BURHAN

Résumé : Équations trigonométriques et angles inscrits

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/resume

Chapitre	Semestre
Équations trigonométriques et angles inscrits	Semestre 2

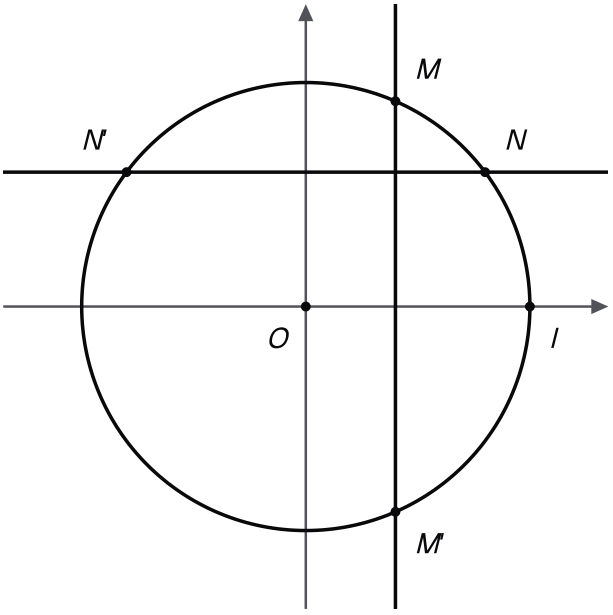
Les équations cos x = a, sin x = a et tan x = a

À retenir : Lire une équation sur le cercle

Sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, le point d'abscisse curviligne x a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$.

Résoudre $\cos x = a$ revient à chercher les points de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse vaut a : ils se trouvent sur une droite verticale. Pour $\sin x = a$, on coupe $\mathcal{C}$ par une droite horizontale.

On obtient en général deux points, symétriques par rapport à un axe. Chacun correspond à une infinité de réels, séparés par des tours complets.



Une droite verticale donne deux points de même abscisse, symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; une droite horizontale donne deux points de même ordonnée, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété : Réel de cosinus, de sinus ou de tangente donné

- Pour tout réel a tel que $-1 \leq a \leq 1$, il existe un **unique** réel α de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$.
- Pour tout réel a tel que $-1 \leq a \leq 1$, il existe un **unique** réel β de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = a$.

- Pour tout réel a, il existe un **unique** réel γ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\gamma = a$.

Propriété : Équation cos x = a

Soit a un réel.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, l'équation $\cos x = a$ n'a **aucune solution** dans $\mathbb{R}$.
- Si $-1 \leq a \leq 1$, soit α un réel tel que $\cos\alpha = a$.

Dans ce second cas, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow\ & x \equiv \alpha\ [2\pi] \\ \text{ou}\ & x \equiv -\alpha\ [2\pi].\end{aligned}$$

Autrement dit, $\cos x = \cos\alpha$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.

Propriété : Équation sin x = a

Soit a un réel.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, l'équation $\sin x = a$ n'a **aucune solution** dans $\mathbb{R}$.
- Si $-1 \leq a \leq 1$, soit α un réel tel que $\sin\alpha = a$.

Dans ce second cas, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow\ & x \equiv \alpha\ [2\pi] \\ \text{ou}\ & x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi].\end{aligned}$$

Autrement dit, $\sin x = \sin\alpha$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.

Propriété : Équation tan x = a

Soit a un réel et α un réel tel que $\cos\alpha \neq 0$ et $\tan\alpha = a$. Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\tan x = \tan\alpha \\ \Leftrightarrow\ &\text{il existe un entier relatif } k \\ &\text{tel que } x = \alpha + k\pi.\end{aligned}$$

D'après l'existence d'un réel de tangente donnée, un tel réel α existe pour tout réel a : l'équation $\tan x = a$ a donc des solutions pour **tout** réel a.

Méthode : résoudre une équation fondamentale

1. **Écris** l'équation sous la forme $\cos x = a$, $\sin x = a$ ou $\tan x = a$.

2. **Contrôle** le second membre : pour le cosinus et le sinus, il doit appartenir à $[-1, 1]$.
3. **Cherche** un réel α dont la ligne trigonométrique vaut a : une valeur usuelle, ou la touche réciproque de la calculatrice en mode radian.
4. **Conclus** par les familles de solutions, suivies de « avec $k \in \mathbb{Z}$ ».

