonction homographique**

En devoir, chaque résultat cite la propriété employée. Pour $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$, écris :

« On a $c = 1 \neq 0$ et $ad - bc = -3 \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D'après la forme réduite, $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$. Comme $k = 3 > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. Sa courbe est une hyperbole de centre $\Omega(1, 2)$. »

Fonctions périodiques

Des phénomènes qui se répètent

La grande aiguille d'une horloge reprend la même position toutes les 60 minutes. Les jours, les saisons, les battements du cœur se répètent aussi.

En mathématiques, une fonction qui se répète ainsi est **périodique**. Le décalage qui ramène le même motif s'appelle une **période**.

Devine : Une valeur prévue

Une fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et $f(x+3) = f(x)$ pour tout réel x. On sait que $f(1) = 5$. Que vaut $f(7)$?

A. $f(7) = 5$

Juste.

Juste : $7 = 1 + 3 + 3$, donc $f(7) = f(4) = f(1)$.

B. $f(7) = 15$

Faux.

La période décale x ; elle ne multiplie pas les images.

C. $f(7) = 7$

Faux.

Rien ne relie l'image de 7 au nombre 7 lui-même.

D. On ne peut pas savoir

Faux.

On peut : on revient de 7 à 1 par pas de 3.

Correction

On applique deux fois l'égalité $f(x+3) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f(7) &= f(4+3) = f(4) \\ &= f(1+3) = f(1) = 5. \end{aligned}$$

On revient de 7 à 1 en reculant deux fois de 3.

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et T un réel strictement positif. On dit que f est **périodique de période** T si, pour tout réel x de D_f :

- $x + T \in D_f$ et $x - T \in D_f$;
- $f(x + T) = f(x)$.

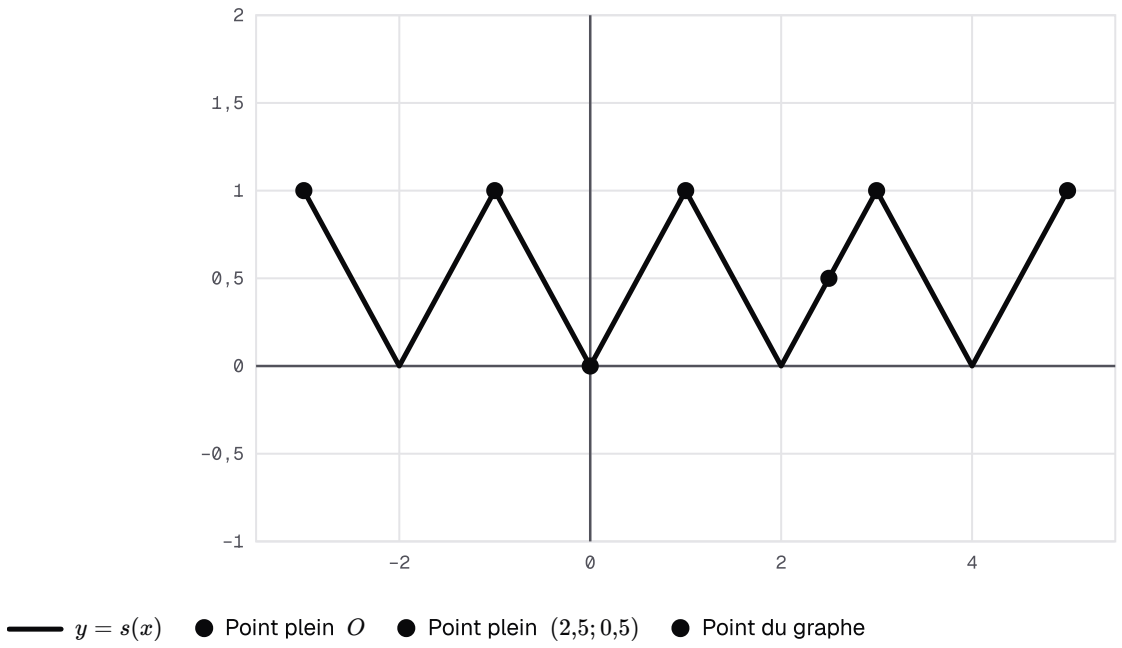
Le réel T s'appelle **une période** de f.

Exemple : une fonction en dents de scie

La fonction s ci-dessous est définie sur $\mathbb{R}$ par sa courbe. Sur $[-1, 1]$, $s(x) = |x|$: la courbe descend de $(-1, 1)$ à $(0, 0)$, puis remonte à $(1, 1)$.

Ce motif en V se répète de 2 en 2, vers la droite et vers la gauche. Pour tout réel x, $s(x + 2) = s(x)$: s est périodique de période 2.

Par exemple, $s(0{,}5) = 0{,}5$, $s(2{,}5) = 0{,}5$ et $s(-1{,}5) = 0{,}5$.



