BURHAN

Équations trigonométriques et angles inscrits : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations trigonométriques et angles inscrits	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Deux équations, une inéquation et un produit

On considère les équations :

$$(E_1) : 2\sin x + \sqrt{3} = 0,$$
$$(E_2) : \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0.$$

1. 1 pts

Résoudre (E_1) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : isole $\sin x$. **Ensuite :** $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'après les angles associés ; utilise la seconde famille du sinus.

CORRIGÉ

Équation fondamentale. (E_1) s'écrit $2\sin x = -\sqrt{3}$, soit $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'après les angles associés, $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solutions. On applique la résolution de l'équation $\sin x = a$ avec $\alpha = -\frac{\pi}{3}$; la seconde famille est celle des réels $\pi - \alpha + 2k\pi$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou } x &= \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions de (E_1) dans $\mathbb{R}$ sont les réels $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. 1 pts

En déduire les solutions de (E_1) dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On note S_1 cet ensemble.

INDICE

Début : encadre $-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ entre -2π et 2π. **Ensuite :** fais de même pour la seconde famille, puis réunis les réels obtenus.

CORRIGÉ

On encadre chaque famille de la question 1 entre -2π et 2π, bornes comprises.

- **Première famille.** $-2\pi \leq -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{6} \leq k \leq \dfrac{7}{6}$, donc $k = 0$ ou $k = 1$: $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{3}$.
- **Seconde famille.** $-2\pi \leq \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{3} \leq k \leq \dfrac{1}{3}$, donc $k = -1$ ou $k = 0$: $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

Conclusion. Rangées dans l'ordre croissant, les solutions de (E_1) dans $[-2\pi, 2\pi]$ forment l'ensemble :

$$S_1 = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

3. 1 pts

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $2\sin x + \sqrt{3} < 0$.

INDICE

Début : l'inéquation s'écrit $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Ensuite :** repère sur le cercle l'arc situé sous la droite horizontale d'ordonnée $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, lis ses extrémités, puis décide si elles sont comprises.

CORRIGÉ

Intervalle de travail. On travaille dans $]-\pi, \pi]$. L'inéquation s'écrit $2\sin x < -\sqrt{3}$, soit $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Frontières. On pose $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = -\dfrac{\pi}{3}$: d'après la question 1, c'est l'unique réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin\beta = a$. Dans $]-\pi, \pi]$, les réels où $\sin x = a$ sont $\beta = -\dfrac{\pi}{3}$ et $-\pi - \beta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Lecture. D'après la propriété des inéquations en sinus, cas $a < 0$, un réel x de $]-\pi, \pi]$ vérifie $\sin x \leq a$ exactement lorsque $-\pi - \beta \leq x \leq \beta$. Sur le cercle, c'est le petit arc situé sous la droite horizontale d'ordonnée $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Inégalité stricte. Aux deux frontières, $\sin x = a$: elles ne vérifient pas $\sin x < a$ et sont exclues.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left]-\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}\right[$.

4. 1 pts

Résoudre (E_2) dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On note S_2 l'ensemble obtenu dans $[-2\pi, 2\pi]$.

INDICE

Début : pose $X = \dfrac{x}{2}$; l'équation devient $\cos X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Ensuite :** pour revenir à x, multiplie **chaque** terme par 2.

CORRIGÉ

Dans $\mathbb{R}$. (E_2) s'écrit $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$. On pose $X = \dfrac{x}{2}$. D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, appliquée à X :

$$\begin{aligned} &\cos X = \cos\frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ &X = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou}\ &X = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. On revient à $x = 2X$ en multipliant chaque terme par 2, y compris $2k\pi$: $x = \dfrac{\pi}{2} + 4k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans $[-2\pi, 2\pi]$.

- Première famille : $-2\pi \le \dfrac{\pi}{2} + 4k\pi \le 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{8} \le k \le \dfrac{3}{8}$, donc $k = 0$: $x = \dfrac{\pi}{2}$.
- Seconde famille : $-2\pi \le -\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi \le 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{3}{8} \le k \le \dfrac{5}{8}$, donc $k = 0$: $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. Dans $\mathbb{R}$, les solutions de (E_2) sont les réels $\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{2} + 4k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[-2\pi, 2\pi]$, $S_2 = \left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

5. 1 pts

En déduire les solutions dans $[-2\pi, 2\pi]$ de l'équation $\left(2\sin x + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1\right) = 0$.

INDICE

Début : applique la règle du produit nul. **Ensuite :** réunis les ensembles S_1 et S_2 des questions 2 et 4, rangés dans l'ordre croissant.