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Valeur usuelle. On sait que $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'après les angles associés :

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{6} &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Solutions. D'après la propriété de l'équation $\cos x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \\ x &= -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = -\sqrt{3}$, pour $\cos x \neq 0$.

Valeur usuelle. On sait que $\tan \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. D'après les angles associés, $\tan \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Solutions. D'après la propriété de l'équation $\tan x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Ici, aucun contrôle du second membre n'est nécessaire.

Attention : Deux familles, et la bonne seconde famille

Pour $\sin x = \sin \dfrac{\pi}{7}$, écrire seulement $x = \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi$ oublie la moitié des solutions. Écrire $x = -\dfrac{\pi}{7} + 2k\pi$ serait faux, car $\sin \left(-\dfrac{\pi}{7}\right) = -\sin \dfrac{\pi}{7}$.

Les solutions sont $x = \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{6\pi}{7} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Attention : Un second membre impossible

L'équation $\sin x = -\dfrac{5}{4}$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$. En effet, $-\dfrac{5}{4} < -1$, alors qu'un sinus est toujours compris entre -1 et 1 : aucune droite horizontale placée sous le cercle ne le rencontre.

La tangente échappe à ce contrôle : $\tan x = -\dfrac{5}{4}$ a des solutions.

Attention : Tangente : des demi-tours

Pour $\tan x = -\sqrt{3}$, écrire $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ oublie des solutions, par exemple $\dfrac{2\pi}{3}$. En effet, $\tan \dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

Deux points diamétralement opposés du cercle ont la même tangente. Les solutions diffèrent donc d'un demi-tour : on écrit $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Se ramener à une équation fondamentale ; solutions dans un intervalle

Méthode : se ramener à une équation fondamentale

1. **Isole** la ligne trigonométrique, comme dans une équation du premier degré.
2. **Transforme** un second membre comme $-\cos\alpha$ grâce aux angles associés : tu obtiens deux lignes du même nom.
3. **Pose** $X = cx + d$, avec $c \neq 0$, si l'inconnue apparaît sous cette forme. Résous en X. Reviens à x : retranche d, puis divise chaque terme par c, y compris $2k\pi$.
4. **Sépare** un produit nul en deux équations plus simples.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\cos \dfrac{\pi}{8}$.

Angles associés. On écrit le second membre comme un cosinus :

$$\begin{aligned} -\cos \frac{\pi}{8} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \\ &= \cos \frac{7\pi}{8}. \end{aligned}$$

Solutions. D'après la propriété de l'équation $\cos x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{7\pi}{8} + 2k\pi \quad \text{ou} \\ x &= -\frac{7\pi}{8} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$.

Nouvelle inconnue. On pose $X = 2x + \dfrac{\pi}{3}$. Comme $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$, on obtient $X = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $X = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Les deux familles coïncident, car $\pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Retour à x. On retranche $\dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \end{aligned}$$

donc $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Énoncé. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$.

Produit nul. D'après la règle du produit nul, l'équation équivaut à $\cos x = 0$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

Premier facteur. $\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ donne $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Second facteur. $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$ donne $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Méthode : garder les solutions d'un intervalle

1. **Écris** chaque famille sous la forme $x = \alpha + 2k\pi$, ou $x = \alpha + k\pi$.
2. **Encadre** x par les bornes de l'intervalle, puis isole k dans cet encadrement.
3. **Liste** les entiers k obtenus et calcule la solution de chacun.
4. **Vérifie** sur le cercle que chaque solution correspond à un point repéré.

Exemple

Énoncé. Donne les solutions de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Encadrement. Pour $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, la condition $-\pi < \frac{\pi}{12} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\frac{13}{12} < k \leq \frac{11}{12}$.

Entiers. $k = -1$ ou $k = 0$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left\{-\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right\}.$$

Attention : Diviser aussi le terme en k

Dans l'exemple précédent, $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ donne $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$. Écrire $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ferait perdre la solution $-\frac{11\pi}{12}$ de $]-\pi, \pi]$. On divise chaque terme par 2, y compris $2k\pi$.

Inéquations sur le cercle trigonométrique

Propriété : Inéquations en cosinus sur]–π, π]

Soit a un réel tel que $-1 < a < 1$, et α l'unique réel de $]0, \pi[$ tel que $\cos\alpha = a$. Pour tout réel x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

- $\cos x \geq a \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$;
- $\cos x \leq a \Leftrightarrow -\pi < x \leq -\alpha$ ou $\alpha \leq x \leq \pi$.