La courbe de la fonction s, périodique de période 2 : le motif en V tracé sur [−1, 1] se répète de 2 en 2.

Propriétés d'une fonction périodique

Devine : D'autres périodes ?

La fonction s vérifie $s(x+2) = s(x)$ pour tout réel x. Les réels 4 et 3 sont-ils aussi des périodes de s ?

A. Oui, tous les deux.

Faux.

Sur la courbe, $s(0) = 0$ et $s(3) = 1$: 3 n'est pas une période.

B. Seulement 4.

Juste.

Juste : deux pas de 2 font un pas de 4 ; et $s(0+3) \neq s(0)$.

C. Seulement 3.

Faux.

$s(0+3) = s(3) = 1$, alors que $s(0) = 0$.

D. Non, aucun des deux.

Faux.

$s(x+4) = s((x+2)+2) = s(x+2) = s(x)$: 4 est une période.

Correction

Pour tout réel x, les réels $x+4$ et $x-4$ existent, et :

$$\begin{aligned} s(x+4) &= s((x+2)+2) \\ &= s(x+2) = s(x). \end{aligned}$$

Donc 4 est une période de s.

En revanche, $s(0) = 0$ et $s(0+3) = s(3) = 1$: 3 n'est pas une période.

Propriété : Propriétés d'une fonction périodique

Soit f une fonction périodique de période T, d'ensemble de définition D_f.

- Pour tout réel x de D_f, $f(x-T) = f(x)$.
- Pour tout entier naturel n non nul, le réel nT est aussi une période de f : pour tout réel x de D_f, $f(x+nT) = f(x)$ et $f(x-nT) = f(x)$.
- Si le point $M(x, y)$ appartient à la courbe de f, les points $M_1(x+T, y)$ et $M_2(x-T, y)$ lui appartiennent aussi. Il suffit donc de tracer la courbe sur un intervalle de longueur T, puis de reproduire ce **motif** de T en T, vers la droite et vers la gauche.

Démonstration

Idée de la preuve. Pour le premier point, on applique la définition au réel $x - T$, qui appartient à D_f : $f((x-T)+T) = f(x-T)$, c'est-à-dire $f(x) = f(x-T)$. Pour le deuxième, on applique la définition de proche en proche : $f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$, et ainsi de suite ; de même, le premier point donne de proche en proche $x - nT \in D_f$ et $f(x-nT) = f(x)$. Le raisonnement qui rend rigoureux ce « et ainsi de suite », pour tout entier n, n'est pas rédigé ici. Le troisième point traduit les deux premiers sur la courbe : M_1 et M_2 ont la même ordonnée $y = f(x)$ que M. Enfin, le fait que tout réel de D_f se ramène à l'intervalle de tracé par un nombre entier de pas de T est admis.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On applique la définition **plusieurs fois de suite** : chaque pas de T conserve l'image, vers la droite comme vers la gauche. Pour reculer d'un pas, on applique la définition au réel $x - T$.

Le passage à un entier n quelconque n'est pas rédigé ici.

Pour calculer une image lointaine, ramène-toi dans un intervalle de longueur T : $f(x+nT) = f(x)$ et $f(x-nT) = f(x)$.

Exemple : ramener une image

Pour la fonction s, de période 2, les réels 4, 6, 8 et 10 sont aussi des périodes.

- $s(7{,}5) = s(7{,}5 - 8) = s(-0{,}5) = 0{,}5$, car $8 = 4 \times 2$.
- $s(10) = s(10 - 10) = s(0) = 0$, car $10 = 5 \times 2$.
- $s(-3{,}2) = s(-3{,}2 + 4) = s(0{,}8) = 0{,}8$, car $4 = 2 \times 2$.

Une méthode, puis à toi

Méthode : utiliser une période

1. **Justifie** la période : $x + T$ et $x - T$ restent dans D_f, et $f(x + T) = f(x)$ pour tout x de D_f.
2. **Retiens** une seule tranche de longueur T, comme $[0, T]$ ou $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$.
3. **Travaille** sur cette tranche : images, variations, morceau de courbe.
4. **Recopie** ce morceau tous les T, des deux côtés.

À toi : Des images ramenées

Avec la fonction s, de période 2, calcule $s(5{,}3)$ et $s(-3{,}6)$. Le réel 1 est-il une période de s ? Justifie. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Retranche ou ajoute un multiple de 2 pour revenir dans $[-1, 1]$.
Indice 2
Pour $5{,}3$, retranche trois fois la période ; pour $-3{,}6$, ajoute-la deux fois.
Indice 3
Point délicat : pour montrer que 1 n'est pas une période, un seul réel x tel que $s(x + 1) \neq s(x)$ suffit.

