BURHAN

Équations trigonométriques et angles inscrits : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations trigonométriques et angles inscrits	Application	8

Exercice 1

Trois équations en cosinus

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : cherche un angle usuel dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis écris les deux familles de solutions.

CORRIGÉ

On sait que $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'équation s'écrit donc $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$.

D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &\cos x = \cos \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou}\ &x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -1$.

INDICE

Outil : $\cos \pi = -1$. Compare ensuite les deux familles obtenues.

CORRIGÉ

On sait que $\cos \pi = -1$. D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &\cos x = \cos \pi \\ \Leftrightarrow\ &x = \pi + 2k\pi \\ \text{ou}\ &x = -\pi + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Deux familles confondues. Pour tout entier k, $-\pi + 2k\pi = \pi + 2(k-1)\pi$, et $k - 1$ parcourt $\mathbb{Z}$ lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$. La seconde famille redonne donc la première. Sur le cercle, un seul point a pour abscisse -1.

Conclusion. $S = \{\pi + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5\cos x - 6 = 0$.

INDICE

Outil : isole $\cos x$, puis compare le second membre à -1 et à 1.

CORRIGÉ

L'équation s'écrit $5\cos x = 6$, soit $\cos x = \dfrac{6}{5} = 1{,}2$.

Or, pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$, et $1{,}2 > 1$. Aucun réel n'a pour cosinus $1{,}2$: d'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, le cas $a > 1$ est sans solution.

Conclusion. L'équation $5\cos x - 6 = 0$ n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$: $S = \varnothing$.

Exercice 2

Équations en sinus et contrôle de solutions

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

INDICE

Outil : cherche un réel α de sinus $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ grâce aux angles associés. La seconde famille s'obtient avec l'angle associé $\pi - \alpha$.

CORRIGÉ

Un réel de sinus $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On sait que $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D'après les angles associés, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Solutions. On applique la résolution de l'équation $\sin x = a$ avec $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$; la seconde famille est celle des réels $\pi - \alpha + 2k\pi$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou } x &= \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = 0$, puis écrire l'ensemble des solutions avec une seule famille.

INDICE

Outil : $\sin 0 = 0$. Les deux familles décrivent-elles des points différents du cercle ?

CORRIGÉ

On sait que $\sin 0 = 0$. D'après la résolution de l'équation $\sin x = a$, avec $\alpha = 0$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2k\pi \\ \text{ou } x &= \pi + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Une seule famille. Les réels $2k\pi$ sont les multiples pairs de π ; les réels $\pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$ en sont les multiples impairs. Ensemble, ils forment tous les multiples entiers de π. Sur le cercle, ils repèrent les deux points d'ordonnée 0.

Conclusion. $S = \{k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

3.

Un camarade affirme que $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{13\pi}{4}$ sont deux solutions de l'équation de la question 1. A-t-il raison ?

INDICE

Outil : calcule le sinus de chaque réel, ou cherche s'il appartient à l'une des deux familles.

CORRIGÉ

On teste chacun des deux réels.

- $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, qui est différent de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$: le réel $\frac{\pi}{4}$ n'est pas solution.
- $\frac{13\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi$: c'est un réel de la seconde famille de la question 1, obtenu pour $k = 1$. Le réel $\frac{13\pi}{4}$ est donc solution.

Conclusion. Le camarade n'a raison qu'à moitié : $\frac{13\pi}{4}$ est solution, mais $\frac{\pi}{4}$ ne l'est pas.

Exercice 3

Équations en tangente, dont une à la calculatrice

Dans tout l'exercice, on suppose $\cos x \neq 0$.

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$. Une seule famille de solutions, en $k\pi$.

CORRIGÉ

Valeur de $\tan\dfrac{\pi}{6}$. Par définition de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{6} &= \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Solutions. D'après la résolution de l'équation $\tan x = a$, pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\tan x = \tan\frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$: une seule famille, de pas π.

Conclusion. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.

Donner les solutions de l'équation de la question 1 qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : encadre $\dfrac{\pi}{6} + k\pi$ entre 0 et 2π, puis isole k.

CORRIGÉ

D'après la question 1, on cherche les entiers k tels que :

$$0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi < 2\pi.$$

On retranche $\dfrac{\pi}{6}$, puis on divise par π, qui est positif : la condition équivaut à $-\dfrac{1}{6} \leq k < \dfrac{11}{6}$. Les entiers qui conviennent sont $k = 0$ et $k = 1$; ils donnent $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7\pi}{6}$.