CORRIGÉ

Produit nul. Un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. L'équation équivaut donc à : (E_1) ou (E_2).

Réunion. D'après les questions 2 et 4, ses solutions dans $[-2\pi, 2\pi]$ sont les réels de $S_1 \cup S_2$. Ces deux ensembles n'ont aucun élément commun.

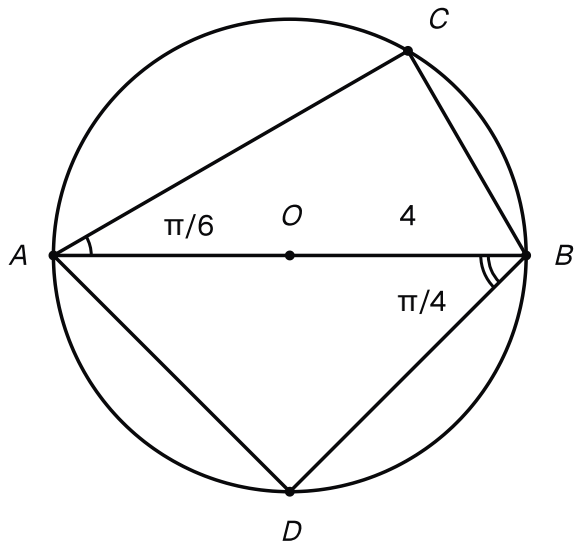
Conclusion. L'équation a six solutions dans $[-2\pi, 2\pi]$, rangées dans l'ordre croissant :

$$S = \left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

Exercice 2 — 5 pts

Un triangle dans un demi-cercle, un quadrilatère inscrit

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 4, et $[AB]$ un diamètre de $\mathcal{C}$. Le point C de $\mathcal{C}$ vérifie $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$. Le point D de $\mathcal{C}$ est situé de l'autre côté de la droite (AB), avec $\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{4}$. Fais la figure sur ton cahier.



Le cercle de centre O et de rayon 4, son diamètre [AB], le point C tel que l'angle BAC vaut pi sur 6 et le point D, de l'autre côté de (AB), tel que l'angle ABD vaut pi sur 4.

1. — 1 pts

Justifier que le triangle ABC est rectangle en C, puis calculer BC et AC.

INDICE

Début : $[AB]$ est un diamètre ; quelle propriété des angles inscrits s'applique ? **Ensuite :** dans le triangle rectangle, utilise le sinus et le cosinus de l'angle aigu $\widehat{BAC}$, avec $AB = 8$.

CORRIGÉ

Angle droit. Le point C est sur le cercle $\mathcal{C}$, dont $[AB]$ est un diamètre. D'après la propriété des angles inscrits, dans le cas du diamètre, $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle ABC est rectangle en C.

Longueurs. Le rayon vaut 4, donc $AB = 8$. Dans le triangle ABC rectangle en C, d'hypoténuse $[AB]$:

$$\begin{aligned} BC &= AB \sin \widehat{BAC} \\ &= 8 \times \frac{1}{2} = 4, \\ AC &= AB \cos \widehat{BAC} \\ &= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le triangle ABC est rectangle en C, avec $BC = 4$ et $AC = 4\sqrt{3}$.

2. 1 pts

Calculer l'angle au centre $\widehat{BOC}$. En déduire la nature du triangle OBC et retrouver BC.

INDICE

Début : $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc d'extrémités B et C qui ne contient pas A ; cet arc est contenu dans un demi-cercle. **Ensuite :** $OB = OC = 4$.

CORRIGÉ

Angle au centre. L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc d'extrémités B et C qui ne contient pas A. Cet arc est inclus dans le demi-cercle d'extrémités A et B qui contient C. D'après le théorème de l'angle inscrit, l'angle au centre qui intercepte cet arc en est le double :

$$\widehat{BOC} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Nature de OBC. Comme $OB = OC = 4$, le triangle OBC est isocèle en O. Ses deux angles à la base sont égaux et ont pour somme $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$: chacun mesure $\frac{\pi}{3}$. Ses trois angles sont égaux, donc il est équilatéral.

Conclusion. $\widehat{BOC} = \frac{\pi}{3}$; le triangle OBC est équilatéral, donc $BC = OB = 4$, comme à la question 1.

3. 1 pts

Calculer $\widehat{ADB}$, puis $\widehat{ACD}$.

INDICE

Début : $[AB]$ est un diamètre. **Ensuite :** les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ABD}$ interceptent le même arc d'extrémités A et D ; leurs sommets C et B sont-ils sur le même arc ?