Pour les inégalités strictes, on exclut les réels $-\alpha$ et α.

Propriété : Inéquations en sinus sur]–π, π]

Soit a un réel tel que $-1 < a < 1$, et β l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\beta = a$. Pour tout réel x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

- si $a \geq 0$, alors $\sin x \geq a \Leftrightarrow \beta \leq x \leq \pi - \beta$;
- si $a < 0$, alors $\sin x \leq a \Leftrightarrow -\pi - \beta \leq x \leq \beta$.

Pour les inégalités strictes, on exclut les réels où $\sin x = a$ (β et $\pi - \beta$ dans le premier cas, $-\pi - \beta$ et β dans le second). Les inégalités contraires au sens strict sont vérifiées par les autres réels de $]-\pi, \pi]$; au sens large, on y ajoute ces deux réels.

Propriété : Inéquations en tangente sur]–π/2, π/2[

Soit a un réel et γ l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\gamma = a$. Pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

- $\tan x \geq a \Leftrightarrow \gamma \leq x < \frac{\pi}{2}$;
- $\tan x \leq a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x \leq \gamma$.

Pour les inégalités strictes, on exclut le réel γ.

Méthode : lire une inéquation sur le cercle

1. **Annonce** l'intervalle de travail : $]-\pi, \pi]$, $[0, 2\pi[$, ou $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ pour la tangente.
2. **Place** sur $\mathcal{C}$ les points-frontières, solutions de l'équation associée.
3. **Colorie** l'arc des points qui conviennent. Pour le cosinus, ils sont à droite ou à gauche de la droite verticale des points d'abscisse a. Pour le sinus, ils sont au-dessus ou au-dessous de la droite horizontale des points d'ordonnée a.
4. **Écris** cet arc avec des intervalles. Décide pour chaque borne si elle est comprise.

Exemple

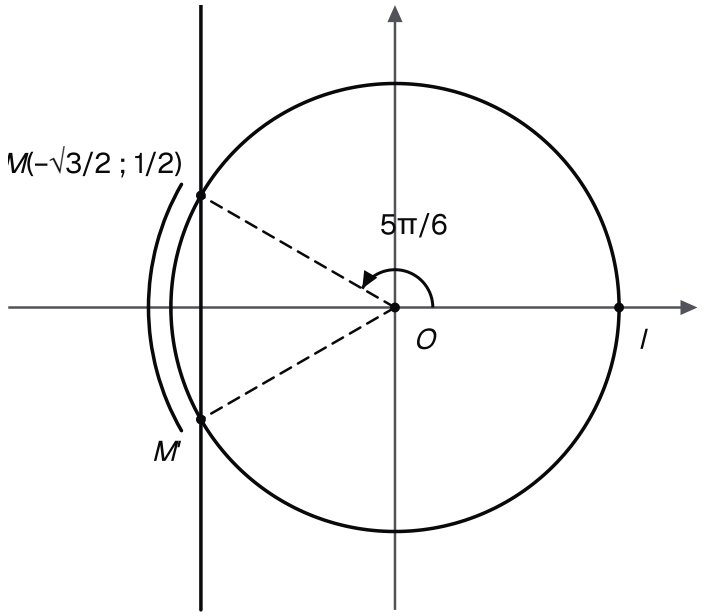
Énoncé. Résous $\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Frontières. Dans $]-\pi, \pi]$, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ et pour $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

Arc. Les points d'abscisse inférieure à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ forment un petit arc autour du point d'abscisse curviligne π.

Conclusion. D'après la propriété des inéquations en cosinus, au sens strict :

$$S = \left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$



Solutions de cos x strictement inférieur à moins racine de 3 sur 2 : le petit arc autour du point repéré par pi, bornes exclues, entre 5 pi sur 6 et moins 5 pi sur 6.

Exemple

Énoncé. Résous $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Cas. Ici $a = \dfrac{1}{2}$, donc $a \geq 0$, et $\beta = \dfrac{\pi}{6}$ car $\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Frontières. Ce sont $\beta = \dfrac{\pi}{6}$ et $\pi - \beta = \dfrac{5\pi}{6}$, toutes deux comprises.

