BURHAN

Équations trigonométriques et angles inscrits : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations trigonométriques et angles inscrits	Entraînement	7

Exercice 1

Un sinus opposé à un autre

On considère l'équation (E) : $\sin x + \sin \dfrac{\pi}{9} = 0$.

1.

Justifier que (E) équivaut à $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

INDICE

Outil : isole $\sin x$, puis utilise l'angle associé $-a$: que vaut $\sin(-a)$?

2.

Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : la résolution de l'équation $\sin x = \sin \alpha$, avec $\alpha = -\dfrac{\pi}{9}$. Calcule soigneusement $\pi - \alpha$.

3.

En déduire les solutions de (E) dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : encadre chaque famille entre 0 et 2π, puis isole k.

Exercice 2

Le cosinus de 3x

On considère l'équation (E) : $2\cos(3x) - \sqrt{2} = 0$, d'inconnue réelle x.

1.

On pose $X = 3x$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos X - \sqrt{2} = 0$.

INDICE

Début : isole $\cos X$. **Ensuite :** reconnais la valeur usuelle obtenue.

2.

En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

INDICE

Outil : remplace X par $3x$, puis divise **chaque** terme par 3.

3.

Combien (E) a-t-elle de solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$? Les donner.

INDICE

Outil : pour la première famille, résous $0 \leq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} < 2\pi$; multiplie par $\dfrac{12}{\pi}$ pour isoler k.

Exercice 3

Un produit nul sur [0, 2π[

On considère l'équation (E) : $\sin x \left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$, à résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

1.

Écrire (E) sous la forme de deux équations reliées par « ou ».

INDICE

Outil : la règle du produit nul, vue au collège.

2.

Résoudre $\sin x = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Encadre $k\pi$.

3.

Résoudre $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$, puis conclure.

INDICE

Outil : $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Encadre chacune des deux familles entre 0 et 2π.

Exercice 4

Une inéquation en sinus sur [0, 2π[

L'intervalle de travail est $[0, 2\pi[$. On considère l'inéquation (I) : $\sqrt{2}\sin x - 1 \geq 0$.

1.

Montrer que (I) équivaut à $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

Début : divise par $\sqrt{2}$, qui est positif. **Ensuite :** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2.

Résoudre (I) dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : la propriété des inéquations en sinus, cas $a \geq 0$: repère les points du cercle dont l'ordonnée vaut au moins $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Quel est le signe de $\sin x$ pour x entre π et 2π ?

3.

En déduire les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'inéquation $\sqrt{2}\sin x - 1 < 0$.

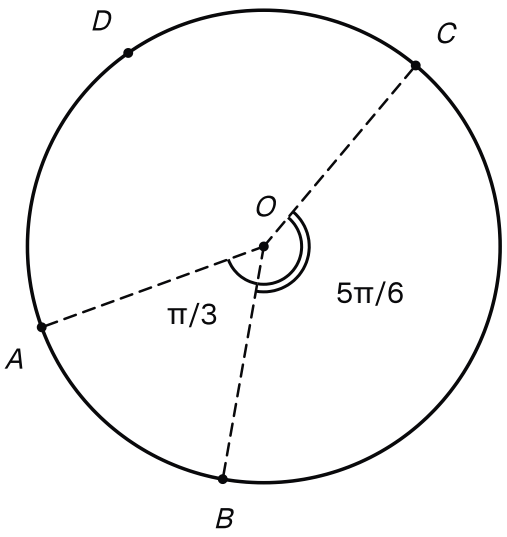
INDICE

Outil : ce sont les réels de $[0, 2\pi[$ qui ne sont pas solutions de (I).

Exercice 5

Quatre points d'un cercle et leurs arcs

A, B, C et D sont quatre points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, placés dans cet ordre. L'arc d'extrémités A et B qui ne contient ni C ni D mesure $\frac{\pi}{3}$. L'arc d'extrémités B et C qui ne contient ni A ni D mesure $\frac{5\pi}{6}$. Trace la figure sur ton cahier.



