BURHAN

Équations trigonométriques et angles inscrits

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

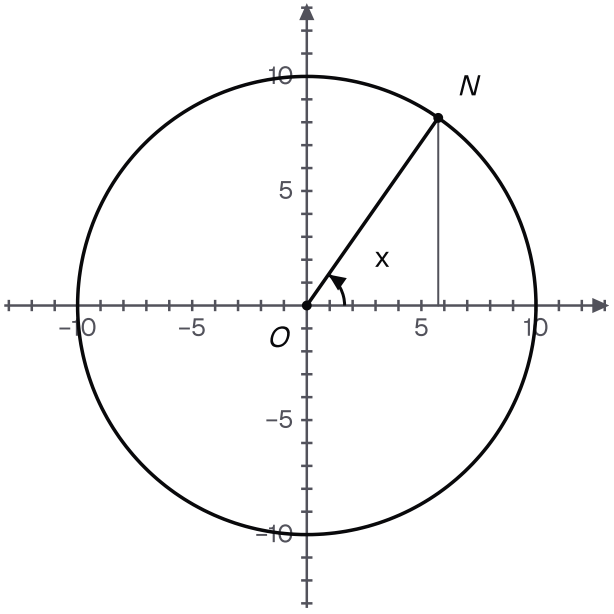
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-trigonometriques-et-angles-inscrits/cours

Chapitre	Semestre
Équations trigonométriques et angles inscrits	Semestre 2

Quels réels ont pour cosinus un demi ?

Une grande roue de 10 m de rayon tourne autour de son axe. On repère une nacelle par un réel x : son rayon fait l'angle x, en radians, avec la demi-droite horizontale qui part de l'axe vers la droite. Dans un repère centré sur l'axe, gradué en mètres, l'abscisse de la nacelle vaut alors $10\cos x$.

Tu veux savoir quand la nacelle passe exactement 5 m à droite de l'axe.



La grande roue dans le repère centré sur son axe : la nacelle N, son rayon qui fait l'angle x avec l'horizontale, et sa position lue sur l'axe des abscisses.

Devine : Une prédiction

Pendant un tour complet, combien de fois la nacelle passe-t-elle exactement 5 m à droite de l'axe ?

A. Une seule fois.

Faux.
La nacelle passe à cette distance une fois sur la moitié haute de la roue, puis une fois sur la moitié basse.

B. Deux fois.

Juste.

Juste : une fois sur la moitié haute de la roue, une fois sur la moitié basse.

C. Quatre fois.

Faux.

La droite verticale située 5 m à droite de l'axe ne coupe la roue qu'en deux points.

D. Jamais.

Faux.

Le rayon vaut 10 m : la nacelle va jusqu'à 10 m à droite de l'axe, donc elle passe par 5 m.

Correction

Il faut $10\cos x = 5$, soit :

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

La droite verticale située 5 m à droite de l'axe coupe la roue en deux points : l'un sur la moitié haute, l'autre sur la moitié basse.

Ils correspondent aux angles $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$, car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Au tour suivant, la nacelle repasse par les mêmes points.

Ce chapitre répond à ce genre de question, puis passe à la géométrie du cercle et aux calculs dans le triangle. Tu t'appuies sur le chapitre « Calcul trigonométrique » et sur tes acquis du collège.

L'équation cos x = a

Le cercle et ses points

Rappel du chapitre « Calcul trigonométrique ». Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ a pour centre O et pour rayon 1, dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. Le point M d'abscisse curviligne x a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$.

Les réels x et $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, repèrent le même point. Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Angles associés, pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$;
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$;
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Valeurs usuelles :

- $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

- $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Devine : Combien de solutions ?

Combien de réels x vérifient $\cos x=\dfrac{1}{2}$?

A. Aucun.

Faux.

Tu connais déjà un tel réel : $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

B. Un seul.

Faux.

Le réel $-\dfrac{\pi}{3}$ convient aussi, d'après les angles associés.

C. Exactement deux.

Faux.

Deux **points** du cercle conviennent, mais chacun est repéré par une infinité de réels.