Conclusion. D'après la propriété des inéquations en sinus, dans le cas $a \geq 0$:

$$S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

Sur le cercle, ces réels repèrent les points placés au-dessus de la droite horizontale d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$, ou sur elle.

Exemple

Énoncé. Résous $\tan x > -\sqrt{3}$ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Frontière. $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, et $-\frac{\pi}{3}$ est le seul réel de cet intervalle où l'égalité a lieu.

Conclusion. D'après la propriété des inéquations en tangente, avec $\gamma = -\frac{\pi}{3}$: $\tan x \geq -\sqrt{3}$ équivaut à $\gamma \leq x < \frac{\pi}{2}$. L'inégalité est stricte, donc on exclut γ :

$$S = \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Attention : L'intervalle de travail change l'écriture

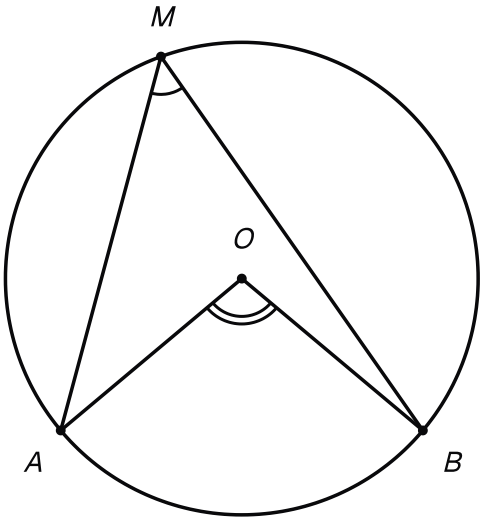
Dans $[0, 2\pi[$, l'inéquation $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solutions un seul intervalle : $\left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[$. Dans $]-\pi, \pi]$, le même arc donne deux intervalles.

Recopie donc l'intervalle de travail de l'énoncé avant de lire l'arc.

Angles inscrits et arcs interceptés

À retenir : Rappel du collège : angle inscrit et angle au centre

Au collège, tu as appris qu'un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc. Ce chapitre précise quel arc est intercepté. Il mesure aussi les arcs en radians, comme sur le cercle trigonométrique.



Sommet sur le cercle ou sommet au centre : l'angle AMB et l'angle AOB s'appuient sur le même arc AB, le premier valant la moitié du second.

Définition : Arc, angle au centre et angle inscrit

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$.

- Les points A et B partagent $\mathcal{C}$ en deux **arcs** d'extrémités A et B. La **mesure** d'un arc, en radians, est le quotient de sa longueur par R : les mesures des deux arcs d'extrémités A et B ont pour somme 2π. Ces deux arcs sont situés de part et d'autre de la droite (AB) : deux points de $\mathcal{C}$ distincts de A et de B sont sur le même arc si et seulement s'ils sont du même côté de (AB) ; on l'admet, comme une lecture de la figure. Lorsqu'un arc est contenu dans un demi-cercle, sa mesure est celle de l'**angle au centre** $\widehat{AOB}$.
- Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B. L'angle géométrique $\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** dans $\mathcal{C}$; il **intercepte** l'arc d'extrémités A et B qui ne contient pas M.

Théorème : Théorème de l'angle inscrit

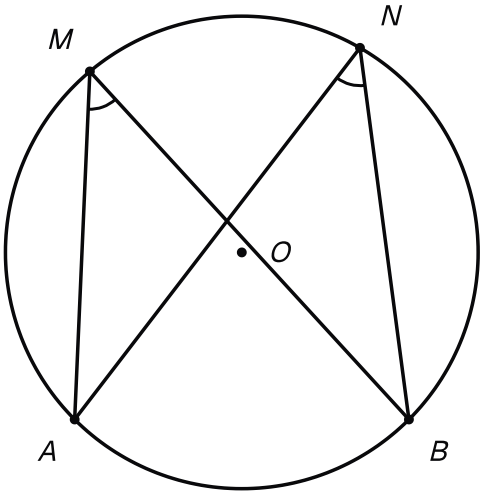
Soit A, B et M trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. La mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est la **moitié** de la mesure de l'arc qu'il intercepte.

En particulier, lorsque cet arc est contenu dans un demi-cercle, $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Propriété : Angles inscrits qui interceptent le même arc

Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$, et M, N deux points de $\mathcal{C}$ distincts de A et de B.

