BURHAN

Équations trigonométriques et angles inscrits : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations trigonométriques et angles inscrits	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Deux équations, une inéquation et un produit

On considère les équations :

$$(E_1) : 2\sin x + \sqrt{3} = 0,$$
$$(E_2) : \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0.$$

1. 1 pts

Résoudre (E_1) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : isole $\sin x$. **Ensuite :** $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'après les angles associés ; utilise la seconde famille du sinus.

2. 1 pts

En déduire les solutions de (E_1) dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On note S_1 cet ensemble.

INDICE

Début : encadre $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ entre -2π et 2π. **Ensuite :** fais de même pour la seconde famille, puis réunis les réels obtenus.

3. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $2\sin x + \sqrt{3} < 0$.

INDICE

Début : l'inéquation s'écrit $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Ensuite :** repère sur le cercle l'arc situé sous la droite horizontale d'ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, lis ses extrémités, puis décide si elles sont comprises.

4. 1 pts

Résoudre (E_2) dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On note S_2 l'ensemble obtenu dans $[-2\pi, 2\pi]$.

INDICE

Début : pose $X = \frac{x}{2}$; l'équation devient $\cos X = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Ensuite :** pour revenir à x, multiplie **chaque** terme par 2.

5. 1 pts

En déduire les solutions dans $[-2\pi, 2\pi]$ de l'équation $\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) = 0$.

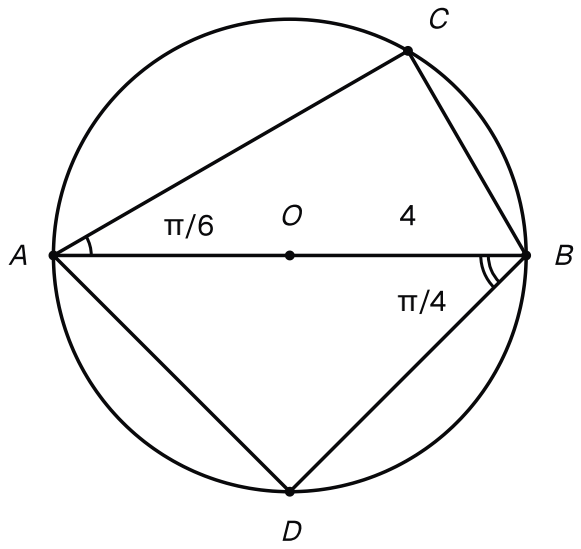
INDICE

Début : applique la règle du produit nul. **Ensuite :** réunis les ensembles S_1 et S_2 des questions 2 et 4, rangés dans l'ordre croissant.

Exercice 2 — 5 pts

Un triangle dans un demi-cercle, un quadrilatère inscrit

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 4, et $[AB]$ un diamètre de $\mathcal{C}$. Le point C de $\mathcal{C}$ vérifie $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$. Le point D de $\mathcal{C}$ est situé de l'autre côté de la droite (AB), avec $\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{4}$. Fais la figure sur ton cahier.



Le cercle de centre O et de rayon 4, son diamètre [AB], le point C tel que l'angle BAC vaut pi sur 6 et le point D, de l'autre côté de (AB), tel que l'angle ABD vaut pi sur 4.

1. — 1 pts

Justifier que le triangle ABC est rectangle en C, puis calculer BC et AC.

INDICE

Début : $[AB]$ est un diamètre ; quelle propriété des angles inscrits s'applique ? **Ensuite :** dans le triangle rectangle, utilise le sinus et le cosinus de l'angle aigu $\widehat{BAC}$, avec $AB = 8$.

2. — 1 pts

Calculer l'angle au centre $\widehat{BOC}$. En déduire la nature du triangle OBC et retrouver BC.

INDICE

Début : $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc d'extrémités B et C qui ne contient pas A ; cet arc est contenu dans un demi-cercle. **Ensuite :** $OB = OC = 4$.

3. — 1 pts

Calculer $\widehat{ADB}$, puis $\widehat{ACD}$.

INDICE

Début : $[AB]$ est un diamètre. **Ensuite :** les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ABD}$ interceptent le même arc d'extrémités A et D ; leurs sommets C et B sont-ils sur le même arc ?

4. 1 pts

Calculer $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$, puis vérifier que ces angles opposés du quadrilatère $ACBD$ sont supplémentaires.

INDICE

Début : $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD}$, et le triangle ABD est rectangle en D. **Ensuite :** $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD}$, avec $\widehat{CBA}$ tiré du triangle ABC.

5. 1 pts

Calculer l'aire exacte du quadrilatère $ACBD$, puis une valeur approchée au centième.