Sur le cercle, ces deux réels repèrent deux points diamétralement opposés.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan x = 2$. On donnera une valeur approchée au millième, obtenue à la calculatrice réglée en mode radian.

INDICE

Outil : la touche réciproque de la tangente, en mode radian, donne le réel γ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\gamma = 2$.

CORRIGÉ

Réel de départ. Le réel 2 n'est la tangente d'aucun angle usuel, et pour la tangente aucune condition sur le second membre n'est à vérifier. En mode radian, la touche réciproque de la tangente donne le réel γ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\gamma = 2$: $\gamma \approx 1{,}107$.

Solutions. D'après la résolution de l'équation $\tan x = a$, pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, l'équation $\tan x = \tan\gamma$ équivaut à $x = \gamma + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\gamma + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\gamma \approx 1{,}107$.

Exercice 4

Une même équation, deux intervalles

1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Outil : $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3}$, d'après les angles associés.

CORRIGÉ

Un réel de cosinus $-\dfrac{1}{2}$. On sait que $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. D'après les angles associés, $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3}$, donc $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Solutions. D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &\cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou}\ &x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ et $-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.

En déduire les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

INDICE

Outil : traite chaque famille séparément. Pour la première, résous $0 \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$.

CORRIGÉ

On encadre chaque famille de la question 1 entre 0 et 2π, la borne 2π exclue. Pour isoler k, on retranche le premier terme, puis on divise par 2π, qui est positif.

- **Première famille.** $0 \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{1}{3} \leq k < \dfrac{2}{3}$. Seul $k = 0$ convient : $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
- **Seconde famille.** $0 \leq -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi$ équivaut à $\dfrac{1}{3} \leq k < \dfrac{4}{3}$. Seul $k = 1$ convient : $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$.

Conclusion. Dans $[0, 2\pi[$, $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

3.

Donner de même les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

INDICE

Outil : même méthode ; cet intervalle fait deux tours, attends-toi à plus de solutions.

CORRIGÉ

Même méthode, avec cette fois les deux bornes comprises.

- **Première famille.** $-2\pi \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{4}{3} \leq k \leq \dfrac{2}{3}$. Donc $k = -1$ ou $k = 0$: $x = -\dfrac{4\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$.
- **Seconde famille.** $-2\pi \leq -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ équivaut à $-\dfrac{2}{3} \leq k \leq \dfrac{4}{3}$. Donc $k = 0$ ou $k = 1$: $x = -\dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$.

L'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ couvre deux tours : chacun des deux points du cercle y est repéré deux fois.

Conclusion. Dans $[-2\pi, 2\pi]$, l'équation a quatre solutions :

$$S = \left\{ -\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

Exercice 5

Inéquations en cosinus et en tangente

Dans les questions 1 à 3, l'intervalle de travail est $]-\pi, \pi]$. Trace le cercle trigonométrique sur ton cahier.

1.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, puis placer les points correspondants sur le cercle.

INDICE

Outil : $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

CORRIGÉ

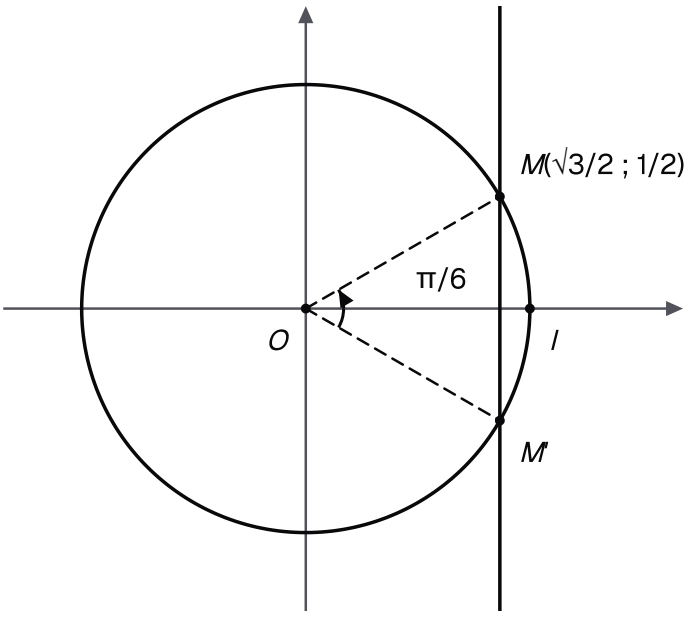
Solutions dans $\mathbb{R}$. On sait que $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la résolution de l'équation $\cos x = a$, les solutions dans $\mathbb{R}$ sont les réels $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Choix de k.

