BURHAN

# Équations trigonométriques et angles inscrits : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/exercices/entrainement

| Chapitre | Palier | Exercices |
| --- | --- | --- |
| Équations trigonométriques et angles inscrits | Entraînement | 7 |

**Exercice 1**

## Un sinus opposé à un autre

On considère l'équation $(E)$ : $\sin x + \sin \dfrac{\pi}{9} = 0$.

### 1.

Justifier que $(E)$ équivaut à $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

INDICE

**Outil :** isole $\sin x$, puis utilise l'angle associé $-a$ : que vaut $\sin(-a)$ ?

CORRIGÉ

L'équation $(E)$ s'écrit $\sin x = -\sin \dfrac{\pi}{9}$.

D'après les angles associés, pour tout réel $a$, $\sin(-a) = -\sin a$. Avec $a = \dfrac{\pi}{9}$, on obtient $-\sin \dfrac{\pi}{9} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

**Conclusion.** L'équation $(E)$ équivaut à $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{9}\right)$.

### 2.

Résoudre $(E)$ dans $\mathbb{R}$.

INDICE

**Outil :** la résolution de l'équation $\sin x = \sin \alpha$, avec $\alpha = -\dfrac{\pi}{9}$. Calcule soigneusement $\pi - \alpha$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, on applique la résolution de l'équation $\sin x = a$ avec $\alpha = -\dfrac{\pi}{9}$ ; la seconde famille est celle des réels $\pi - \alpha + 2k\pi$. Pour tout réel $x$ :

$$\begin{aligned} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) \\ \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + 2k\pi \\ \text{ou } x = \pi + \frac{\pi}{9} + 2k\pi \\ = \frac{10\pi}{9} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Conclusion.** Les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{R}$ sont les réels $-\dfrac{\pi}{9} + 2k\pi$ et $\dfrac{10\pi}{9} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

### 3.

En déduire les solutions de $(E)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

INDICE

**Outil :** encadre chaque famille entre $0$ et $2\pi$, puis isole $k$.

CORRIGÉ

On encadre chaque famille de la question 2 entre $0$ et $2\pi$, la borne $2\pi$ exclue, puis on isole $k$.

- **Première famille.** $0 \leq -\dfrac{\pi}{9} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $\dfrac{1}{18} \leq k < \dfrac{19}{18}$, donc $k = 1$ : $x = -\dfrac{\pi}{9} + 2\pi = \dfrac{17\pi}{9}$.
- **Seconde famille.** $0 \leq \dfrac{10\pi}{9} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{9} \leq k < \dfrac{4}{9}$, donc $k = 0$ : $x = \dfrac{10\pi}{9}$.

**Contrôle.** Les deux réels sont compris entre $\pi$ et $2\pi$ : leurs points sont sous l'axe des abscisses, ce qui convient à un sinus négatif.

**Conclusion.** Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left\{\dfrac{10\pi}{9}, \dfrac{17\pi}{9}\right\}$.

### Exercice 2

## Le cosinus de 3x

On considère l'équation $(E)$ : $2\cos(3x) - \sqrt{2} = 0$, d'inconnue réelle $x$.

### 1.

On pose $X = 3x$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\cos X - \sqrt{2} = 0$.

INDICE

**Début :** isole $\cos X$. **Ensuite :** reconnais la valeur usuelle obtenue.

CORRIGÉ

L'équation s'écrit $2\cos X = \sqrt{2}$, soit $\cos X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On sait que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, appliquée à l'inconnue $X$, pour tout réel $X$ :

$$\begin{aligned} &\cos X = \cos\frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow\ &X = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou}\ &X = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Conclusion.** Les solutions sont les réels $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

### 2.

En déduire les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{R}$.