Réponse
Image de $5{,}3$. Le réel $6 = 3 \times 2$ est une période de s, donc $s(5{,}3) = s(5{,}3 - 6) = s(-0{,}7) = 0{,}7$.

Image de $-3{,}6$. Le réel $4 = 2 \times 2$ est une période de s, donc $s(-3{,}6) = s(-3{,}6 + 4) = s(0{,}4) = 0{,}4$.

Le réel 1. $s(0) = 0$ et $s(0 + 1) = s(1) = 1$, donc $s(0 + 1) \neq s(0)$: le réel 1 n'est pas une période de s .

Les fonctions sinus et cosinus

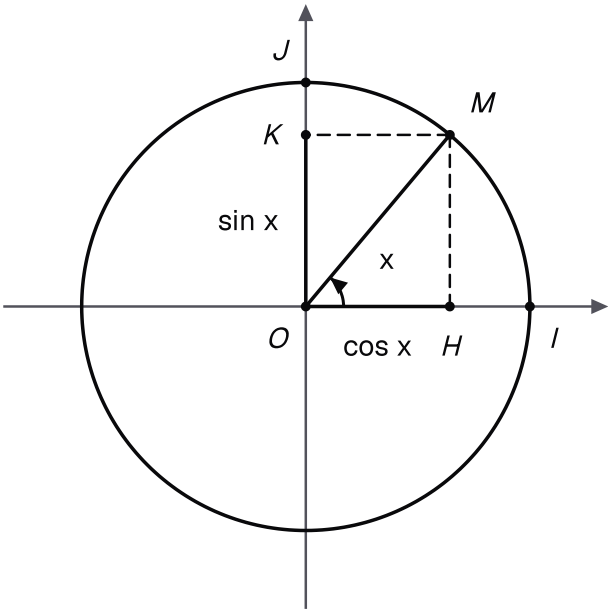
Le cercle trigonométrique

Rappel : Calcul trigonométrique. Le cercle trigonométrique a pour centre O et pour rayon 1, dans un repère orthonormé. À tout réel x, on associe un point M du cercle. Son abscisse est $\cos x$, son ordonnée est $\sin x$.

Voici les valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Le point associé à $\pi - x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. Donc, pour tout réel x, $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$.



Le point M du cercle trigonométrique associé au réel x : son abscisse OH est cos x, son ordonnée OK est sin x.

Devine : Un tour de plus

Les réels $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ sont associés à deux points du cercle trigonométrique. Comment sont ces deux points ?

A. Symétriques par rapport à l'axe des abscisses

Faux.

C'est le cas des points associés à $\frac{\pi}{3}$ et à $-\frac{\pi}{3}$.

B. Symétriques par rapport au centre O

Faux.

C'est le cas des points associés à $\frac{\pi}{3}$ et à $\frac{\pi}{3} + \pi$.

C. Confondus

Juste.

Juste : 2π est la longueur d'un tour complet.

D. Symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

Faux.

C'est le cas des points associés à $\frac{\pi}{3}$ et à $\pi - \frac{\pi}{3}$.

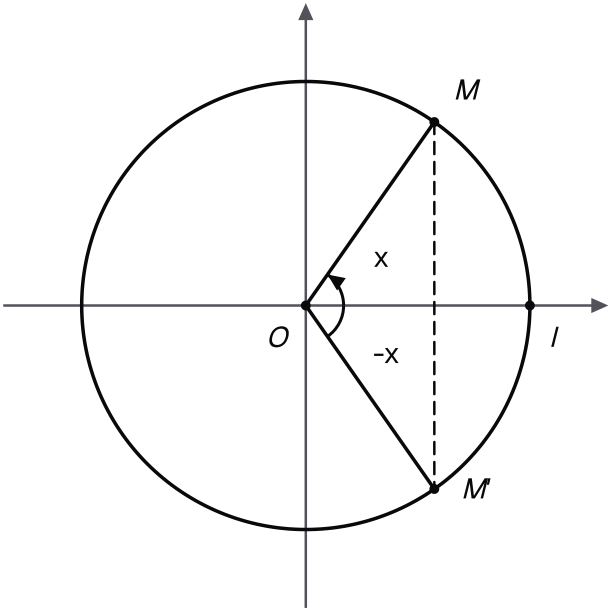
Correction

Le cercle a pour rayon 1 : sa longueur est 2π. Ajouter 2π, c'est faire un tour complet.

Les deux réels sont associés au même point M, donc ils ont le même cosinus et le même sinus.

Les fonctions **sinus** et **cosinus** associent à tout réel x les réels $\sin x$ et $\cos x$.

Pourquoi est-ce vrai ? Leurs propriétés se lisent sur le cercle trigonométrique. Un tour complet ramène au même point. Changer x en $-x$ remplace le point par un symétrique.



Le réel x et son opposé –x donnent deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; x + 2π redonne M.