- Première famille : $-\pi < \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{7}{12} < k \leq \dfrac{5}{12}$, donc $k = 0$.
- Seconde famille : $-\pi < -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{12} < k \leq \dfrac{7}{12}$, donc $k = 0$.

Sur le cercle. Les points repérés par $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ ont tous deux pour abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, sur la droite verticale qui coupe cet axe au point d'abscisse $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, les solutions sont $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.



Les solutions pi sur 6 et moins pi sur 6 repèrent deux points du cercle, symétriques par rapport à l'axe des abscisses, sur la droite verticale d'abscisse racine de 3 sur 2.

2.

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : repère l'arc des points situés à gauche de la droite verticale ; il passe par le point d'abscisse curviligne π.

CORRIGÉ

Lecture sur le cercle. Un point du cercle convient lorsque son abscisse vaut au plus $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: il est sur la droite verticale de la question 1 ou à sa gauche. C'est le grand arc qui joint les points de la question 1 en passant par le point repéré par π.

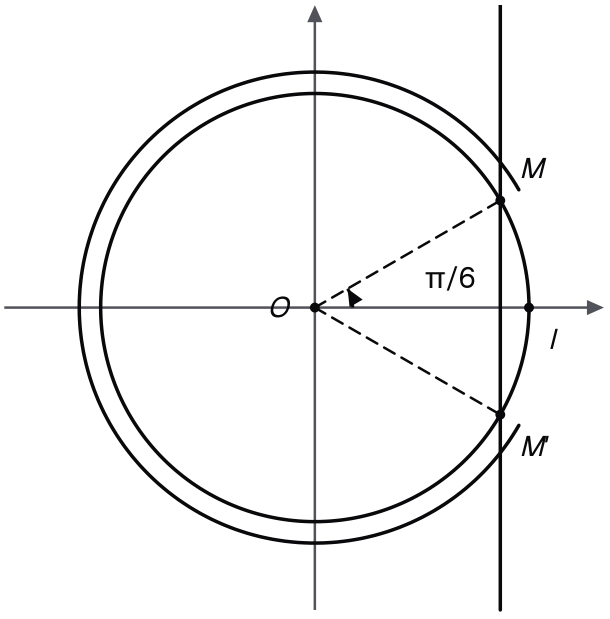
Propriété. D'après la propriété des inéquations en cosinus, avec $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, un réel x de $]-\pi, \pi]$ vérifie $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ exactement lorsque :

- $-\pi < x \leq -\dfrac{\pi}{6}$,
- ou $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \pi$.

Les bornes $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$ sont comprises, car l'inégalité est large. L'intervalle de travail coupe le grand arc au point repéré par π : on obtient deux intervalles.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \pi\right].$$



Le grand arc, à gauche de la droite verticale d'abscisse racine de 3 sur 2, réunit les solutions ; il passe par le point repéré par pi et donne deux intervalles.

3.

En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de l'inéquation $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Outil : ce sont les réels de $]-\pi, \pi]$ qui ne sont pas solutions de la question 2.

CORRIGÉ

Dans $]-\pi, \pi]$, un réel vérifie $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ exactement lorsqu'il ne vérifie pas $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions sont donc les réels de $]-\pi, \pi]$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble de la question 2.

Les réels $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$, où le cosinus vaut exactement $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ne vérifient pas l'inégalité stricte : ils sont exclus. Sur le cercle, il reste le petit arc situé à droite de la droite verticale.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$.

4.

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $\tan x \geq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Outil : cherche dans cet intervalle le réel dont la tangente vaut $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, grâce aux angles associés, puis applique la propriété des inéquations en tangente.

CORRIGÉ

Réel frontière. On sait que $\tan \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. D'après les angles associés, $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Le réel $\gamma = -\dfrac{\pi}{6}$ appartient à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

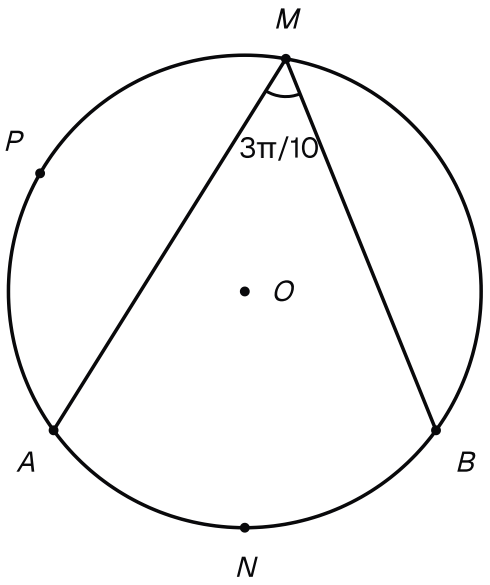
Propriété. D'après la propriété des inéquations en tangente, un réel x de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vérifie $\tan x \geq \tan \gamma$ exactement lorsque $\gamma \leq x < \dfrac{\pi}{2}$. La borne γ est comprise, car l'inégalité est large ; la borne $\dfrac{\pi}{2}$ est exclue, car la tangente n'y est pas définie.