Les points A, B, C et D se suivent sur le cercle ; l'arc de A à B mesure pi sur 3 et l'arc de B à C mesure 5 pi sur 6, mesures lues sur les angles au centre.

1.

Calculer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.

INDICE

Outil : quel arc chacun de ces angles intercepte-t-il ? Applique le théorème de l'angle inscrit.

2.

Calculer $\widehat{BAC}$, puis $\widehat{ABC}$ par la somme des angles du triangle ABC. Contrôler avec l'arc intercepté par $\widehat{ABC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

INDICE

Début : $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc de mesure $\frac{5\pi}{6}$. **Contrôle :** l'arc d'extrémités A et C qui ne contient pas B mesure $2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}$.

3.

Calculer $\widehat{ADC}$, puis vérifier que les angles en B et en D du quadrilatère $ABCD$ sont supplémentaires.

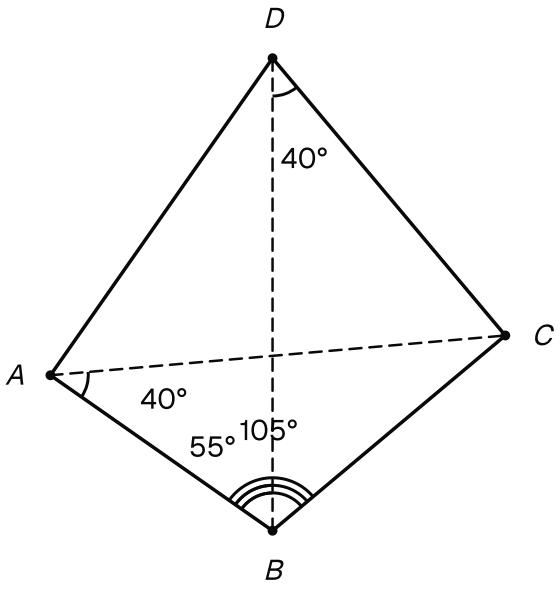
INDICE

Outil : $\widehat{ADC}$ intercepte l'arc d'extrémités A et C qui contient B ; additionne les mesures des deux arcs qui le composent.

Exercice 6

Deux angles égaux du même côté

$ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 40°$, $\widehat{ABD} = 55°$ et $\widehat{ABC} = 105°$. Fais la figure sur ton cahier.



Le quadrilatère convexe ABCD et ses diagonales, avec les angles donnés : BAC et BDC de 40 degrés, ABD de 55 degrés et ABC de 105 degrés.

1.

Justifier que les points A, B, C et D sont cocycliques.

INDICE

Outil : la reconnaissance des points cocycliques par deux angles égaux. Vérifie d'abord que A et D sont du même côté de la droite (BC).

2.

En déduire que $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$, puis donner $\widehat{ACD}$.

INDICE

Outil : les angles inscrits qui interceptent le même arc. Les sommets B et C sont-ils du même côté de la droite (AD) ?

3.

Calculer l'angle $\widehat{CDA}$, opposé à $\widehat{ABC}$ dans le quadrilatère $ABCD$.

INDICE

Outil : la propriété des angles opposés d'un quadrilatère convexe inscrit, en degrés : π radians valent $180°$.

Exercice 7

Le triangle de côtés 13, 14 et 15

ABC est un triangle tel que $a = BC = 14$, $b = CA = 15$ et $c = AB = 13$. On donne $\cos\widehat{B} = \dfrac{5}{13}$.

1.

Calculer $\sin\widehat{B}$.

INDICE

Outil : la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Quel est le signe du sinus d'un angle de $]0, \pi[$?

2.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC, puis le rayon r de son cercle inscrit.

INDICE

Début : choisis les deux côtés qui forment l'angle $\widehat{B}$: ce sont $a = BC$ et $c = AB$. **Ensuite :** calcule $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, puis utilise la relation $\mathcal{A} = p\,r$.

3.

Calculer le rayon R du cercle circonscrit à ABC.

INDICE

Outil : la loi des sinus, avec le côté b qui fait face à l'angle $\widehat{B}$.