Périodicité et parité

Propriété : Périodicité et parité des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions **sinus** $x \mapsto \sin x$ et **cosinus** $x \mapsto \cos x$ sont définies sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$: ces deux fonctions sont **périodiques de période** 2π ;
- $\sin(-x) = -\sin x$: la fonction sinus est **impaire** ;
- $\cos(-x) = \cos x$: la fonction cosinus est **paire**.

Démonstration

Étape 1. Tout réel x est associé à un point M du cercle trigonométrique, de coordonnées $(\cos x, \sin x)$ dans le repère orthonormé lié au cercle. Les réels x et $x + 2\pi$ diffèrent d'un tour complet : ils sont associés au même point M, donc $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Comme $x + 2\pi$ et $x - 2\pi$ sont des réels, les deux fonctions sont périodiques de période 2π.

Étape 2. Le point associé à $-x$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses : il a la même abscisse que M et une ordonnée opposée. Donc $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Étape 3. L'ensemble $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 : la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

Vérifie : Le point associé à l'opposé

Dans la preuve, le point associé à $-x$ est le symétrique du point associé à x. Par rapport à quoi ?

A. Par rapport à l'axe des ordonnées

Faux.

Ce symétrique est associé à $\pi - x$, pas à $-x$.

B. Par rapport à l'axe des abscisses

Juste.

Juste : on parcourt le même arc dans l'autre sens.

C. Par rapport au centre O

Faux.

Ce symétrique est associé à $\pi + x$.

D. Par rapport à la droite d'équation $y = x$

Faux.

Cette symétrie échange abscisse et ordonnée ; elle ne sert pas ici.

Correction

Le point associé à $-x$ s'obtient en parcourant le même arc dans l'autre sens. C'est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses : il garde l'abscisse $\cos x$ et a pour ordonnée $-\sin x$.

Donc, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout se lit sur le cercle.

- **Un tour complet** de longueur 2π ramène au même point : même cosinus, même sinus.
- Le réel $-x$ donne **le symétrique par rapport à l'axe des abscisses** : même abscisse, ordonnée opposée.

D'où, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Exemple : calculer avec la parité et la période

- $\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$, car la fonction sinus est impaire.
- $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, car la fonction cosinus est paire.
- $\cos\dfrac{7\pi}{3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \dfrac{1}{2}$, car 2π est une période de cosinus.
- $\sin\dfrac{13\pi}{6} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \dfrac{1}{2}$, car 2π est une période de sinus.

Les courbes

Méthode : tracer les courbes de sinus et de cosinus

1. **Pars** des valeurs remarquables de $[0, \pi]$: 0, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et π, avec leur sinus et leur cosinus.
2. **Utilise** la parité pour $[-\pi, 0]$: la courbe de sinus est symétrique par rapport à O, celle de cosinus par rapport à l'axe des ordonnées.
3. **Recopie** le morceau tracé sur $[-\pi, \pi]$ tous les 2π, à droite et à gauche.
4. **Vérifie** que tout reste entre les droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$.

Devine : Avant la figure

Avant de regarder la figure suivante : sur $[-2\pi, 2\pi]$, combien de fois la courbe de cosinus coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

A. Une seule fois

Faux.

$\cos 0 = 1$: la courbe ne passe pas par l'origine. Les points cherchés vont par paires, par parité.

B. Deux fois

Faux.

Sur $[0, 2\pi]$ seul, il y en a déjà deux : en $\dfrac{\pi}{2}$ et en $\dfrac{3\pi}{2}$.

C. Trois fois

Faux.

Cosinus est paire et $\cos 0 \neq 0$: le nombre de points est pair.

D. Quatre fois

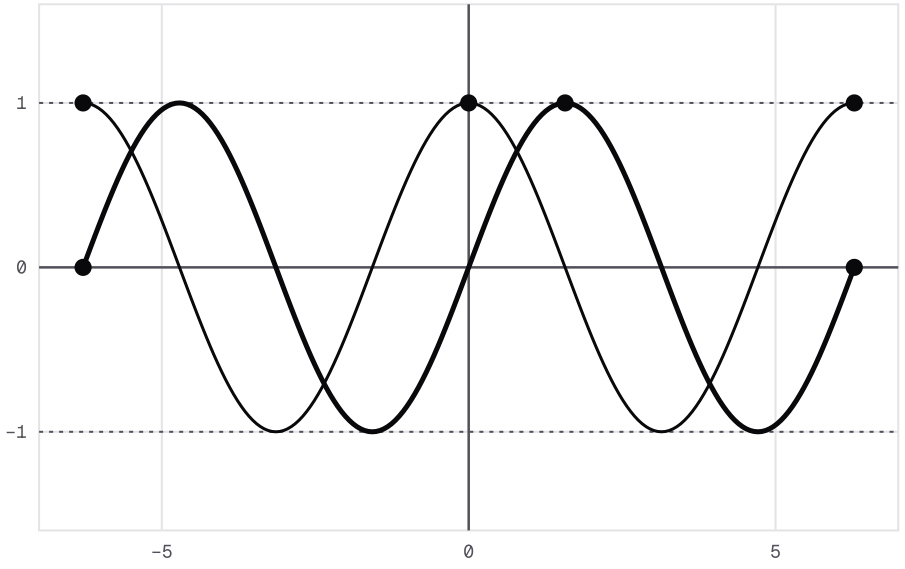
Juste.