CORRIGÉ

Angle $\widehat{ADB}$. Le point D est sur le cercle de diamètre $[AB]$. D'après la propriété des angles inscrits, dans le cas du diamètre, $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$.

Position de B et de C. Les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB) : d'après la définition des arcs, ils sont sur les deux demi-cercles différents d'extrémités A et B. L'arc d'extrémités A et D qui ne contient pas B est inclus dans le demi-cercle qui contient D ; il ne contient donc pas C. Ainsi B et C sont sur le même arc d'extrémités A et D.

Angle $\widehat{ACD}$. Les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ABD}$ interceptent le même arc. D'après la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \frac{\pi}{4}$.

Conclusion. $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{4}$.

4. 1 pts

Calculer $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBD}$, puis vérifier que ces angles opposés du quadrilatère $ACBD$ sont supplémentaires.

INDICE

Début : $\widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD}$, et le triangle ABD est rectangle en D. **Ensuite :** $\widehat{CBD} = \widehat{CBA} + \widehat{ABD}$, avec $\widehat{CBA}$ tiré du triangle ABC.

CORRIGÉ

Angle en A. D'après la question 3, le triangle ABD est rectangle en D ; ses angles aigus sont complémentaires, donc $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$. Comme C et D sont de part et d'autre de (AB), la demi-droite $[AB)$ partage l'angle $\widehat{CAD}$:

$$\widehat{CAD} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.$$

Angle en B. Dans le triangle ABC rectangle en C, $\widehat{CBA} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. De même, la demi-droite $[BA)$ partage l'angle $\widehat{CBD}$:

$$\widehat{CBD} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Convexité. Les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB), donc le segment $[CD]$ coupe cette droite. Le point d'intersection est intérieur au disque : il est sur le diamètre $[AB]$. Les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ de $ACBD$ se coupent, donc ce quadrilatère est convexe.

Somme. Les angles en A et en B du quadrilatère convexe inscrit $ACBD$ sont opposés :

$$\widehat{CAD} + \widehat{CBD} = \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi.$$

Conclusion. $\widehat{CAD} = \dfrac{5\pi}{12}$ et $\widehat{CBD} = \dfrac{7\pi}{12}$; ces angles opposés de $ACBD$ sont bien supplémentaires, comme l'annonce la propriété des angles opposés d'un quadrilatère inscrit.

5. 1 pts

Calculer l'aire exacte du quadrilatère $ACBD$, puis une valeur approchée au centième.

INDICE

Début : découpe $ACBD$ en deux triangles par la diagonale $[AB]$. **Ensuite :** pour chacun, applique la formule de l'aire avec un sinus ; dans ABD, $BD = AB\cos\dfrac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Découpage. La diagonale $[AB]$ partage le quadrilatère convexe $ACBD$ en deux triangles, ABC et ABD : l'aire de $ACBD$ est la somme de leurs aires.

Triangle ABC. Les côtés $[AB]$ et $[AC]$, de longueurs 8 et $4\sqrt{3}$, forment l'angle $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$. D'après la formule de l'aire avec un sinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\\ &= 8\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Triangle ABD. Dans le triangle ABD rectangle en D, $BD = AB\cos\widehat{ABD} = 8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$. Les côtés $[BA]$ et $[BD]$ forment l'angle $\widehat{ABD} = \dfrac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{2}\\ &\quad\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 16.\end{aligned}$$

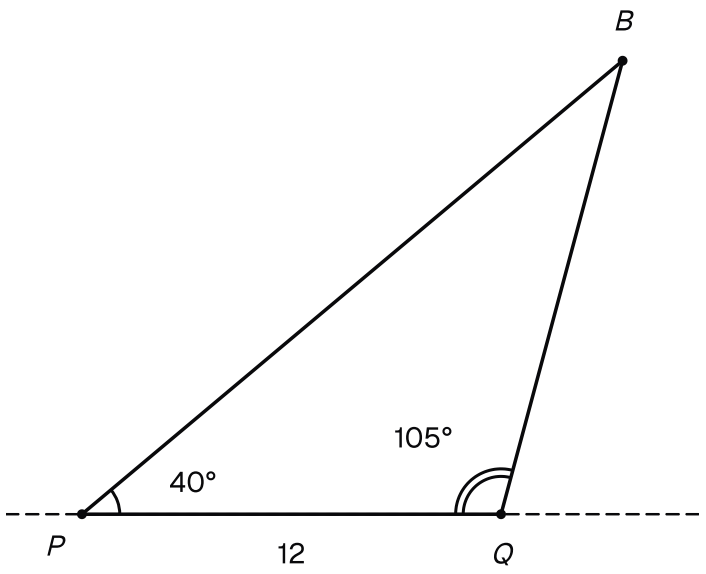
Total. $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 16 + 8\sqrt{3}$.