INDICE

**Outil :** remplace $X$ par $3x$, puis divise **chaque** terme par $3$.

CORRIGÉ

Un réel $x$ est solution de $(E)$ si et seulement si $X = 3x$ est solution de l'équation de la question 1, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou}\ 3x &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. On divise chaque terme par $3$, y compris $2k\pi$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou}\ x &= -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** Les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

### 3.

Combien $(E)$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ ? Les donner.

INDICE

**Outil :** pour la première famille, résous $0 \leq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} < 2\pi$ ; multiplie par $\dfrac{12}{\pi}$ pour isoler $k$.

CORRIGÉ

On encadre chaque famille entre $0$ et $2\pi$, la borne $2\pi$ exclue. Pour isoler $k$, on multiplie par $\dfrac{12}{\pi}$, qui est positif : $\dfrac{\pi}{12}$ devient $1$, $\dfrac{2k\pi}{3}$ devient $8k$, et $2\pi$ devient $24$.

- **Première famille.** $0 \leq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} < 2\pi$ équivaut à $0 \leq 1 + 8k < 24$, soit $-\dfrac{1}{8} \leq k < \dfrac{23}{8}$. Donc $k \in \{0, 1, 2\}$, ce qui donne $x = \dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{3\pi}{4}$ ou $\dfrac{17\pi}{12}$.
- **Seconde famille.** De même, $0 \leq -1 + 8k < 24$, soit $\dfrac{1}{8} \leq k < \dfrac{25}{8}$. Donc $k \in \{1, 2, 3\}$, ce qui donne $x = \dfrac{7\pi}{12}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ ou $\dfrac{23\pi}{12}$.

Par exemple, pour $k = 1$ dans la première famille : $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{8\pi}{12} = \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$.

**Conclusion.** L'équation $(E)$ a six solutions dans $[0, 2\pi[$ :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}.$$

### Exercice 3

## Un produit nul sur [0, 2π[

On considère l'équation $(E)$ : $\sin x \left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0$, à résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

**1.**

Écrire $(E)$ sous la forme de deux équations reliées par « ou ».

INDICE

**Outil :** la règle du produit nul, vue au collège.

CORRIGÉ

D'après la règle du produit nul, un produit de deux facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Donc $(E)$ équivaut à :

$$\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\cos x - \sqrt{3} = 0.$$

La seconde équation s'écrit $2\cos x = \sqrt{3}$, soit $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Conclusion.** $(E)$ équivaut à : $\sin x = 0$ ou $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**2.**

Résoudre $\sin x = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

**Outil :** les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Encadre $k\pi$.

CORRIGÉ

D'après la résolution de l'équation $\sin x = a$ avec $a = 0$, les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\sin x = 0$ sont les réels $k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On cherche les entiers $k$ tels que $0 \leq k\pi < 2\pi$. En divisant par $\pi$, qui est positif, cette condition équivaut à $0 \leq k < 2$, donc $k = 0$ ou $k = 1$.

**Conclusion.** Dans $[0, 2\pi[$, les solutions de $\sin x = 0$ sont $0$ et $\pi$.

### 3.

Résoudre $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$, puis conclure.

INDICE

**Outil :** $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Encadre chacune des deux familles entre $0$ et $2\pi$.

CORRIGÉ

**Solutions dans $\mathbb{R}$.** On sait que $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Choix de $k$.**

- Première famille : $0 \leq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{12} \leq k < \dfrac{11}{12}$, donc $k = 0$ : $x = \dfrac{\pi}{6}$.
- Seconde famille : $0 \leq -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $\dfrac{1}{12} \leq k < \dfrac{13}{12}$, donc $k = 1$ : $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$.

**Réunion.** D'après la question 1, les solutions de $(E)$ sont celles de $\sin x = 0$, trouvées à la question 2, et celles de $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Conclusion.** Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \pi, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

### Exercice 4

## Une inéquation en sinus sur [0, 2π[

L'intervalle de travail est $[0, 2\pi[$. On considère l'inéquation $(I)$ : $\sqrt{2}\sin x - 1 \geq 0$.