Juste : en $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Correction

Sur l'intervalle de travail $[0, 2\pi]$, le point M est sur l'axe des ordonnées, d'abscisse 0, pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

Cosinus est paire : $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ conviennent aussi. La courbe coupe donc quatre fois l'axe des abscisses.



Les courbes des fonctions sinus et cosinus sur [−2π, 2π], entre les droites d'équations y = −1 et y = 1.

Les variations

Propriété : Variations des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

- la fonction sinus est strictement décroissante sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; elle admet un maximum égal à 1, atteint en $\frac{\pi}{2}$, et un minimum égal à -1, atteint en $-\frac{\pi}{2}$;
- la fonction cosinus est strictement croissante sur $[-\pi, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, \pi]$; elle admet un maximum égal à 1, atteint en 0, et un minimum égal à -1, atteint en $-\pi$ et en π.

Remarque

Ce résultat est admis. Tu le lis sur le cercle trigonométrique, sur l'intervalle de travail $[-\pi, \pi]$. Par exemple, quand x va de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, le point M monte de $(0, -1)$ à $(0, 1)$. Tu le lis aussi sur les courbes.

Tableau de variations de la fonction sinus sur [−π, π].

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Tableau de variations de la fonction cosinus sur [−π, π].

x	$-\pi$		0		π
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

Un piège, un exemple, à toi

Attention : sinus n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$

✗ « La fonction sinus est croissante, car $\sin 0 < \sin \frac{\pi}{2}$. »

✓ Deux valeurs ne donnent pas un sens de variation. Sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mais pas sur $\mathbb{R}$: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\sin \pi = 0$.

Donne toujours l'intervalle précis.

Exemple : la fonction x ↦ cos 2x

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos 2x$. Pour tout réel x, les réels $x + \pi$ et $x - \pi$ existent, et :

$$\begin{aligned} g(x + \pi) &= \cos(2x + 2\pi) \\ &= \cos 2x = g(x), \end{aligned}$$

car 2π est une période de cosinus. Donc g est périodique de période π.

Sur $[0, \pi]$: $g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$ et $g(\pi) = 1$. Le motif de cosinus est parcouru deux fois plus vite.

À toi : Des valeurs et un sens de variation

Calcule $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\cos\frac{13\pi}{6}$. Puis dis si la fonction cosinus est croissante ou décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Utilise la parité pour $-\frac{5\pi}{6}$, et la période 2π pour $\frac{13\pi}{6}$.

Indice 2

$\frac{13\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi$; et $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$.

Indice 3

Point délicat : l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ est inclus dans $[0,\pi]$; regarde le tableau de cosinus.

Réponse

Sinus de $-\frac{5\pi}{6}$. Sinus est impaire, et $\sin(\pi-x)=\sin x$ pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\\&=-\sin\frac{5\pi}{6}\\&=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Cosinus de $\frac{13\pi}{6}$. Le réel 2π est une période de cosinus :

$$\begin{aligned}\cos\frac{13\pi}{6}&=\cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi\right)\\&=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Sens de variation. D'après les variations des fonctions sinus et cosinus, cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle l'est donc sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, qui est inclus dans $[0,\pi]$.

Résoudre graphiquement une équation avec les fonctions de référence

Quand le calcul ne suffit pas

Certaines équations résistent au calcul. Par exemple, aucune méthode de ce chapitre ne donne la valeur exacte des solutions non nulles de $\sin x=\frac{x}{2}$.

Les courbes, elles, montrent où se trouvent les solutions. Tu les lis avec une précision annoncée, puis tu les contrôles par le calcul.

Devine : Que lire sur la figure ?

Pour résoudre graphiquement $x^2=x+2$, tu traces la parabole d'équation $y=x^2$ et la droite d'équation $y=x+2$ dans un même repère. Que lis-tu ?

A. Les ordonnées des points d'intersection

Faux.

L'ordonnée donne la valeur commune de x^2 et de $x+2$, pas l'inconnue x.

B. Les points où chaque courbe coupe l'axe des abscisses

Faux.

Ces points résolvent $x^2 = 0$ ou $x + 2 = 0$.

C. Les abscisses des sommets des courbes

Faux.