Conclusion. L'aire exacte de $ACBD$ vaut $16 + 8\sqrt{3}$, soit environ $29{,}86$.

Exercice 3 — 5 pts

Deux phares observent un bateau

Deux phares P et Q sont situés sur une côte rectiligne, assimilée à la droite (PQ), avec $PQ = 12$ km. Depuis les phares, on observe un bateau B en mer : $\widehat{QPB} = 40^\circ$ et $\widehat{PQB} = 105^\circ$. Les sinus se calculent à la calculatrice, en mode degré. Les résultats approchés sont demandés au centième de kilomètre ; garde les valeurs de la calculatrice dans les calculs suivants.



La côte (PQ), les phares P et Q distants de 12 km, et le bateau B, vu depuis P sous un angle de 40 degrés et depuis Q sous un angle de 105 degrés avec la côte.

1. — 1 pts

Calculer l'angle $\widehat{PBQ}$, puis la distance QB par la loi des sinus.

INDICE

Début : la somme des angles du triangle PQB vaut 180°. **Ensuite :** QB fait face à l'angle en P, et PQ fait face à l'angle en B ; écris l'égalité de la loi des sinus qui les relie.

CORRIGÉ

Angle en B. La somme des angles du triangle PQB vaut 180° :

$$\begin{aligned}\widehat{PBQ} &= 180^\circ - 40^\circ - 105^\circ \\ &= 35^\circ.\end{aligned}$$

Distance QB. Le côté $[QB]$ fait face à l'angle en P, et le côté $[PQ]$ à l'angle en B. D'après la loi des sinus :

$$\frac{QB}{\sin 40^\circ} = \frac{PQ}{\sin 35^\circ}.$$

Donc $QB = \dfrac{12 \sin 40^\circ}{\sin 35^\circ}$, soit environ $13{,}45$ km.

Conclusion. $\widehat{PBQ} = 35^\circ$ et $QB \approx 13{,}45$ km.

2. 0,75 pts

Calculer de même une valeur approchée de la distance PB.

INDICE

Début : PB fait face à l'angle en Q. **Ensuite :** écris l'égalité de la loi des sinus avec le même quotient $\dfrac{PQ}{\sin 35^\circ}$.

CORRIGÉ

Le côté $[PB]$ fait face à l'angle en Q, de mesure 105°. D'après la loi des sinus, avec le même quotient qu'à la question 1 :

$$\frac{PB}{\sin 105^\circ} = \frac{PQ}{\sin 35^\circ}.$$

Donc $PB = \dfrac{12 \sin 105^\circ}{\sin 35^\circ}$, soit environ $20{,}21$ km.

Conclusion. $PB \approx 20{,}21$ km.

3. 0,75 pts

Calculer une valeur approchée du rayon R du cercle qui passe par P, Q et B.

INDICE

Début : ce cercle est le cercle circonscrit au triangle PQB. **Ensuite :** dans la loi des sinus, le quotient commun vaut $2R$.

CORRIGÉ

Le cercle qui passe par P, Q et B est le cercle circonscrit au triangle PQB. D'après la loi des sinus, le quotient commun vaut $2R$:

$$2R = \frac{PQ}{\sin 35^\circ} = \frac{12}{\sin 35^\circ}.$$

Donc $R = \dfrac{6}{\sin 35^\circ}$, soit environ $10{,}46$ km.

Conclusion. $R \approx 10{,}46$ km.

4. 1 pts

Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle PQB.

INDICE

Début : choisis deux côtés connus et l'angle qu'ils forment : PQ, PB et l'angle en P. **Ensuite :** applique la formule de l'aire avec un sinus, avec la valeur de PB gardée en mémoire.

CORRIGÉ

Les côtés $[PQ]$ et $[PB]$ forment l'angle $\widehat{QPB} = 40°$. D'après la formule de l'aire avec un sinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times PQ \times PB \\ &\quad \times \sin 40° \\ &= 6 \times PB \times \sin 40°.\end{aligned}$$

Avec la valeur de PB gardée en mémoire, on obtient pour $\mathcal{A}$ environ $77{,}94$ km².

Conclusion. L'aire du triangle PQB vaut environ $77{,}94$ km².

5. 0,75 pts

En déduire la distance d du bateau à la côte.