D. Une infinité.

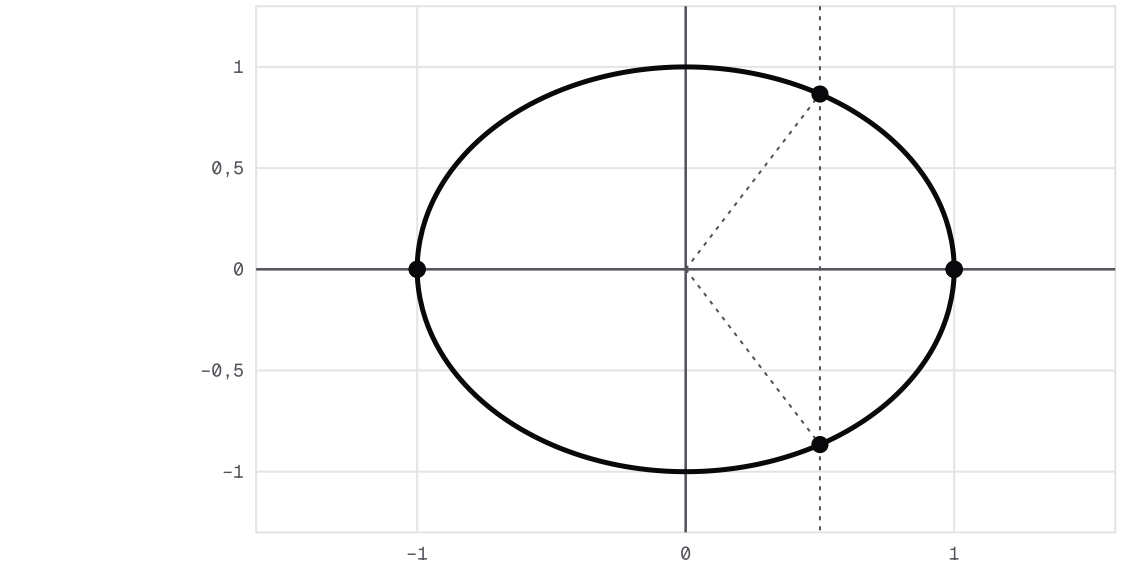
Juste.

Juste : deux points du cercle conviennent, et chacun est repéré par une infinité de réels.

Correction

Les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ sont sur une droite verticale. Elle coupe le cercle en deux points, repérés par $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$.

En ajoutant des tours complets, chacun de ces points est repéré par une infinité de réels : $\dfrac{\pi}{3}+2\pi$, $\dfrac{\pi}{3}-2\pi$, et ainsi de suite.



Le cercle trigonométrique et la droite verticale des points d'abscisse un demi

Un réel de cosinus donné

En clair. Le demi-cercle supérieur, de I jusqu'au point repéré par π, est formé des points repérés par les réels de $[0, \pi]$.

Pour $-1 \leq a \leq 1$, la droite verticale formée des points d'abscisse a rencontre ce demi-cercle en un seul point. Ce point est repéré par un seul réel de $[0, \pi]$.

Sur la calculatrice, la touche réciproque de la touche cos donne ce réel, en mode radian. Il en va de même pour le sinus et pour la tangente.

Propriété : Réel de cosinus, de sinus ou de tangente donné

- Pour tout réel a tel que $-1 \leq a \leq 1$, il existe un **unique** réel α de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$.
- Pour tout réel a tel que $-1 \leq a \leq 1$, il existe un **unique** réel β de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = a$.
- Pour tout réel a, il existe un **unique** réel γ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \gamma = a$.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il se lit sur le cercle trigonométrique.

- Cosinus : sur le demi-cercle supérieur, repéré par les réels de $[0, \pi]$, la droite verticale des points d'abscisse a ne rencontre ce demi-cercle qu'en un point.

- Sinus : on lit de même une droite horizontale sur le demi-cercle de droite, repéré par les réels de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Tangente : on lit la droite (OM) sur ce demi-cercle privé de ses extrémités, repéré par les réels de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exemple : trouver le réel de l'énoncé

- Dans $[0, \pi]$, le réel de cosinus $\frac{1}{2}$ est $\frac{\pi}{3}$. Celui de cosinus $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\frac{3\pi}{4}$, car $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4}$, d'après les angles associés.
- Dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, le réel de sinus $-\frac{1}{2}$ est $-\frac{\pi}{6}$.
- Dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le réel de tangente $\sqrt{3}$ est $\frac{\pi}{3}$.

Résoudre une équation en cosinus

Si $\cos x = \cos\alpha$, les points repérés par x et par α ont la même abscisse.

