BURHAN

Équations trigonométriques et angles inscrits : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations trigonométriques et angles inscrits	Application	8

Exercice 1

Trois équations en cosinus

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : cherche un angle usuel dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis écris les deux familles de solutions.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -1$.

INDICE

Outil : $\cos \pi = -1$. Compare ensuite les deux familles obtenues.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\cos x - 6 = 0$.

INDICE

Outil : isole $\cos x$, puis compare le second membre à -1 et à 1.

Exercice 2

Équations en sinus et contrôle de solutions

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

INDICE

Outil : cherche un réel α de sinus $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ grâce aux angles associés. La seconde famille s'obtient avec l'angle associé $\pi - \alpha$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = 0$, puis écrire l'ensemble des solutions avec une seule famille.

INDICE

Outil : $\sin 0 = 0$. Les deux familles décrivent-elles des points différents du cercle ?

3.

Un camarade affirme que $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{13\pi}{4}$ sont deux solutions de l'équation de la question 1. A-t-il raison ?

INDICE

Outil : calcule le sinus de chaque réel, ou cherche s'il appartient à l'une des deux familles.

Exercice 3

Équations en tangente, dont une à la calculatrice

Dans tout l'exercice, on suppose $\cos x \neq 0$.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}}$. Une seule famille de solutions, en $k\pi$.

2.

Donner les solutions de l'équation de la question 1 qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : encadre $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ entre 0 et 2π, puis isole k.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = 2$. On donnera une valeur approchée au millième, obtenue à la calculatrice réglée en mode radian.

INDICE

Outil : la touche réciproque de la tangente, en mode radian, donne le réel γ de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \gamma = 2$.

Exercice 4

Une même équation, deux intervalles

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Outil : $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos \dfrac{\pi}{3}$, d'après les angles associés.

2.

En déduire les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : traite chaque famille séparément. Pour la première, résous $0 \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$.

3.

Donner de même les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

INDICE

Outil : même méthode ; cet intervalle fait deux tours, attends-toi à plus de solutions.

Exercice 5

Inéquations en cosinus et en tangente

Dans les questions 1 à 3, l'intervalle de travail est $]-\pi, \pi]$. Trace le cercle trigonométrique sur ton cahier.

1.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis placer les points correspondants sur le cercle.

INDICE

Outil : $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : repère l'arc des points situés à gauche de la droite verticale ; il passe par le point d'abscisse curviligne π.

3.

En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : ce sont les réels de $]-\pi, \pi]$ qui ne sont pas solutions de la question 2.

4.

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $\tan x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

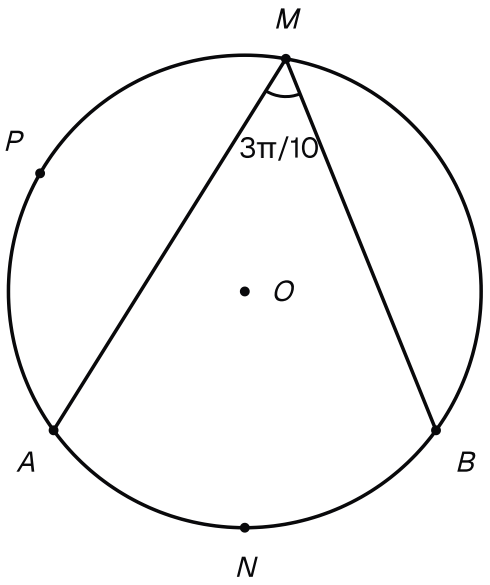
INDICE

Outil : cherche dans cet intervalle le réel dont la tangente vaut $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, grâce aux angles associés, puis applique la propriété des inéquations en tangente.

Exercice 6

Un angle inscrit et ses voisins

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, et A, B, M trois points distincts de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AMB} = \dfrac{3\pi}{10}$. L'arc intercepté par $\widehat{AMB}$ est contenu dans un demi-cercle. Fais la figure sur ton cahier.



Le cercle de centre O, l'angle inscrit AMB de 3 pi sur 10, et les points P et N des questions 2 et 3, chacun sur l'un des deux arcs d'extrémités A et B.

1.

Calculer l'angle au centre $\widehat{AOB}$, en radians puis en degrés.

INDICE

Outil : le théorème de l'angle inscrit : l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre. Pour les degrés, π radians valent $180°$.

2.

P est un point de $\mathcal{C}$, distinct de M, situé sur le même arc d'extrémités A et B que M. Calculer $\widehat{APB}$.

INDICE

Outil : la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc.

3.

N est un point de l'arc d'extrémités A et B qui ne contient pas M. Calculer $\widehat{ANB}$, puis contrôler ce résultat avec la mesure de l'arc qu'il intercepte.

INDICE

Outil : si les sommets sont sur les deux arcs différents, les angles inscrits sont supplémentaires.

Contrôle : les deux arcs d'extrémités A et B ont pour somme 2π.

Exercice 7

Deux quadrilatères convexes : inscriptibles ou non ?

Les angles sont donnés en degrés ; on rappelle que π radians valent $180°$.

1.

$ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{DAB} = 100°$, $\widehat{ABC} = 70°$ et $\widehat{BCD} = 80°$. Calculer $\widehat{CDA}$.

INDICE

Outil : rappel du collège, la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut $360°$.

2.

Le quadrilatère $ABCD$ est-il inscriptible ?

INDICE

Outil : calcule la somme de deux angles opposés, en A et en C.

3.

$EFGH$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{HEF} = 95°$ et $\widehat{FGH} = 90°$. Est-il inscriptible ?

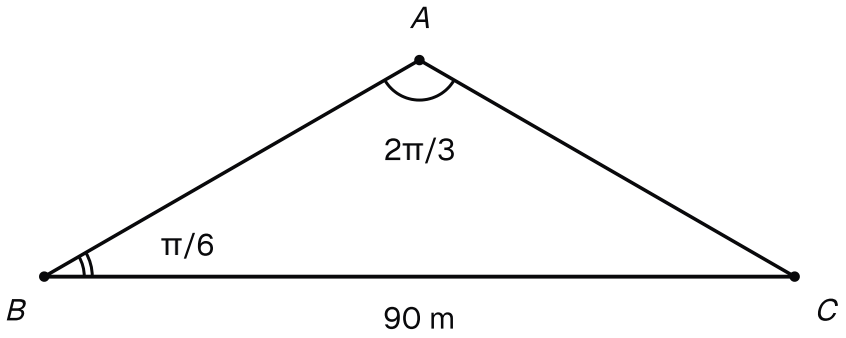
INDICE

Outil : raisonne par l'absurde. S'il était inscriptible, que vaudrait $\widehat{HEF} + \widehat{FGH}$?

Exercice 8

Le terrain triangulaire du géomètre

Un géomètre mesure un terrain triangulaire ABC. Il trouve $BC = 90$ m, $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{6}$. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.



Le terrain triangulaire ABC relevé par le géomètre : BC mesure 90 m, l'angle en A vaut 2 pi sur 3 et l'angle en B vaut pi sur 6.

1.

Calculer $\widehat{C}$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle vaut π.

2.

Calculer la longueur exacte b, puis une valeur approchée au centimètre.

INDICE

Outil : la loi des sinus, $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$. **Rappel :** $\sin \dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3.

On utilise $b = c = 30\sqrt{3}$ m, trouvé à la question 2. Calculer l'aire exacte $\mathcal{A}$ du terrain, puis une valeur approchée au mètre carré.

INDICE

Outil : l'aire avec un sinus, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A}$.