INDICE

Début : d est la hauteur du triangle issue de B, relative à la base $[PQ]$. **Ensuite :** écris l'aire sous la forme $\frac{1}{2} \times PQ \times d$.

CORRIGÉ

Hauteur. La distance d du bateau à la côte est la longueur de la hauteur issue de B du triangle PQB, relative à la base $[PQ]$. D'après la formule de l'aire d'un triangle, vue au collège,
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times PQ \times d = 6d$.

Calcul. Donc $d = \frac{\mathcal{A}}{6}$, soit environ $12{,}99$ km.

Contrôle. L'angle en Q est obtus : le pied H de la hauteur issue de B est sur la demi-droite $[PQ)$, au-delà de Q. Le triangle PHB est rectangle en H, avec $\widehat{HPB} = 40°$, donc $d = PB \sin 40°$: on retrouve environ $12{,}99$ km.

Conclusion. Le bateau est à environ $12{,}99$ km de la côte.

6. `0,75 pts`

Calculer une valeur approchée du demi-périmètre p du triangle PQB, puis du rayon r de son cercle inscrit.

INDICE

Début : $p = \dfrac{PQ + QB + PB}{2}$. **Ensuite :** utilise la relation $\mathcal{A} = p\,r$, et n'arrondis qu'à la fin.

CORRIGÉ

Demi-périmètre. Avec les valeurs gardées en mémoire, $p = \dfrac{PQ + QB + PB}{2}$, soit environ $22{,}83$ km.

Rayon r. D'après la relation entre l'aire et le rayon du cercle inscrit, $\mathcal{A} = p\,r$, donc :

$$r = \frac{\mathcal{A}}{p}.$$

On n'arrondit qu'à la fin : r vaut environ $3{,}41$ km.

Conclusion. $p \approx 22{,}83$ km et $r \approx 3{,}41$ km.

Exercice 4 5 pts

Une équation en tangente, un arc en cosinus

On considère l'équation (E) : $\sqrt{3}\tan(2x)+1=0$, pour les réels x tels que $\cos(2x)\neq 0$, et l'inéquation (I) : $\sqrt{2}\cos x-1\leq 0$.

À partir de la question 2, l'intervalle de travail est $[0,2\pi[$.

1. 1 pts

Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Début : isole $\tan(2x)$, puis pose $X=2x$; d'après les angles associés, $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **Ensuite :** pour revenir à x, divise **chaque** terme par 2, y compris $k\pi$.

CORRIGÉ

Ligne isolée. (E) s'écrit $\sqrt{3}\tan(2x)=-1$, soit $\tan(2x)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. On pose $X=2x$, avec $\cos X\neq 0$.

Valeur usuelle. On sait que $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D'après les angles associés, $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Nouvelle inconnue. D'après la résolution de l'équation $\tan x=a$, appliquée à X :

$$\begin{aligned}&\tan X=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \Leftrightarrow\ &X=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\end{aligned}$$

avec $k\in\mathbb{Z}$.

Retour à x. On a $2x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi$. On divise chaque terme par 2, y compris $k\pi$:

$$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}.$$

Conclusion. Les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ sont les réels $-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. 1 pts

En déduire les solutions de (E) dans $[0, 2\pi[$. On note S_E cet ensemble.

INDICE

Début : encadre $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}$ entre 0 et 2π, la borne 2π exclue. **Ensuite :** multiplie par $\dfrac{12}{\pi}$, qui est positif, pour isoler k.

CORRIGÉ

On cherche les entiers k tels que :

$$0 \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi.$$

En multipliant par $\dfrac{12}{\pi}$, qui est positif, cette condition équivaut à $0 \leq -1 + 6k < 24$, soit $\dfrac{1}{6} \leq k < \dfrac{25}{6}$. Donc $k = 1, 2, 3$ ou 4.

Valeurs. Pour ces entiers, $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{6k\pi}{12} = \dfrac{(6k-1)\pi}{12}$ vaut $\dfrac{5\pi}{12}$, $\dfrac{11\pi}{12}$, $\dfrac{17\pi}{12}$ puis $\dfrac{23\pi}{12}$. Sur le cercle, deux points consécutifs sont séparés d'un quart de tour.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$:

$$S_E = \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}.$$

3. 1 pts

Résoudre (I) dans $[0, 2\pi[$. On note S_I cet ensemble.

INDICE

Début : isole $\cos x$, puis applique la propriété des inéquations en cosinus aux réels de $[0, \pi]$, qui sont dans $]-\pi, \pi]$. **Ensuite :** pour un réel x de $]\pi, 2\pi[$, le réel $x - 2\pi$ est dans $]-\pi, 0[$ et repère le même point du cercle.