- Si M et N appartiennent au **même** arc d'extrémités A et B, alors $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.
- Si M et N appartiennent aux **deux arcs différents** d'extrémités A et B, alors $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$.
- Si $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, alors $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.



M et N, placés du même côté de la corde AB, interceptent le même arc : les angles AMB et ANB portent le même codage.

Méthode : calculer un angle inscrit

1. **Nomme** le sommet de l'angle. L'arc intercepté est celui qui ne passe pas par ce sommet.
2. **Calcule** la mesure de cet arc. D'après le théorème de l'angle inscrit, l'angle en vaut la moitié.
3. **Compare** avec un autre angle inscrit : égal si son sommet est sur le même arc, supplémentaire sinon.
4. **Repère** un diamètre : il donne un angle droit.

Exemple

Énoncé. A, B, M et N sont quatre points d'un cercle de centre O, avec $\widehat{AOB} = \dfrac{2\pi}{5}$. Le point M est sur le grand arc d'extrémités A et B, le point N sur le petit arc.

Angle en M. $\widehat{AMB}$ intercepte le petit arc, de mesure $\dfrac{2\pi}{5}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{5}$.

Angle en N. M et N sont sur les deux arcs différents, donc $\widehat{ANB} = \pi - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{4\pi}{5}$.

Contrôle. $\widehat{ANB}$ intercepte le grand arc, de mesure $2\pi - \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{8\pi}{5}$, dont la moitié vaut $\dfrac{4\pi}{5}$.

Exemple

Énoncé. $[EF]$ est un diamètre d'un cercle, avec $EF = 17$, et G un point de ce cercle tel que $EG = 8$. Calcule FG.

Angle droit. $[EF]$ est un diamètre : d'après la propriété des angles inscrits, $\widehat{EGF} = \dfrac{\pi}{2}$.

Longueur. Dans le triangle EFG rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore, $FG^2 = 17^2 - 8^2 = 225$. Donc $FG = 15$.

Attention : La moitié, et le bon arc

Avec $\widehat{AOB} = \dfrac{2\pi}{5}$, un angle inscrit qui intercepte le même arc vaut $\dfrac{\pi}{5}$, et non $\dfrac{4\pi}{5}$.

Le sommet compte aussi : un point du petit arc intercepte le grand arc. Repère toujours l'arc qui ne contient pas le sommet. Deux sommets situés sur un même arc donnent des angles égaux ; deux sommets situés sur les deux arcs différents donnent des angles supplémentaires.

Points cocycliques et quadrilatères inscriptibles

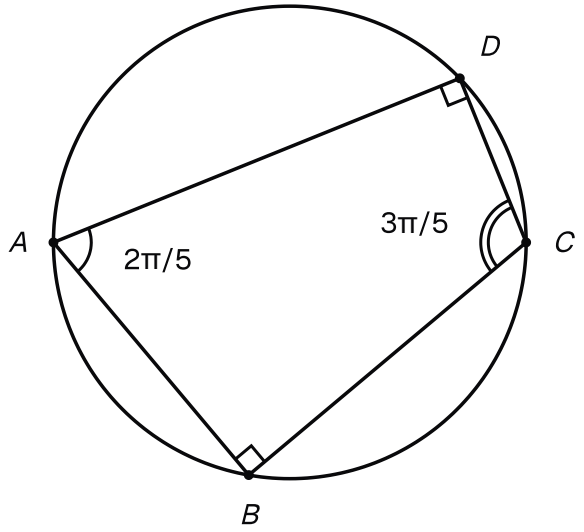
Définition : Points cocycliques, quadrilatère inscriptible

- Des points sont **cocycliques** s'ils appartiennent à un même cercle.
- Un quadrilatère est **inscriptible** si ses quatre sommets sont cocycliques. Ce cercle est le cercle **circonscrit** au quadrilatère, et l'on dit que le quadrilatère est **inscrit** dans ce cercle.

Propriété : Angles opposés d'un quadrilatère inscrit

Soit $ABCD$ un quadrilatère **convexe** inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Alors ses angles opposés sont **supplémentaires** :

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi \quad \text{et}$$
$$\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi.$$



Exemple de quadrilatère convexe inscrit : les angles en A et en C mesurent 2 pi sur 5 et 3 pi sur 5, les angles en B et en D sont droits ; chaque paire d'angles opposés a pour somme pi.