**1.**

Montrer que $(I)$ équivaut à $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis résoudre $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

**Début :** divise par $\sqrt{2}$, qui est positif. **Ensuite :** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CORRIGÉ

**Équivalence.** $(I)$ s'écrit $\sqrt{2}\sin x \geq 1$. On divise les deux membres par $\sqrt{2}$, qui est strictement positif : le sens de l'inégalité est conservé. On obtient $\sin x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Équation frontière.** On sait que $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, et $\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$. D'après la résolution de l'équation $\sin x = a$, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Choix de $k$.**

- Première famille : $0 \leq \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{8} \leq k < \dfrac{7}{8}$, donc $k = 0$ : $x = \dfrac{\pi}{4}$.
- Seconde famille : $0 \leq \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{3}{8} \leq k < \dfrac{5}{8}$, donc $k = 0$ : $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

**Conclusion.** $(I)$ équivaut à $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ; dans $[0, 2\pi[$, les solutions de $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

### 2.

Résoudre $(I)$ dans $[0, 2\pi[$.

INDICE

**Outil :** la propriété des inéquations en sinus, cas $a \geq 0$ : repère les points du cercle dont l'ordonnée vaut au moins $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quel est le signe de $\sin x$ pour $x$ entre $\pi$ et $2\pi$ ?

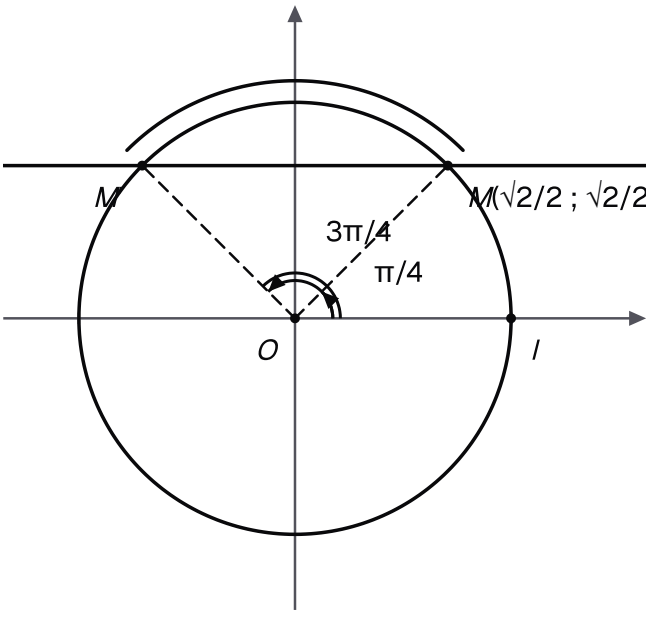
CORRIGÉ

**Réels de** $]\pi, 2\pi[$**.** Le point repéré par un tel réel $x$ est sous l'axe des abscisses, donc $\sin x < 0$. Aucun de ces réels n'est solution.

**Réels de** $[0, \pi]$**.** Ils appartiennent à $]-\pi, \pi]$. D'après la propriété des inéquations en sinus, cas $a \geq 0$, avec $\beta = \frac{\pi}{4}$, un tel réel vérifie $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ exactement lorsque $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi - \frac{\pi}{4}$, soit $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.

Sur le cercle, ce sont les points d'ordonnée au moins égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ : un arc dont les deux extrémités sont comprises, car l'inégalité est large.

**Conclusion.** Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.




**Les solutions de (I) dans l'intervalle de 0 à 2 pi : l'arc situé au-dessus de la droite horizontale d'ordonnée racine de 2 sur 2, de pi sur 4 à 3 pi sur 4, bornes comprises.**

### 3.

En déduire les solutions dans $[0, 2\pi[$ de l'inéquation $\sqrt{2}\sin x - 1 < 0$.