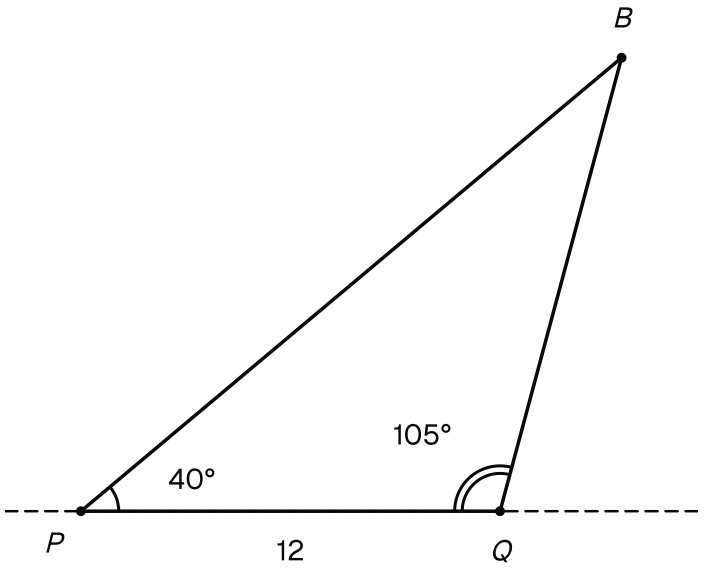
INDICE

Début : découpe $ACBD$ en deux triangles par la diagonale $[AB]$. **Ensuite :** pour chacun, applique la formule de l'aire avec un sinus ; dans ABD, $BD = AB\cos\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3 — 5 pts

Deux phares observent un bateau

Deux phares P et Q sont situés sur une côte rectiligne, assimilée à la droite (PQ), avec $PQ = 12$ km. Depuis les phares, on observe un bateau B en mer : $\widehat{QPB} = 40°$ et $\widehat{PQB} = 105°$. Les sinus se calculent à la calculatrice, en mode degré. Les résultats approchés sont demandés au centième de kilomètre ; garde les valeurs de la calculatrice dans les calculs suivants.



La côte (PQ), les phares P et Q distants de 12 km, et le bateau B, vu depuis P sous un angle de 40 degrés et depuis Q sous un angle de 105 degrés avec la côte.

1. — 1 pts

Calculer l'angle $\widehat{PBQ}$, puis la distance QB par la loi des sinus.

INDICE

Début : la somme des angles du triangle PQB vaut $180°$. **Ensuite :** QB fait face à l'angle en P, et PQ fait face à l'angle en B ; écris l'égalité de la loi des sinus qui les relie.

2. — 0,75 pts

Calculer de même une valeur approchée de la distance PB.

INDICE

Début : PB fait face à l'angle en Q. **Ensuite :** écris l'égalité de la loi des sinus avec le même quotient $\dfrac{PQ}{\sin 35°}$.

3. 0,75 pts

Calculer une valeur approchée du rayon R du cercle qui passe par P, Q et B.

INDICE

Début : ce cercle est le cercle circonscrit au triangle PQB. **Ensuite :** dans la loi des sinus, le quotient commun vaut $2R$.

4. 1 pts

Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle PQB.

INDICE

Début : choisis deux côtés connus et l'angle qu'ils forment : PQ, PB et l'angle en P. **Ensuite :** applique la formule de l'aire avec un sinus, avec la valeur de PB gardée en mémoire.

5. 0,75 pts

En déduire la distance d du bateau à la côte.

INDICE

Début : d est la hauteur du triangle issue de B, relative à la base $[PQ]$. **Ensuite :** écris l'aire sous la forme $\frac{1}{2} \times PQ \times d$.

6. 0,75 pts

Calculer une valeur approchée du demi-périmètre p du triangle PQB, puis du rayon r de son cercle inscrit.

INDICE

Début : $p = \dfrac{PQ + QB + PB}{2}$. **Ensuite :** utilise la relation $\mathcal{A} = p\,r$, et n'arrondis qu'à la fin.

Exercice 4 5 pts

Une équation en tangente, un arc en cosinus

On considère l'équation (E) : $\sqrt{3}\tan(2x) + 1 = 0$, pour les réels x tels que $\cos(2x) \neq 0$, et l'inéquation (I) : $\sqrt{2}\cos x - 1 \leq 0$.

À partir de la question 2, l'intervalle de travail est $[0, 2\pi[$.

1. 1 pts

Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : isole $\tan(2x)$, puis pose $X = 2x$; d'après les angles associés, $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **Ensuite :** pour revenir à x, divise **chaque** terme par 2, y compris $k\pi$.

2. 1 pts

En déduire les solutions de (E) dans $[0, 2\pi[$. On note S_E cet ensemble.

INDICE

Début : encadre $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$ entre 0 et 2π, la borne 2π exclue. **Ensuite :** multiplie par $\dfrac{12}{\pi}$, qui est positif, pour isoler k.