Conclusion. Dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $S = \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 6

Un angle inscrit et ses voisins

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, et A, B, M trois points distincts de $\mathcal{C}$ tels que $\widehat{AMB} = \dfrac{3\pi}{10}$. L'arc intercepté par $\widehat{AMB}$ est contenu dans un demi-cercle. Fais la figure sur ton cahier.



Le cercle de centre O, l'angle inscrit AMB de 3 pi sur 10, et les points P et N des questions 2 et 3, chacun sur l'un des deux arcs d'extrémités A et B.

1.

Calculer l'angle au centre $\widehat{AOB}$, en radians puis en degrés.

INDICE

Outil : le théorème de l'angle inscrit : l'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre. Pour les degrés, π radians valent $180°$.

CORRIGÉ

En radians. L'arc intercepté par $\widehat{AMB}$ est contenu dans un demi-cercle ; l'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte ce même arc. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\,\widehat{AOB}$. Donc :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \frac{3\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}.$$

En degrés. Comme π radians valent $180°$, l'angle $\dfrac{3\pi}{5}$ vaut $\dfrac{3}{5} \times 180° = 108°$.

Conclusion. $\widehat{AOB} = \dfrac{3\pi}{5}$, soit $108°$.

2.

P est un point de $\mathcal{C}$, distinct de M, situé sur le même arc d'extrémités A et B que M. Calculer $\widehat{APB}$.

INDICE

Outil : la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc.

CORRIGÉ

Les points M et P sont sur le même arc d'extrémités A et B : les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ interceptent le même arc.

D'après la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc, ces deux angles sont égaux.

Conclusion. $\widehat{APB} = \widehat{AMB} = \dfrac{3\pi}{10}$.

3.

N est un point de l'arc d'extrémités A et B qui ne contient pas M. Calculer $\widehat{ANB}$, puis contrôler ce résultat avec la mesure de l'arc qu'il intercepte.

INDICE

Outil : si les sommets sont sur les deux arcs différents, les angles inscrits sont supplémentaires.
Contrôle : les deux arcs d'extrémités A et B ont pour somme 2π.

CORRIGÉ

Calcul. Les sommets M et N sont sur les deux arcs différents d'extrémités A et B. D'après la propriété des angles inscrits, les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont alors supplémentaires :

$$\widehat{ANB} = \pi - \frac{3\pi}{10} = \frac{7\pi}{10}.$$

Contrôle. L'angle $\widehat{ANB}$ intercepte l'arc d'extrémités A et B qui contient M. Les deux arcs d'extrémités A et B totalisent 2π, et l'autre mesure $\dfrac{3\pi}{5}$ d'après la question 1 : cet arc mesure $2\pi - \dfrac{3\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{5}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ANB} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7\pi}{5} = \dfrac{7\pi}{10}$: on retrouve le résultat.

Conclusion. $\widehat{ANB} = \dfrac{7\pi}{10}$.

Exercice 7

Deux quadrilatères convexes : inscriptibles ou non ?

Les angles sont donnés en degrés ; on rappelle que π radians valent $180°$.

1.

$ABCD$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{DAB} = 100°$, $\widehat{ABC} = 70°$ et $\widehat{BCD} = 80°$. Calculer $\widehat{CDA}$.

INDICE

Outil : rappel du collège, la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut $360°$.

CORRIGÉ

D'après une propriété vue au collège, les quatre angles d'un quadrilatère convexe ont pour somme $360°$. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{CDA} &= 360° - 100° \\ &\quad - 70° - 80° \\ &= 110°.\end{aligned}$$

Conclusion. $\widehat{CDA} = 110°$.

2.

Le quadrilatère $ABCD$ est-il inscriptible ?

INDICE

Outil : calcule la somme de deux angles opposés, en A et en C.

CORRIGÉ

Angles opposés en A et en C.

$$\begin{aligned}&\widehat{DAB} + \widehat{BCD} \\ &= 100° + 80° = 180°.\end{aligned}$$

Ces deux angles opposés ont pour somme π radians : ils sont supplémentaires.