Pourquoi est-ce vrai ? La droite verticale de cette abscisse coupe le cercle en au plus deux points, symétriques par rapport à l'axe des abscisses. L'un est repéré par α, l'autre par $-\alpha$.

Propriété : Équation cos x = a

Soit a un réel.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, l'équation $\cos x = a$ n'a **aucune solution** dans $\mathbb{R}$.
- Si $-1 \leq a \leq 1$, soit α un réel tel que $\cos\alpha = a$. Pour tout réel x,

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\alpha\ [2\pi].$$

  Autrement dit, $\cos x = \cos\alpha$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ (encadrement). Si $a < -1$ ou $a > 1$, aucun réel n'a donc pour cosinus a.

Étape 2. Supposons $\cos x = \cos\alpha$. D'après la relation fondamentale, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, donc $\sin x = \sin\alpha$ ou $\sin x = -\sin\alpha$.

Étape 3. Si $\sin x = \sin\alpha$, les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes x et α ont les mêmes coordonnées : c'est le même point, donc $x \equiv \alpha\ [2\pi]$. Si $\sin x = -\sin\alpha$, on utilise les angles associés : $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Les réels x et $-\alpha$ repèrent alors le même point,

donc $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$.

Étape 4. Réciproquement, si $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$, les tours complets et l'égalité $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ donnent $\cos x = \cos\alpha$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux réels de même cosinus ont des sinus égaux ou opposés : la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ le donne.

Ensuite, deux réels de mêmes cosinus et sinus repèrent le **même point** du cercle : ils diffèrent d'un nombre entier de tours.

Retiens ce chemin : il resservira pour le sinus et la tangente.

Vérifie : Le premier pas de la preuve

Dans la preuve, quelle relation fait passer de $\cos x = \cos\alpha$ à $\sin x = \sin\alpha$ ou $\sin x = -\sin\alpha$?

A. L'encadrement $-1 \leq \sin x \leq 1$.
Faux.
L'encadrement sert seulement à écarter les seconds membres hors de $[-1, 1]$.

B. La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
Juste.
Juste : elle donne $\sin^2 x = \sin^2\alpha$.

C. L'égalité $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Faux.
Elle sert plus loin, pour reconnaître le point repéré par $-\alpha$.

D. L'égalité $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
Faux.
Les tours complets servent à la réciproque, pas à ce premier pas.

Correction
D'après la relation fondamentale, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Comme $\cos x = \cos\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= 1 - \cos^2\alpha \\ &= \sin^2\alpha.\end{aligned}$$

Deux réels de même carré sont égaux ou opposés : $\sin x = \sin\alpha$ ou $\sin x = -\sin\alpha$.

Exemple : deux équations en cosinus

Retour à la prédiction. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$. On a $\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. D'après la résolution de $\cos x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou}$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Un second membre négatif. Pour $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, le réel $\dfrac{3\pi}{4}$ convient. Donc :

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

La méthode et la calculatrice

Méthode : résoudre une équation en cosinus

1. **Isole** $\cos x$ pour obtenir une équation $\cos x = a$.
2. **Contrôle** que $-1 \leq a \leq 1$; sinon, écris $S = \varnothing$.
3. **Cherche** un réel α de $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$: valeur usuelle, ou touche réciproque de la calculatrice en mode radian.
4. **Écris** les deux familles $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple : un second membre non usuel

Résolvons $\cos x = 0{,}3$. On a bien $-1 \leq 0{,}3 \leq 1$, mais aucun angle usuel n'a pour cosinus $0{,}3$.

Soit α le réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = 0{,}3$. La touche réciproque de la calculatrice, en mode radian, donne $\alpha \approx 1{,}266$.

D'après la résolution de $\cos x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou}$$
$$x = -\alpha + 2k\pi.$$

Garde la lettre α dans les calculs : $1{,}266$ n'est qu'une valeur approchée.

Deux pièges, puis à toi

Attention : un second membre impossible

X « $2\cos x + 5 = 0$ donne $\cos x = -\dfrac{5}{2}$; la calculatrice affiche une erreur, donc je me suis trompé. »

✓ Le calcul est juste, mais $-\frac{5}{2} < -1$. D'après l'encadrement $-1 \leq \cos x \leq 1$, l'équation n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

Contrôle toujours le second membre avant de chercher α. La tangente n'a pas cette restriction.