Propriété : Reconnaître des points cocycliques

- Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Si $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$, alors $ABCD$ est inscriptible.
- Soit A, B, C, D quatre points distincts tels que C et D n'appartiennent pas à la droite (AB) et soient du **même côté** de cette droite. Si $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, alors A, B, C et D sont cocycliques.

Méthode : prouver que quatre points sont cocycliques

1. **Quadrilatère convexe** : calcule la somme de deux angles opposés. Si elle vaut π, il est inscriptible.
2. **Même côté** : deux points qui voient un segment sous le même angle, d'un même côté de sa droite, sont cocycliques avec ses extrémités.
3. **Angles droits** : deux angles droits qui regardent le même segment placent leurs sommets sur le cercle de diamètre ce segment.
4. **Cite** la propriété employée dans ta conclusion.

Exemple

Énoncé. $PQRS$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{SPQ} = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\widehat{QRS} = \dfrac{\pi}{3}$. Est-il inscriptible ?

Angles opposés. $\widehat{SPQ} + \widehat{QRS} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \pi$.

Conclusion. D'après la propriété qui permet de reconnaître des points cocycliques, $PQRS$ est inscriptible. Ses deux autres angles opposés, en Q et en S, sont alors supplémentaires eux aussi.

Exemple

Énoncé. $[UV]$ est un segment, et W, Z deux points tels que $\widehat{UWV} = \widehat{UZV} = \dfrac{\pi}{2}$.

Cercle. Rappel du collège : le cercle de diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle passe par ses trois sommets. Les triangles UWV et UZV sont rectangles d'hypoténuse $[UV]$.

Conclusion. U, V, W et Z sont cocycliques, sur le cercle de diamètre $[UV]$. Son centre est le milieu de $[UV]$.

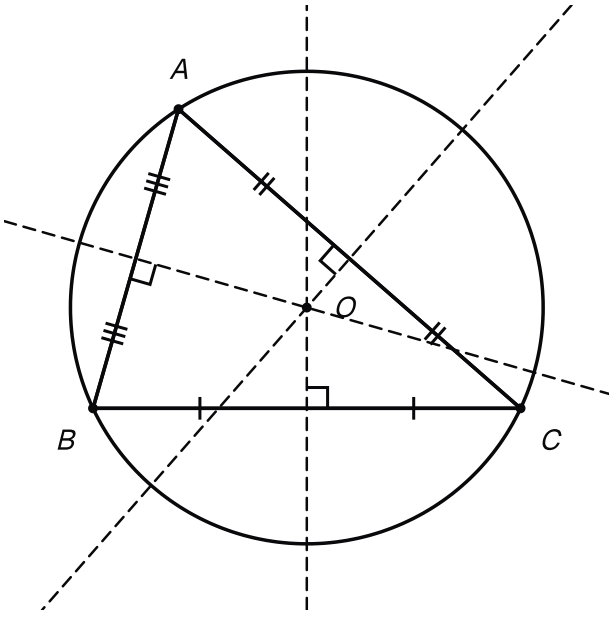
Attention : Opposés, et non consécutifs

Dans $PQRS$, les angles en P et en R sont opposés. Les angles en P et en Q sont consécutifs : leur somme n'a aucune raison de valoir π. Vérifie aussi que le quadrilatère est convexe, en lisant l'ordre de ses sommets.

La loi des sinus

À retenir : Rappel du collège : le cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle passe par ses trois sommets. Son centre est le point de concours des médiatrices des côtés. On note R son rayon : la loi des sinus le relie aux côtés et aux angles du triangle.

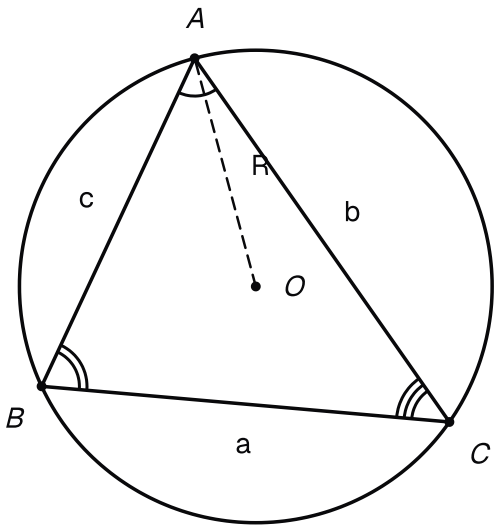


Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est le point de concours des trois médiatrices, à égale distance des trois sommets.