Un sommet donne un extremum, pas une égalité entre les deux membres.

D. Les abscisses des points d'intersection

Juste.

Juste : en un tel point, x^2 et $x + 2$ sont égaux.

Correction

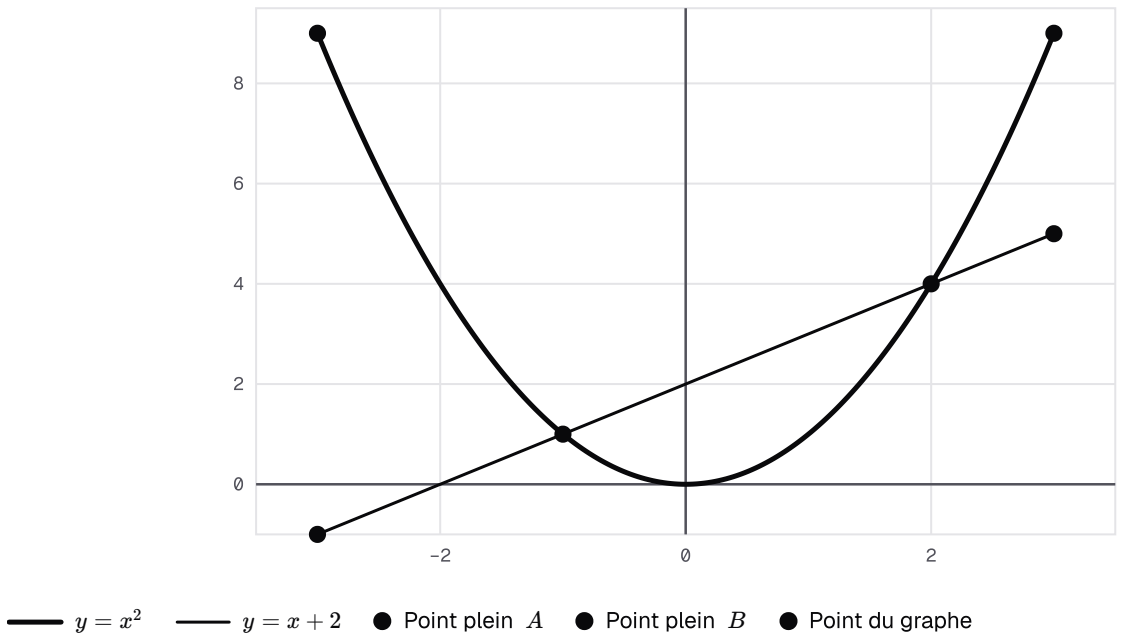
Un point commun aux deux courbes a pour coordonnées (x, x^2) et $(x, x+2)$. Donc $x^2 = x + 2$.

Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection.

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Écris** le problème comme une égalité, ou une inégalité, entre deux expressions $f(x)$ et $g(x)$ dont tu sais représenter les fonctions.
2. **Représente** $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un même repère, sur l'intervalle de travail : à la main, à la calculatrice ou avec un logiciel.
3. **Relève** les abscisses des points d'intersection, qui sont des **valeurs approchées** des solutions. Pour $f(x) \leq g(x)$, relève les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ ou la coupe ; strictement au-dessous pour une inégalité stricte.
4. **Vérifie** chaque valeur à la calculatrice, et précise à combien près tu as lu.

Une parabole et une droite



La parabole d'équation y = x² et la droite d'équation y = x + 2, sur [−3, 3] : deux points d'intersection, A et B.

Exemple : une équation lue puis contrôlée

On résout $x^2 = x + 2$ sur $[-3, 3]$, avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$.

Lecture. Sur la figure, les courbes se coupent en deux points. On lit leurs abscisses : $x \approx -1$ et $x \approx 2$.

Contrôle. $(-1)^2 = 1$ et $-1 + 2 = 1$; $2^2 = 4$ et $2 + 2 = 4$. C'est le calcul, et non la lecture, qui prouve que -1 et 2 sont des solutions **exactes**.

Pas d'autre solution. On vérifie en développant que, pour tout réel x, $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Ce produit n'est nul que si un facteur l'est : il n'y a pas d'autre solution.

Exemple : une inéquation

On résout $x^2 \leq x + 2$ sur $[-3, 3]$. On cherche les abscisses des points où la parabole est **au-dessous** de la droite, ou la coupe.

Sur la figure, c'est le cas entre -1 et 2, bornes exactes d'après l'exemple précédent. L'ensemble des solutions est $S = [-1, 2]$.