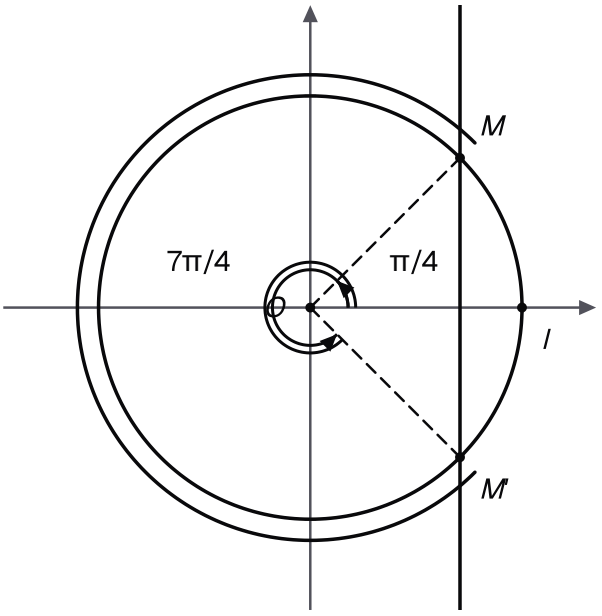
CORRIGÉ

Ligne isolée. (I) s'écrit $\sqrt{2}\cos x \leq 1$. On divise par $\sqrt{2}$, qui est positif : $\cos x \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Le réel de $]0, \pi[$ dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Réels de $[0, \pi]$. Ils appartiennent à $]-\pi, \pi]$. D'après la propriété des inéquations en cosinus, un réel x de $]-\pi, \pi]$ vérifie $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ exactement lorsque $-\pi < x \leq -\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$. Parmi les réels de $[0, \pi]$, on garde ceux de $\left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$.

Réels de $]\pi, 2\pi[$. Pour un tel x, le réel $x - 2\pi$ appartient à $]-\pi, 0[$ et repère le même point du cercle, à un tour près : il a le même cosinus. D'après la propriété précédente, x est solution si et seulement si $x - 2\pi \leq -\dfrac{\pi}{4}$, soit $x \leq \dfrac{7\pi}{4}$. On garde les réels de $\left]\pi, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, $S_I = \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$. Sur le cercle, c'est l'arc des points d'abscisse au plus $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; il contient le point repéré par π.



Dans l'intervalle de 0 à 2 pi, l'ensemble S_I est un seul intervalle, de pi sur 4 à 7 pi sur 4 : le grand arc à gauche de la droite d'abscisse racine de 2 sur 2.

4. 1 pts

En déduire les solutions de (E) dans $[0, 2\pi[$ qui vérifient aussi (I).

INDICE

Début : pour chaque réel de S_E, regarde s'il appartient à S_I. **Ensuite :** écris $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ avec le dénominateur 12 pour comparer.

CORRIGÉ

Comparaison. Avec le dénominateur 12, $\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{4} = \frac{21\pi}{12}$, donc $S_I = \left[\frac{3\pi}{12}, \frac{21\pi}{12}\right]$.

- $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$ sont compris entre $\frac{3\pi}{12}$ et $\frac{21\pi}{12}$: ils appartiennent à S_I.
- $\frac{23\pi}{12} > \frac{21\pi}{12}$: ce réel n'appartient pas à S_I.

Contrôle. Le réel $\frac{23\pi}{12} - 2\pi = -\frac{\pi}{12}$ repère le même point du cercle et appartient à $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. D'après la propriété des inéquations en cosinus, $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$: le réel $\frac{23\pi}{12}$ ne vérifie pas (I).

Conclusion. Les solutions cherchées sont $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$.

5. 1 pts

Déterminer les réels x de $[0, 2\pi[$ qui vérifient à la fois (I) et $\sin x < 0$. Lesquels sont solutions de (E) ?

INDICE

Début : dans $[0, 2\pi[$, $\sin x < 0$ lorsque le point repéré par x est sous l'axe des abscisses : lis l'intervalle correspondant. **Ensuite :** garde les réels communs à cet intervalle et à S_I, puis reprends la question 4.

CORRIGÉ

Condition sur le sinus. On travaille dans $[0, 2\pi[$. Pour x dans $]\pi, 2\pi[$, le point repéré par x est sous l'axe des abscisses, donc $\sin x < 0$. Pour x dans $[0, \pi]$, il est sur l'axe ou au-dessus, donc $\sin x \geq 0$. Ainsi $\sin x < 0$ exactement lorsque $x \in]\pi, 2\pi[$.