INDICE

**Outil :** ce sont les réels de $[0, 2\pi[$ qui ne sont pas solutions de $(I)$.

CORRIGÉ

Un réel de $[0, 2\pi[$ vérifie $\sqrt{2}\sin x - 1 < 0$ exactement lorsqu'il ne vérifie pas $(I)$. Les solutions sont donc les réels de $[0, 2\pi[$ qui n'appartiennent pas à $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Les réels $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$ vérifient $(I)$ : ils sont exclus.

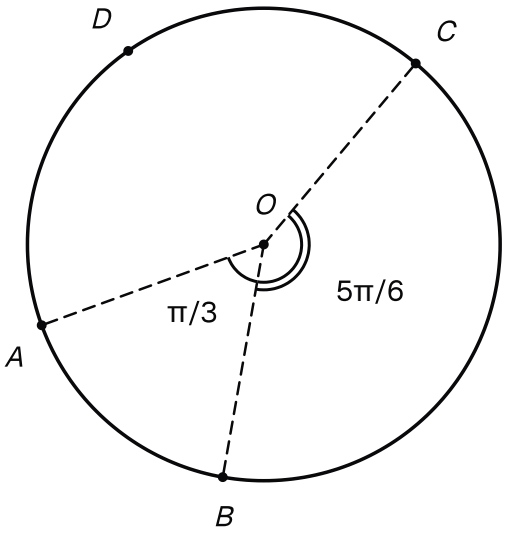
**Conclusion.** Dans $[0, 2\pi[$ :

$$S = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right[.$$

### Exercice 5

## Quatre points d'un cercle et leurs arcs

$A$, $B$, $C$ et $D$ sont quatre points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $O$, placés dans cet ordre. L'arc d'extrémités $A$ et $B$ qui ne contient ni $C$ ni $D$ mesure $\frac{\pi}{3}$. L'arc d'extrémités $B$ et $C$ qui ne contient ni $A$ ni $D$ mesure $\frac{5\pi}{6}$. Trace la figure sur ton cahier.




**Les points A, B, C et D se suivent sur le cercle ; l'arc de A à B mesure pi sur 3 et l'arc de B à C mesure 5 pi sur 6, mesures lues sur les angles au centre.**

### 1.

Calculer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.

INDICE

**Outil :** quel arc chacun de ces angles intercepte-t-il ? Applique le théorème de l'angle inscrit.

CORRIGÉ

**Arc intercepté.** Les sommets $C$ et $D$ sont sur le cercle, hors de l'arc d'extrémités $A$ et $B$ qui ne contient ni $C$ ni $D$. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ interceptent donc tous deux cet arc, de mesure $\frac{\pi}{3}$.

**Théorème.** D'après le théorème de l'angle inscrit, chacun de ces angles mesure la moitié de l'arc intercepté :

$$\begin{aligned}\widehat{ACB} &= \widehat{ADB} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

**Conclusion.** $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{6}$.

### 2.

Calculer $\widehat{BAC}$, puis $\widehat{ABC}$ par la somme des angles du triangle $ABC$. Contrôler avec l'arc intercepté par $\widehat{ABC}$. Quelle est la nature du triangle $ABC$ ?

INDICE

**Début :** $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc de mesure $\dfrac{5\pi}{6}$. **Contrôle :** l'arc d'extrémités $A$ et $C$ qui ne contient pas $B$ mesure $2\pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{6}$.

CORRIGÉ

**Angle en $A$.** L'angle $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc d'extrémités $B$ et $C$ qui ne contient pas $A$, de mesure $\dfrac{5\pi}{6}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{12}$.

**Angle en $B$.** La somme des angles du triangle $ABC$ vaut $\pi$, et $\widehat{ACB} = \dfrac{\pi}{6}$ d'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\widehat{ABC} &= \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

**Contrôle.** L'angle $\widehat{ABC}$ intercepte l'arc d'extrémités $A$ et $C$ qui ne contient pas $B$. Il mesure $2\pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, dont la moitié vaut bien $\dfrac{5\pi}{12}$.