Théorème : Loi des sinus

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures en radians des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Alors

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$



Notations de la loi des sinus : le côté a fait face à l'angle en A, b à l'angle en B, c à l'angle en C, et R est le rayon du cercle passant par les trois sommets.

Méthode : résoudre un triangle avec la loi des sinus

1. **Repère** chaque côté et l'angle qui lui fait face : a face à $\widehat{A}$, b face à $\widehat{B}$, c face à $\widehat{C}$.
2. **Trouve** le troisième angle : la somme des trois angles vaut π.
3. **Choisis** le quotient connu et celui qui contient l'inconnue. Écris leur égalité.
4. **Obtiens** R en divisant l'un de ces quotients par 2.

Exemple

Énoncé. Dans un triangle ABC, $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{6}$, $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{4}$ et $a = 4$. Calcule $\widehat{C}$, b et R.

Troisième angle. $\widehat{C} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}$.

Côté b. D'après la loi des sinus :

$$\begin{aligned}\frac{b}{\sin\widehat{B}} &= \frac{a}{\sin\widehat{A}} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.\end{aligned}$$

Donc $b = 8 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$.

Rayon. $2R = 8$, donc $R = 4$.

Attention : Le diamètre, pas le rayon

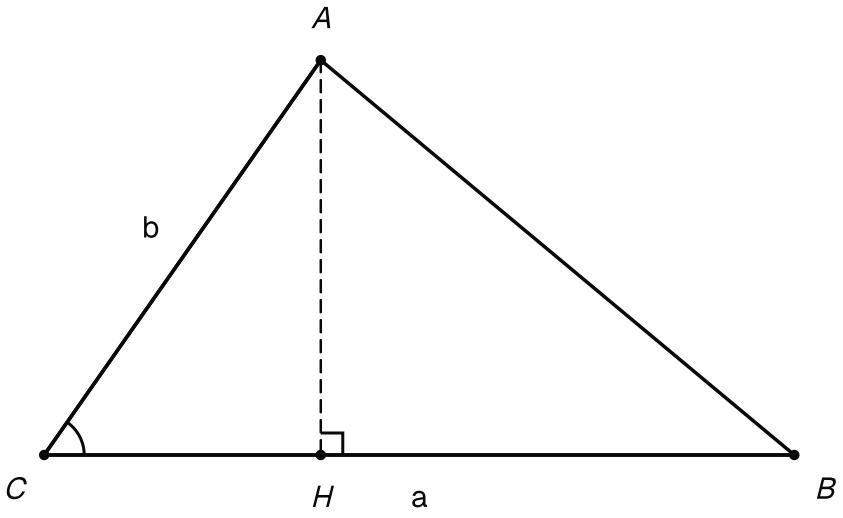
Dans l'exemple ci-dessus, le quotient commun vaut 8 : c'est $2R$, le diamètre du cercle circonscrit. Écrire $R = 8$ double le rayon. Si un angle est donné en degrés, règle la calculatrice en mode degré avant de calculer son sinus.

Aire d'un triangle et rayon du cercle inscrit

Propriété : Aire d'un triangle et sinus d'un angle

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures en radians de ses angles, et $\mathcal{A}$ son aire. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\, ab \sin \widehat{C} \\ &= \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} \\ &= \frac{1}{2}\, ca \sin \widehat{B}.\end{aligned}$$

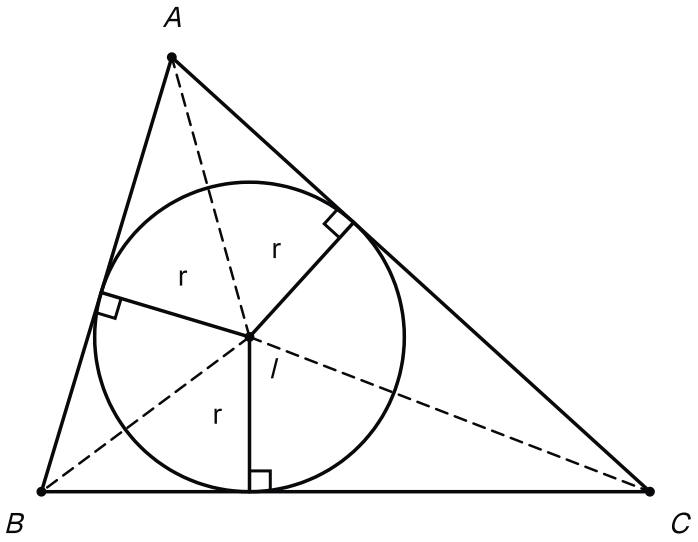


Deux côtés a et b, l'angle en C qu'ils forment, et la hauteur issue de A, égale à b sin C : l'aire vaut la moitié de a fois cette hauteur.