Les deux conditions. Les réels cherchés sont ceux de $S_I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ qui appartiennent aussi à $]\pi, 2\pi[$: ce sont les réels de $\left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right]$. Sur le cercle, c'est la partie de l'arc de la question 3 située sous l'axe des abscisses.

Retour à (E). Parmi les solutions de la question 4, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$ sont inférieurs à $\pi = \frac{12\pi}{12}$: ils ne conviennent pas. Comme $\frac{12\pi}{12} < \frac{17\pi}{12} \leq \frac{21\pi}{12}$, le réel $\frac{17\pi}{12}$ convient.

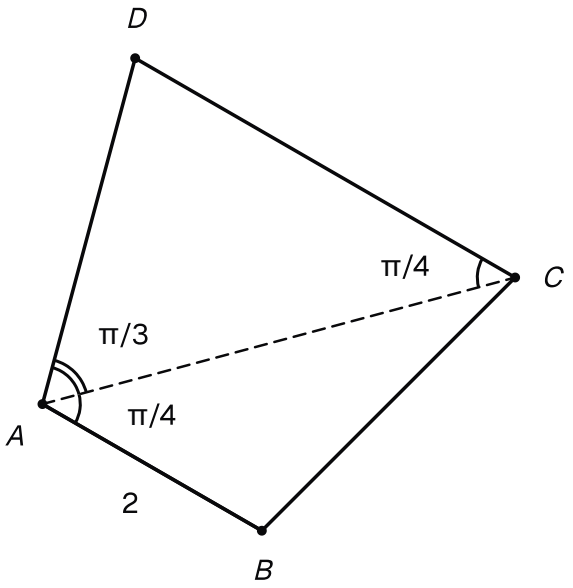
Conclusion. Les réels de $[0, 2\pi[$ qui vérifient (I) et $\sin x < 0$ forment l'intervalle $\left]\pi, \frac{7\pi}{4}\right]$; parmi eux, seul $\frac{17\pi}{12}$ est solution de (E).

Exercice 5 5 pts

Deux triangles, un même cercle circonscrit

$ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{CAD} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{ACD} = \dfrac{\pi}{4}$.

Fais la figure sur ton cahier.



Le quadrilatère convexe ABCD et sa diagonale [AC] : AB mesure 2, les angles BAC et ACD valent pi sur 4 et l'angle CAD vaut pi sur 3.

1. 1 pts

Dans le triangle ABC, calculer $\sin\widehat{ACB}$ par la loi des sinus. En déduire $\widehat{ACB}$, puis $\widehat{ABC}$.

INDICE

Début : AB fait face à l'angle en C, et BC fait face à l'angle en A. **Ensuite :** dans $]0,\pi[$, deux réels ont pour sinus $\dfrac{1}{2}$; élimine celui qui donnerait une somme d'angles trop grande.

CORRIGÉ

Sinus. Dans le triangle ABC, le côté $[AB]$ fait face à l'angle en C, et le côté $[BC]$ à l'angle en A.

D'après la loi des sinus :

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sin\widehat{ACB} &= \frac{AB\sin\widehat{BAC}}{BC}\\ &= \frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Angle $\widehat{ACB}$. L'angle $\widehat{ACB}$ appartient à $]0,\pi[$. D'après la résolution de l'équation $\sin x = a$, les réels de $]0,\pi[$ de sinus $\dfrac{1}{2}$ sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$. Or $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{13\pi}{12}>\pi$: avec $\dfrac{5\pi}{6}$, la somme des angles du triangle dépasserait π. Donc $\widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{6}$.

Angle $\widehat{ABC}$. La somme des angles du triangle ABC vaut π :

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} &= \pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{7\pi}{12}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sin\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}$, $\widehat{ACB}=\dfrac{\pi}{6}$ et $\widehat{ABC}=\dfrac{7\pi}{12}$.

2. 1 pts

Calculer $\widehat{ADC}$. En déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques.

INDICE

Début : utilise la somme des angles du triangle ACD. **Ensuite :** les angles en B et en D sont opposés dans le quadrilatère convexe $ABCD$; calcule leur somme.

CORRIGÉ

Angle en D. La somme des angles du triangle ACD vaut π :

$$\begin{aligned}\widehat{ADC} &= \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

Angles opposés. Dans le quadrilatère convexe $ABCD$, les angles en B et en D sont opposés, et d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}&\widehat{ABC} + \widehat{ADC} \\ &= \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \pi.\end{aligned}$$

Critère. Le quadrilatère $ABCD$ est convexe et deux de ses angles opposés sont supplémentaires. D'après la reconnaissance des points cocycliques, $ABCD$ est inscriptible.