Attention : la seconde famille

✗ « $\cos x = \frac{1}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. »

✓ Il manque le point symétrique : $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ aussi. Les solutions sont $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ **et** $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Une équation en cosinus donne deux familles. Elles se confondent seulement pour $a = 1$ ou $a = -1$.

À toi : Deux équations en cosinus

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $4\cos x + 3 = 0$ et $3\cos x - 4 = 0$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Isole $\cos x$ dans chaque équation, puis applique la méthode.

Indice 2

La première donne $\cos x = -\frac{3}{4}$; la seconde donne $\cos x = \frac{4}{3}$.

Indice 3

Point délicat : compare chaque second membre à -1 et à 1 avant de toucher à la calculatrice.

Réponse

Première équation. Elle s'écrit $\cos x = -\frac{3}{4}$, et $-1 \leq -\frac{3}{4} \leq 1$.

Soit α le réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$. La touche réciproque, en mode radian, donne $\alpha \approx 2{,}419$.

D'après la résolution de $\cos x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou}$$
$$x = -\alpha + 2k\pi.$$

Seconde équation. Elle s'écrit $\cos x = \frac{4}{3}$. Or $\frac{4}{3} > 1$: d'après l'encadrement du cosinus, $S = \varnothing$.

Conclusion. La première équation a deux familles de solutions, la seconde n'en a aucune.

Les équations sin x = a et tan x = a

Une droite horizontale

En clair. Pour $\sin x = a$, on cherche les points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée a. Ils sont sur la droite horizontale formée des points d'ordonnée a. Si $-1 < a < 1$, elle coupe le cercle en deux points, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Devine : Un second réel

Le réel $\frac{\pi}{3}$ vérifie $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quel autre réel de $]-\pi, \pi]$ a le même sinus ?

A. $-\frac{\pi}{3}$

Faux.

Ce réel a le même **cosinus** ; son sinus vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\pi}{6}$

Faux.

On a $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$: c'est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$

Juste.

Juste : $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$.

D. $-\frac{2\pi}{3}$

Faux.

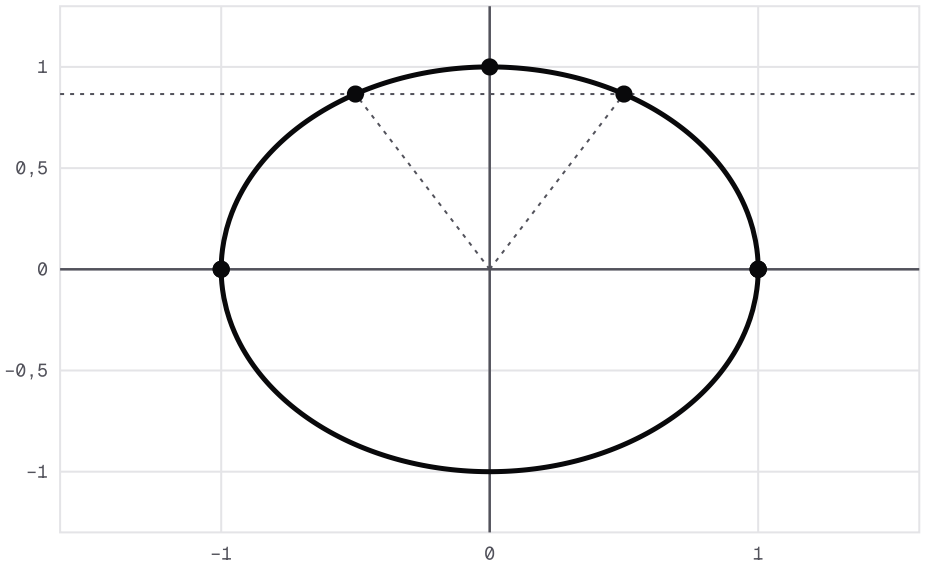
Ce point est sous l'axe des abscisses : son sinus est négatif.

Correction

Les points d'ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Le symétrique du point repéré par $\frac{\pi}{3}$ est repéré par :

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

D'après les angles associés, $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$. Dans $]-\pi, \pi]$, aucun autre réel ne convient.



Le cercle trigonométrique et la droite horizontale des points d'ordonnée racine de trois sur deux

Résoudre une équation en sinus

Le chemin est celui du cosinus, avec les rôles échangés.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux réels de même sinus ont des cosinus égaux ou opposés. Le réel $\pi - \alpha$ a le même sinus que α et un cosinus opposé : il repère le second point.