Propriété : Aire d'un triangle et cercle inscrit

Soit ABC un triangle, r le rayon de son cercle inscrit et $\mathcal{A}$ son aire. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre. Alors

$$\mathcal{A} = p\,r.$$



Le cercle inscrit dans ABC, de centre I et de rayon r, touche les trois côtés ; I est à la distance r de chacun d'eux.

Méthode : une aire, puis le rayon du cercle inscrit

1. **Repère** deux côtés connus et l'angle qu'ils forment. Applique $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}$, ou l'une des deux autres écritures.
2. **Additionne** les trois côtés et divise par 2 : c'est le demi-périmètre p.
3. **Divise** l'aire par p : tu obtiens le rayon r du cercle inscrit.
4. **Garde** les valeurs exactes jusqu'au bout. N'arrondis qu'à la fin.

Exemple

Énoncé. Dans un triangle ABC, $b = 8$, $c = 5$ et $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$. Calcule son aire.

Calcul. Les côtés $b = CA$ et $c = AB$ forment l'angle $\widehat{A}$. D'après la formule de l'aire avec un sinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Valeur approchée. $\mathcal{A} \approx 17{,}32$.

Exemple

Énoncé. Le triangle DEF est isocèle en D, avec $DE = DF = 13$ et $EF = 10$. Calcule son aire, puis le rayon r de son cercle inscrit.

Hauteur. Le pied H de la hauteur issue de D est le milieu de $[EF]$. D'après le théorème de Pythagore, $DH^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, donc $DH = 12$.

Aire. $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 12 = 60$. Avec un sinus : $\sin \widehat{E} = \dfrac{12}{13}$, et $\dfrac{1}{2} \times 10 \times 13 \times \dfrac{12}{13} = 60$.

Rayon. $p = \dfrac{13 + 13 + 10}{2} = 18$, donc $r = \dfrac{60}{18} = \dfrac{10}{3}$.

Quelle propriété pour quelle question ?

Méthode : Quelle propriété pour quelle question ?

- **Résoudre** $\cos x = a$ ou $\sin x = a$: contrôle de a, puis deux familles de solutions.
- **Résoudre** $\tan x = a$: une seule famille, en $k\pi$.
- **Une équation moins simple** : isoler, angles associés, nouvelle inconnue, produit nul.
- **Des solutions dans un intervalle** : encadrer k.
- **Une inéquation** : l'intervalle de travail, puis l'arc lu sur le cercle.
- **Un angle dans un cercle** : le théorème de l'angle inscrit.
- **Quatre points sur un cercle** : angles opposés supplémentaires, angles égaux du même côté, ou angles droits.
- **Un côté ou le rayon** R : la loi des sinus.
- **Une aire, puis** r : $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$, puis $\mathcal{A} = p\, r$.

Cosinus, avec k entier relatif

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow$$
$$x = \alpha + 2k\pi \text{ ou}$$
$$x = -\alpha + 2k\pi$$

Sinus, avec k entier relatif

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow$$
$$x = \alpha + 2k\pi \text{ ou}$$
$$x = \pi - \alpha + 2k\pi$$

Tangente, cosinus non nuls, k entier relatif

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow$$
$$x = \alpha + k\pi$$

Angle inscrit, arc contenu dans un demi-cercle

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\, \widehat{AOB}$$

Quadrilatère convexe inscrit

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$$

Loi des sinus

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}}$$
$$= \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

Aire avec un angle

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$$

Aire et cercle inscrit

$$\mathcal{A} = p\, r,$$
$$\text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}$$

À retenir : Rédiger en devoir

Annonce l'intervalle de travail avant toute lecture sur le cercle. Termine chaque famille de solutions par « avec $k \in \mathbb{Z}$ ».

Cite la propriété employée : « d'après le théorème de l'angle inscrit », « d'après la loi des sinus ».

Donne toute valeur de calculatrice comme approchée, en précisant le mode. Trace la figure sur ton cahier.