**Nature.** Les angles en $A$ et en $B$ sont égaux : le triangle $ABC$ est isocèle en $C$.

**Conclusion.** $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \dfrac{5\pi}{12}$, et le triangle $ABC$ est isocèle en $C$.

### 3.

Calculer $\widehat{ADC}$, puis vérifier que les angles en $B$ et en $D$ du quadrilatère $ABCD$ sont supplémentaires.

INDICE

**Outil :** $\widehat{ADC}$ intercepte l'arc d'extrémités $A$ et $C$ qui contient $B$ ; additionne les mesures des deux arcs qui le composent.

CORRIGÉ

**Arc intercepté.** L'angle $\widehat{ADC}$ intercepte l'arc d'extrémités $A$ et $C$ qui contient $B$. Cet arc réunit les deux arcs de l'énoncé : il mesure $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$.

**Angle.** Cet arc n'est pas contenu dans un demi-cercle. D'après le théorème de l'angle inscrit, l'angle mesure encore la moitié de l'arc intercepté : $\widehat{ADC} = \dfrac{7\pi}{12}$.

**Angles opposés.** Les sommets sont placés dans l'ordre $A$, $B$, $C$, $D$ sur le cercle : le quadrilatère $ABCD$ est convexe. Ses angles en $B$ et en $D$ vérifient :

$$\begin{aligned}&\widehat{ABC} + \widehat{ADC}\\ &= \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi.\end{aligned}$$

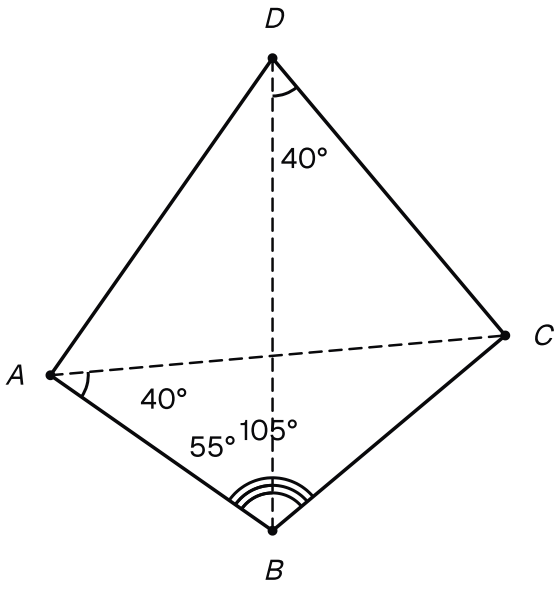
C'est ce qu'annonce la propriété des angles opposés d'un quadrilatère inscrit.

**Conclusion.** $\widehat{ADC} = \dfrac{7\pi}{12}$, et les angles en $B$ et en $D$ de $ABCD$ sont supplémentaires.

### Exercice 6

## Deux angles égaux du même côté

$ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 40°$, $\widehat{ABD} = 55°$ et $\widehat{ABC} = 105°$. Fais la figure sur ton cahier.




**Le quadrilatère convexe ABCD et ses diagonales, avec les angles donnés : BAC et BDC de 40 degrés, ABD de 55 degrés et ABC de 105 degrés.**

**1.**

Justifier que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques.

INDICE

**Outil :** la reconnaissance des points cocycliques par deux angles égaux. Vérifie d'abord que $A$ et $D$ sont du même côté de la droite $(BC)$.

CORRIGÉ

**Position de $A$ et de $D$.** Le segment $[BC]$ est un côté du quadrilatère convexe $ABCD$. Les deux autres sommets, $A$ et $D$, sont donc du même côté de la droite $(BC)$, et aucun d'eux n'est sur cette droite.

**Angles égaux.** Depuis $A$ et depuis $D$, le segment $[BC]$ est vu sous le même angle : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 40°$.

**Critère.** D'après la reconnaissance des points cocycliques par deux angles égaux, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont sur un même cercle.