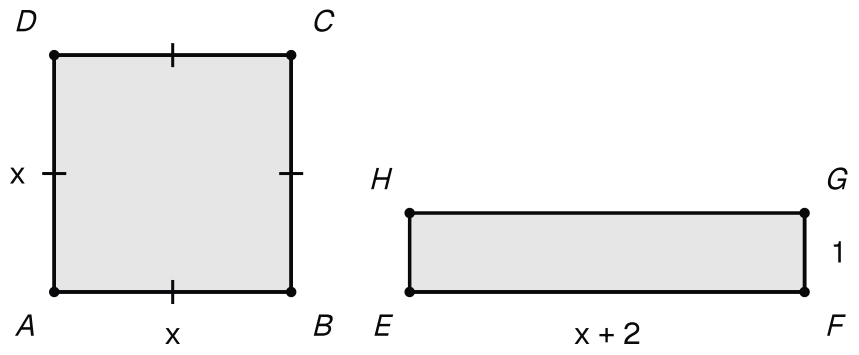
Contrôle : pour $x = 0$, $0 \leq 2$; pour $x = 3$, $9 > 5$, et 3 n'est pas solution.

Exemple : mettre un problème en équation

Un carré a pour côté x cm, avec $x > 0$. Un rectangle a pour largeur 1 cm et pour longueur $x + 2$ cm. Quand le carré a-t-il la plus grande aire ?

- **Mise en équation.** L'aire du carré est x^2, celle du rectangle $1 \times (x + 2) = x + 2$. On résout $x^2 > x + 2$, avec $x > 0$.
- **Lecture.** Sur la figure, pour $x > 0$, la parabole est strictement au-dessus de la droite à droite de 2.
- **Contrôle.** $x^2 - (x + 2) = (x + 1)(x - 2)$ est strictement positif si $x > 2$, négatif ou nul si $0 < x \leq 2$. Pour $x = 3$: $9 > 5$.

Conclusion. Le carré a la plus grande aire si et seulement si $x > 2$.



Le carré de côté x et le rectangle de largeur 1 et de longueur x + 2, côte à côte, dont on compare les aires.

Une équation sans solution exacte

Devine : Combien de solutions ?

Avant de regarder la figure suivante : combien de solutions l'équation $\sin x = \dfrac{x}{2}$ a-t-elle sur $[-\pi, \pi]$?

A. Une seule, $x = 0$

Faux.

0 est bien solution, mais la droite recoupe la courbe de sinus de chaque côté.

B. Deux

Faux.

Les solutions non nulles vont par paires opposées, et 0 s'y ajoute : leur nombre est impair.

C. Trois

Juste.

Juste : 0, et deux solutions opposées, par imparité.

D. Aucune

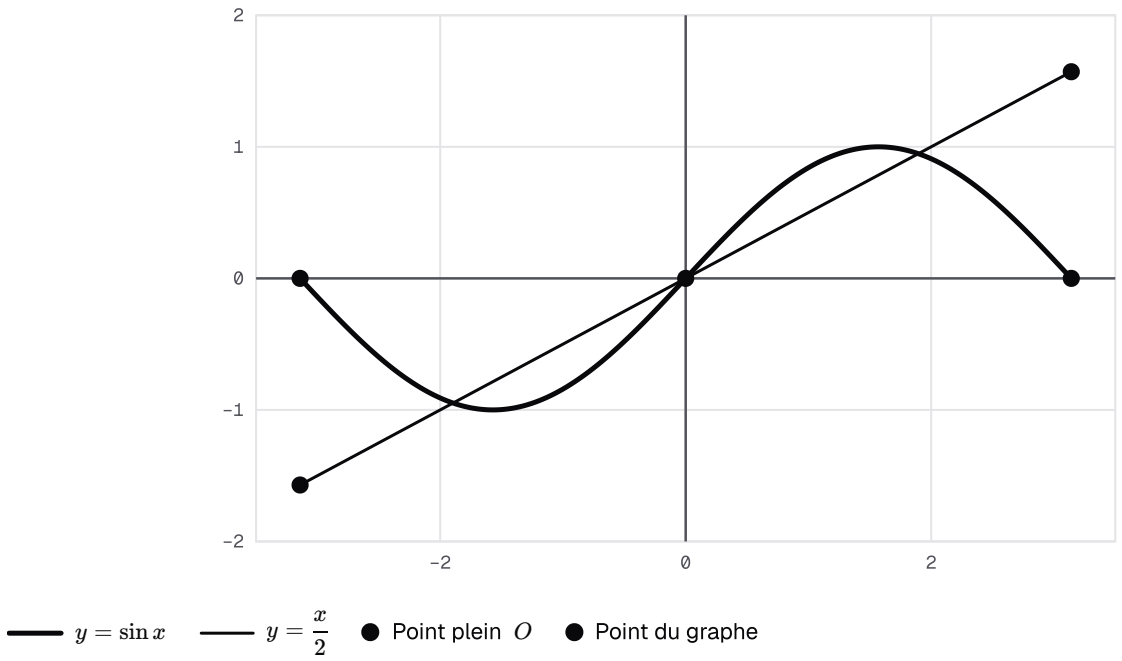
Faux.