Propriété : Équation sin x = a

Soit a un réel.

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, l'équation $\sin x = a$ n'a **aucune solution** dans $\mathbb{R}$.
- Si $-1 \leq a \leq 1$, soit α un réel tel que $\sin \alpha = a$. Pour tout réel x,

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x \equiv \alpha \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \alpha \ [2\pi].$$

  Autrement dit, $\sin x = \sin \alpha$ si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.

Démonstration

Étape 1. Pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$ (encadrement). Si $a < -1$ ou $a > 1$, aucun réel n'a donc pour sinus a.

Étape 2. Supposons $\sin x = \sin \alpha$. D'après la relation fondamentale, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, donc $\cos x = \cos \alpha$ ou $\cos x = -\cos \alpha$.

Étape 3. Si $\cos x = \cos \alpha$, les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes x et α ont les mêmes coordonnées : c'est le même point, donc $x \equiv \alpha \ [2\pi]$. Si $\cos x = -\cos \alpha$, on utilise les angles associés : $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ et $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Les réels x et $\pi - \alpha$ repèrent alors le même point, donc $x \equiv \pi - \alpha \ [2\pi]$.

Étape 4. Réciproquement, si $x \equiv \alpha \ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha \ [2\pi]$, les tours complets et l'égalité $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ donnent $\sin x = \sin \alpha$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La relation fondamentale donne cette fois $\cos x = \cos \alpha$ ou $\cos x = -\cos \alpha$. Dans le second cas, l'angle associé $\pi - \alpha$ fournit le point qui convient.

Retiens la seconde famille, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\pi - \alpha + 2k\pi,$$

et non $-\alpha + 2k\pi$.

Vérifie : L'angle associé de la preuve

Dans la preuve, quel réel a le même sinus que α et un cosinus opposé ?

A. $-\alpha$

Faux.
On a $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$: c'est l'inverse.

B. $\pi - \alpha$

Juste.
Juste : $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

C. $\pi + \alpha$

Faux.
Ce réel change les signes du cosinus **et** du sinus.

D. $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$

Faux.
Ce réel échange le cosinus et le sinus.

Correction
D'après les angles associés, $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ et $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

Si $\cos x = -\cos \alpha$, les réels x et $\pi - \alpha$ ont donc les mêmes coordonnées. Ils repèrent le même point, d'où :

$$x \equiv \pi - \alpha \ [2\pi].$$

Exemple : deux équations en sinus

Une valeur usuelle. Pour $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a $\sin \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D'après la résolution de $\sin x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou}$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Un second membre négatif. Pour $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, le réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ qui convient est $-\dfrac{\pi}{6}$. La seconde famille part de $\pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$. Donc :

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou}$$
$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

Un piège, puis la tangente

Attention : la seconde famille du sinus

✗ « $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$. »

✓ Le réel $\dfrac{\pi}{6}$ a pour sinus $\dfrac{1}{2}$, et non $-\dfrac{1}{2}$: on a copié la seconde famille du cosinus.

Pour le sinus, elle part de $\pi - \alpha$, ici $\dfrac{7\pi}{6}$: $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Contrôle chaque famille en calculant le sinus de son premier terme.

Devine : Une tangente qui revient

Le réel $\dfrac{\pi}{4}$ a pour tangente 1. Lequel de ces réels a aussi pour tangente 1 ?

A. $\dfrac{3\pi}{4}$

Faux.

On a $\tan \dfrac{3\pi}{4} = -1$: son cosinus et son sinus sont de signes contraires.

B. $\dfrac{7\pi}{4}$

Faux.

On a $\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, dont la tangente vaut -1.

C. Aucun de ces réels.

Faux.

Un demi-tour ne change pas la tangente : l'un de ces réels convient.

D. $\dfrac{5\pi}{4}$

Juste.
Juste : $\dfrac{5\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4}$ repère le point diamétralement opposé.

Correction

D'après les angles associés, $\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Leur quotient vaut 1 :

$$\tan\frac{5\pi}{4} = 1.$$

Le point repéré par $\dfrac{5\pi}{4}$ est diamétralement opposé à celui repéré par $\dfrac{\pi}{4}$.

Rappel du chapitre « Calcul trigonométrique ». Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Le réel $\tan x$ est la pente de la droite (OM).