Critère. Le quadrilatère $ABCD$ est convexe et deux de ses angles opposés sont supplémentaires. D'après le critère des points cocycliques, $ABCD$ est inscriptible.

Contrôle. Les deux autres angles opposés doivent alors être supplémentaires, d'après la propriété des angles opposés d'un quadrilatère inscrit. C'est le cas : $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 70° + 110° = 180°$.

Conclusion. Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible.

3.

$EFGH$ est un quadrilatère convexe tel que $\widehat{HEF} = 95°$ et $\widehat{FGH} = 90°$. Est-il inscriptible ?

INDICE

Outil : raisonne par l'absurde. S'il était inscriptible, que vaudrait $\widehat{HEF} + \widehat{FGH}$?

CORRIGÉ

On raisonne par l'absurde.

Supposons $EFGH$ inscriptible. D'après la propriété des angles opposés d'un quadrilatère inscrit, ses angles en E et en G seraient supplémentaires : on aurait $\widehat{HEF} + \widehat{FGH} = 180°$.

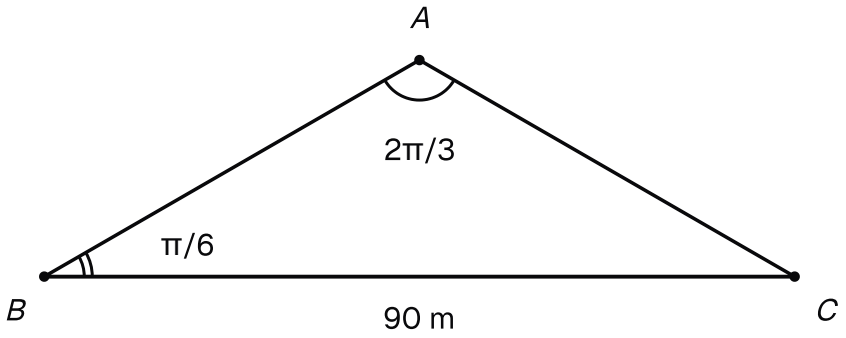
Or $95° + 90° = 185°$, et $185° \neq 180°$: l'hypothèse conduit à une contradiction.

Conclusion. Le quadrilatère $EFGH$ n'est pas inscriptible.

Exercice 8

Le terrain triangulaire du géomètre

Un géomètre mesure un terrain triangulaire ABC. Il trouve $BC = 90$ m, $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$ et $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{6}$. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.



Le terrain triangulaire ABC relevé par le géomètre : BC mesure 90 m, l'angle en A vaut 2 pi sur 3 et l'angle en B vaut pi sur 6.

1.

Calculer $\widehat{C}$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

INDICE

Outil : la somme des angles d'un triangle vaut π.

CORRIGÉ

Troisième angle. La somme des angles d'un triangle vaut π, donc :

$$\begin{aligned}\widehat{C} &= \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{6\pi - 4\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Nature. Les angles en B et en C ont la même mesure, $\dfrac{\pi}{6}$. Le triangle ABC est donc isocèle en A : les côtés issus de A sont égaux, $b = c$.

Conclusion. $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$, et le triangle ABC est isocèle en A.

2.

Calculer la longueur exacte b, puis une valeur approchée au centimètre.

INDICE

Outil : la loi des sinus, $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin\widehat{A}}$. **Rappel :** $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

CORRIGÉ

Loi des sinus. Le côté b fait face à l'angle $\widehat{B}$, et le côté a à l'angle $\widehat{A}$. D'après la loi des sinus, $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin\widehat{A}}$, donc $b = \dfrac{a\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}$.

Calcul. D'après les angles associés, $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} b &= \frac{90 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{90}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{90\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{3}$.

Conclusion. $b = 30\sqrt{3}$ m, soit $b \approx 51{,}96$ m au centimètre près.

3.

On utilise $b = c = 30\sqrt{3}$ m, trouvé à la question 2. Calculer l'aire exacte $\mathcal{A}$ du terrain, puis une valeur approchée au mètre carré.

INDICE

Outil : l'aire avec un sinus, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}$.

CORRIGÉ

Les côtés b et c forment l'angle $\widehat{A}$. D'après la formule de l'aire avec un sinus, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A}$.

Or $bc = 30\sqrt{3} \times 30\sqrt{3} = 900 \times 3 = 2700$, et $\sin\widehat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'après la question 2. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times 2700 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 675\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = 675\sqrt{3}$ m², soit $\mathcal{A} \approx 1169$ m² au mètre carré près.