**Conclusion.** Les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques.

### 2.

En déduire que $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$, puis donner $\widehat{ACD}$.

INDICE

**Outil :** les angles inscrits qui interceptent le même arc. Les sommets $B$ et $C$ sont-ils du même côté de la droite $(AD)$ ?

CORRIGÉ

**Même arc.** D'après la question 1, les quatre points sont sur un même cercle. Le segment $[AD]$ est un côté du quadrilatère convexe : $B$ et $C$ sont du même côté de la droite $(AD)$. D'après la définition des arcs, $B$ et $C$ sont donc sur le même arc d'extrémités $A$ et $D$.

**Angles inscrits.** Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{ACD}$ interceptent alors le même arc. D'après la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc, ils sont égaux.

**Conclusion.** $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = 55°$.

### 3.

Calculer l'angle $\widehat{CDA}$, opposé à $\widehat{ABC}$ dans le quadrilatère $ABCD$.

INDICE

**Outil :** la propriété des angles opposés d'un quadrilatère convexe inscrit, en degrés : $\pi$ radians valent $180°$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle. D'après la propriété des angles opposés d'un quadrilatère inscrit, ses angles en $B$ et en $D$ sont supplémentaires : $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180°$. Donc :

$$\widehat{CDA} = 180° - 105° = 75°.$$

**Conclusion.** $\widehat{CDA} = 75°$.

### Exercice 7

## Le triangle de côtés 13, 14 et 15

$ABC$ est un triangle tel que $a = BC = 14$, $b = CA = 15$ et $c = AB = 13$. On donne $\cos\widehat{B} = \dfrac{5}{13}$.

**1.**

Calculer $\sin\widehat{B}$.

INDICE

**Outil :** la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Quel est le signe du sinus d'un angle de $]0, \pi[$ ?

CORRIGÉ

D'après la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, appliquée à l'angle $\widehat{B}$ :

$$\begin{aligned}\sin^2\widehat{B} &= 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}.\end{aligned}$$

Un angle d'un triangle appartient à $]0, \pi[$, donc $\sin\widehat{B} > 0$. Ainsi $\sin\widehat{B} = \sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{12}{13}$.

**Conclusion.** $\sin\widehat{B} = \dfrac{12}{13}$.

**2.**

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $ABC$, puis le rayon $r$ de son cercle inscrit.

INDICE

**Début :** choisis les deux côtés qui forment l'angle $\widehat{B}$ : ce sont $a = BC$ et $c = AB$. **Ensuite :** calcule $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, puis utilise la relation $\mathcal{A} = p\,r$.

CORRIGÉ

**Aire.** Les côtés $a = BC$ et $c = AB$ forment l'angle $\widehat{B}$. D'après la formule de l'aire avec un sinus :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\,ca\sin\widehat{B} \\ &= \frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \frac{12}{13} \\ &= 7 \times 12 = 84.\end{aligned}$$

**Rayon $r$.** Le demi-périmètre vaut $p = \dfrac{14+15+13}{2} = 21$. D'après la relation entre l'aire et le rayon du cercle inscrit, $\mathcal{A} = p\,r$, donc $r = \dfrac{\mathcal{A}}{p} = \dfrac{84}{21} = 4$.

**Conclusion.** $\mathcal{A} = 84$ et $r = 4$.

### 3.

Calculer le rayon $R$ du cercle circonscrit à $ABC$.

INDICE

**Outil :** la loi des sinus, avec le côté $b$ qui fait face à l'angle $\widehat{B}$.

CORRIGÉ

Le côté $b = CA$ fait face à l'angle $\widehat{B}$. D'après la loi des sinus, $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = 2R$. Donc :

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{15}{\frac{12}{13}} = \frac{15 \times 13}{12} \\ &= \frac{65}{4}. \end{aligned}$$

**Conclusion.** $R = \dfrac{65}{8} = 8{,}125$.