$\sin 0 = 0 = \dfrac{0}{2}$: 0 est solution.

Correction

0 est solution, car $\sin 0 = 0$.

Les deux fonctions sont impaires : si x est solution, $-x$ l'est aussi. La figure montre une autre solution entre 1 et 2, donc une troisième entre -2 et -1.



La courbe de la fonction sinus et la droite d'équation y = x/2 sur [−π, π] : trois points d'intersection.

Exemple : des solutions approchées

On lit trois abscisses, à $0{,}1$ près : $x \approx 0$, $x \approx 1{,}9$ et $x \approx -1{,}9$. Le réel 0 est même une solution exacte, car $\sin 0 = 0 = \dfrac{0}{2}$: c'est le calcul qui le prouve.

Contrôle à la calculatrice, avec $d(x) = \sin x - \dfrac{x}{2}$: $d(1{,}85) \approx 0{,}04 > 0$ et $d(1{,}95) \approx -0{,}05 < 0$. La lecture est cohérente : d change de signe entre $1{,}85$ et $1{,}95$. Par imparité, de même entre $-1{,}95$ et $-1{,}85$.

Hors de $[-2, 2]$, $\left|\dfrac{x}{2}\right| > 1 \geq |\sin x|$: il n'y a aucune autre solution.

Attention : une lecture donne une valeur approchée

✗ « Sur la figure, la solution positive est $x = 1{,}9$. »

✓ On écrit $x \approx 1{,}9$, à $0{,}1$ près : la solution n'est pas $1{,}9$, car $d(1{,}9) \neq 0$.

Une lecture ne prouve pas non plus qu'il n'y a aucune autre solution hors de la fenêtre tracée.

À toi, puis le Coin devoir

À toi : Une inéquation

Avec la figure de la courbe de sinus et de la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$, résous sur $]0, \pi]$ l'inéquation $\sin x > \dfrac{x}{2}$. Contrôle ton résultat en deux points. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche où la courbe de sinus est strictement au-dessus de la droite.
Indice 2
Sur $]0, \pi]$, repère le point d'intersection d'abscisse non nulle ; note x_0 son abscisse.
Indice 3
Point délicat : l'inégalité est stricte, donc les abscisses des points d'intersection sont exclues ; et la borne x_0 n'est connue que de façon approchée.

Réponse
Lecture. Sur $]0, \pi]$, la courbe de sinus est strictement au-dessus de la droite entre 0 et la solution $x_0 \approx 1{,}9$. L'inégalité est stricte : x_0 est exclu.

Contrôle. $\sin 1 \approx 0{,}84 > 0{,}5$, donc 1 est solution ; $\sin 2{,}5 \approx 0{,}60 < 1{,}25$, donc $2{,}5$ ne l'est pas.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $]0, x_0[$, avec $x_0 \approx 1{,}9$ à $0{,}1$ près.

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution graphique

En devoir, une résolution graphique se rédige en trois temps : l'équation, la lecture, le contrôle. Écris par exemple :

« Les solutions de $\sin x = \dfrac{x}{2}$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de sinus et de la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$. On lit $x \approx 0$, $x \approx 1{,}9$ et $x \approx -1{,}9$, à $0{,}1$ près. De plus, 0 est une solution exacte, car $\sin 0 = 0 = \dfrac{0}{2}$. »

Annonce toujours la précision de ta lecture.

Tu sais maintenant lire une équation sur des courbes. Cette méthode marche avec toutes les fonctions de ce chapitre. Elle marchera aussi avec celles que tu rencontreras ensuite.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle fonction, quelle forme

- $x \mapsto ax^2$: paire, parabole de sommet O ; le signe de a donne le sens.
- $x \mapsto \dfrac{a}{x}$: impaire, hyperbole de centre O ; variations sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, séparément.
- Trinôme : forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, sommet $S(\alpha, \beta)$, axe la droite d'équation $x = \alpha$.
- Fonction homographique : forme réduite $\beta + \dfrac{k}{x-\alpha}$, centre $\Omega(\alpha, \beta)$, sens donné par le signe de k.
- Fonction périodique : étude sur un intervalle de longueur T, puis motif reproduit.
- Sinus et cosinus : période 2π, sinus impaire, cosinus paire, valeurs entre -1 et 1.
- Résolution graphique : solutions approchées, précision annoncée, contrôle par le calcul.

Le mot du prof. Tu connais maintenant une petite famille de courbes. Devant une fonction nouvelle, cherche d'abord sa forme : canonique, réduite ou périodique.

La courbe suit presque toute seule. Ces réflexes te serviront dans les chapitres de fonctions qui suivent.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Fonctions de référence » (tc · sciences · mathematiques)