3. 1 pts

Résoudre (I) dans $[0, 2\pi[$. On note S_I cet ensemble.

INDICE

Début : isole $\cos x$, puis applique la propriété des inéquations en cosinus aux réels de $[0, \pi]$, qui sont dans $]-\pi, \pi]$. **Ensuite :** pour un réel x de $]\pi, 2\pi[$, le réel $x - 2\pi$ est dans $]-\pi, 0[$ et repère le même point du cercle.

4. 1 pts

En déduire les solutions de (E) dans $[0, 2\pi[$ qui vérifient aussi (I).

INDICE

Début : pour chaque réel de S_E, regarde s'il appartient à S_I. **Ensuite :** écris $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$ avec le dénominateur 12 pour comparer.

5. 1 pts

Déterminer les réels x de $[0, 2\pi[$ qui vérifient à la fois (I) et $\sin x < 0$. Lesquels sont solutions de (E) ?

INDICE

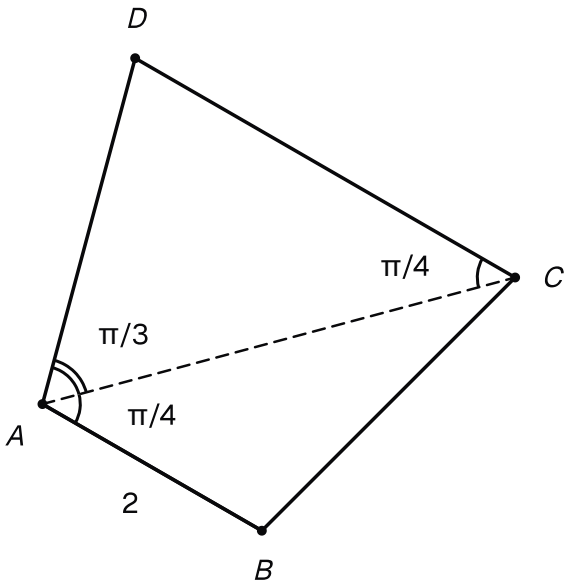
Début : dans $[0, 2\pi[$, $\sin x < 0$ lorsque le point repéré par x est sous l'axe des abscisses : lis l'intervalle correspondant. **Ensuite :** garde les réels communs à cet intervalle et à S_I, puis reprends la question 4.

Exercice 5 5 pts

Deux triangles, un même cercle circonscrit

$ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{CAD} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{ACD} = \dfrac{\pi}{4}$.

Fais la figure sur ton cahier.



Le quadrilatère convexe ABCD et sa diagonale [AC] : AB mesure 2, les angles BAC et ACD valent pi sur 4 et l'angle CAD vaut pi sur 3.

1. 1 pts

Dans le triangle ABC, calculer $\sin \widehat{ACB}$ par la loi des sinus. En déduire $\widehat{ACB}$, puis $\widehat{ABC}$.

INDICE

Début : AB fait face à l'angle en C, et BC fait face à l'angle en A. **Ensuite :** dans $]0, \pi[$, deux réels ont pour sinus $\dfrac{1}{2}$; élimine celui qui donnerait une somme d'angles trop grande.

2. 1 pts

Calculer $\widehat{ADC}$. En déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques.

INDICE

Début : utilise la somme des angles du triangle ACD. **Ensuite :** les angles en B et en D sont opposés dans le quadrilatère convexe $ABCD$; calcule leur somme.

3. 1 pts

Calculer le rayon R du cercle $\mathcal{C}$, puis les longueurs AD et CD.

INDICE

Début : $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC ; dans la loi des sinus, le quotient commun vaut $2R$. **Ensuite :** $\mathcal{C}$ est aussi le cercle circonscrit au triangle ACD : chaque côté de ce triangle vaut $2R$ fois le sinus de l'angle qui lui fait face.

4. 1 pts

Calculer $\widehat{BDC}$ et $\widehat{ADB}$, puis vérifier que leur somme est égale à $\widehat{ADC}$.

INDICE

Début : $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BAC}$ interceptent un arc d'extrémités B et C ; les sommets A et D sont-ils du même côté de la droite (BC) ? **Ensuite :** raisonne de même avec $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACB}$, et la droite (AB).

5. 1 pts

On donne $\sin\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Calculer la longueur AC, puis l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ACD et une valeur approchée au centième.

INDICE

Début : dans le triangle ABC, AC fait face à l'angle $\widehat{ABC} = \dfrac{7\pi}{12}$; utilise $2R$. **Ensuite :** dans le triangle ACD, choisis les côtés AC et AD, qui forment l'angle $\widehat{CAD}$, et applique la formule de l'aire avec un sinus.