Conclusion. $\widehat{ADC} = \dfrac{5\pi}{12}$, et les points A, B, C et D sont sur un même cercle, noté $\mathcal{C}$: ils sont cocycliques.

3. 1 pts

Calculer le rayon R du cercle $\mathcal{C}$, puis les longueurs AD et CD.

INDICE

Début : $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC ; dans la loi des sinus, le quotient commun vaut $2R$. **Ensuite :** $\mathcal{C}$ est aussi le cercle circonscrit au triangle ACD : chaque côté de ce triangle vaut $2R$ fois le sinus de l'angle qui lui fait face.

CORRIGÉ

Rayon. Le cercle $\mathcal{C}$ passe par A, B et C : c'est le cercle circonscrit au triangle ABC. D'après la loi des sinus, le quotient commun vaut $2R$:

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4. \end{aligned}$$

On obtient $2R = 4$, donc $R = 2$.

Longueurs. Le cercle $\mathcal{C}$ passe aussi par D : c'est le cercle circonscrit au triangle ACD, de même rayon $R = 2$. D'après la loi des sinus dans ce triangle :

- $[AD]$ fait face à l'angle en C : $AD = 2R\sin\widehat{ACD} = 4 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$;
- $[CD]$ fait face à l'angle en A : $CD = 2R\sin\widehat{CAD} = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Conclusion. $R = 2$, $AD = 2\sqrt{2}$ et $CD = 2\sqrt{3}$.

4. 1 pts

Calculer $\widehat{BDC}$ et $\widehat{ADB}$, puis vérifier que leur somme est égale à $\widehat{ADC}$.

INDICE

Début : $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BAC}$ interceptent un arc d'extrémités B et C ; les sommets A et D sont-ils du même côté de la droite (BC) ? **Ensuite :** raisonne de même avec $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACB}$, et la droite (AB).

CORRIGÉ

Angle $\widehat{BDC}$. Le segment $[BC]$ est un côté du quadrilatère convexe $ABCD$: A et D sont du même côté de la droite (BC). D'après la définition des arcs, ils sont sur le même arc d'extrémités B et C. D'après la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$.

Angle $\widehat{ADB}$. De même, $[AB]$ est un côté du quadrilatère : C et D sont du même côté de la droite (AB), donc sur le même arc d'extrémités A et B. Ainsi $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{6}$, d'après la question 1.

Somme. La diagonale $[DB]$ partage l'angle $\widehat{ADC}$ du quadrilatère convexe :

$$\begin{aligned}&\widehat{ADB} + \widehat{BDC}\\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{ADB} = \dfrac{\pi}{6}$; leur somme vaut $\dfrac{5\pi}{12}$, c'est-à-dire $\widehat{ADC}$, comme à la question 2.

5. 1 pts

On donne $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Calculer la longueur AC, puis l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ACD et une valeur approchée au centième.

INDICE

Début : dans le triangle ABC, AC fait face à l'angle $\widehat{ABC}=\dfrac{7\pi}{12}$; utilise $2R$. **Ensuite :** dans le triangle ACD, choisis les côtés AC et AD, qui forment l'angle $\widehat{CAD}$, et applique la formule de l'aire avec un sinus.

CORRIGÉ

Diagonale AC. Dans le triangle ABC, le côté $[AC]$ fait face à l'angle $\widehat{ABC}=\dfrac{7\pi}{12}$. D'après la loi des sinus, avec $2R=4$:

$$\begin{aligned} AC &= 2R\sin\widehat{ABC}\\ &= 4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ &= \sqrt{6}+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Aire. Les côtés $[AC]$ et $[AD]$ forment l'angle $\widehat{CAD}=\dfrac{\pi}{3}$, et $AD=2\sqrt{2}$ d'après la question 3. D'après la formule de l'aire avec un sinus, $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\times AC\times AD\times\sin\widehat{CAD}$. Or $AD\times\sin\widehat{CAD}=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sqrt{6}\\ &= \frac{6+\sqrt{12}}{2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2}\\ &= 3+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}=3+\sqrt{3}$, soit environ $4{,}73$.

Contrôle. D'après les angles associés, $\sin\widehat{ADC}=\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\pi-\dfrac{7\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{7\pi}{12}$. Les côtés $[DA]$ et $[DC]$ forment l'angle $\widehat{ADC}$, et $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{6+2\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $AC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, et l'aire du triangle ACD vaut $\mathcal{A}=3+\sqrt{3}$, soit environ $4{,}73$.