Pourquoi est-ce vrai ? Deux réels de même tangente ont des cosinus égaux ou opposés ; comme $\sin x = \tan x \cos x$, leurs sinus sont alors égaux ou opposés de la même façon.

Ils repèrent donc le même point, ou deux points diamétralement opposés : un demi-tour change les signes du cosinus et du sinus, et leur quotient reste le même.

Résoudre une équation en tangente

Propriété : Équation tan x = a

Soit a un réel et α un réel tel que $\cos\alpha \neq 0$ et $\tan\alpha = a$. Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$,

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x = \alpha + k\pi.$$

D'après l'existence d'un réel de tangente donnée, un tel réel α existe pour tout réel a : l'équation $\tan x = a$ a donc des solutions pour **tout** réel a.

Démonstration

Étape 1. Supposons $\tan x = \tan\alpha$. D'après la relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, écrite pour x et pour α, on obtient $\cos^2 x = \cos^2\alpha$, donc $\cos x = \cos\alpha$ ou $\cos x = -\cos\alpha$.

Étape 2. Comme $\sin x = \tan x \cos x$ et $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha$: si $\cos x = \cos\alpha$, alors $\sin x = \sin\alpha$; si $\cos x = -\cos\alpha$, alors $\sin x = -\sin\alpha$.

Étape 3. Dans le premier cas, x et α repèrent le même point du cercle trigonométrique, donc $x = \alpha + 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Dans le second cas, les angles associés donnent $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$: x et $\pi + \alpha$ repèrent le même point, donc $x = \alpha + (2m+1)\pi$. Dans les deux cas, $x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Étape 4. Réciproquement, soit $x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Si k est pair, les tours complets donnent $\cos x = \cos\alpha$ et $\sin x = \sin\alpha$; si k est impair, ils donnent avec les angles associés $\cos x = -\cos\alpha$ et $\sin x = -\sin\alpha$. Dans les deux cas, $\cos x \neq 0$ et $\tan x = \tan\alpha$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ramène l'égalité des tangentes à $\cos^2 x = \cos^2\alpha$. Les deux cas donnent soit le même point, soit le point diamétralement opposé.

Ces deux points se suivent à un demi-tour près, d'où une seule famille, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha + k\pi.$$

Vérifie : La relation qui démarre la preuve

Dans la preuve, quelle relation fait passer de $\tan x = \tan\alpha$ à $\cos^2 x = \cos^2\alpha$?

A. $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Juste.

Juste : écrite pour x et pour α, elle donne $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

B. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Faux.

Elle relie le cosinus et le sinus ; la tangente n'y figure pas.

C. $\cos(-x) = \cos x$

Faux.

Cette égalité ne fait pas intervenir la tangente.

D. $\tan(\pi + x) = \tan x$

Faux.

Elle sert à la réciproque, à la fin de la preuve.

Correction

La relation $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ vient du chapitre « Calcul trigonométrique ». Si $\tan x = \tan\alpha$, ses premiers membres écrits pour x et pour α sont égaux, donc :

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

On en déduit $\cos^2 x = \cos^2\alpha$, puis $\cos x = \cos\alpha$ ou $\cos x = -\cos\alpha$.

Exemple : deux équations en tangente

Dans ces deux exemples, x désigne un réel tel que $\cos x \neq 0$.

Une tangente positive. Pour $\tan x = \sqrt{3}$, le réel $\dfrac{\pi}{3}$ convient. D'après la résolution de $\tan x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Pour $k = 1$, on obtient $\dfrac{4\pi}{3}$, qui repère le point diamétralement opposé.

Une tangente négative. Pour $\tan x = -1$, le réel $-\dfrac{\pi}{4}$ convient, car $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{4}$. Donc, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Aucune condition sur le second membre : $\tan x = a$ a des solutions pour tout réel a.

Un piège, puis à toi

Attention : un demi-tour, pas un tour

✗ « $\tan x = \sqrt{3}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$. »

✓ Cette écriture oublie $\dfrac{4\pi}{3}$, $-\dfrac{2\pi}{3}$ et bien d'autres. Or :

$$\begin{aligned}\tan\frac{4\pi}{3} &= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \tan\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Les solutions sont $\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: un demi-tour suffit. Écris aussi la condition $\cos x \neq 0$.

À toi : Sinus et tangente à la calculatrice

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $5\sin x = 2$ et $\tan x = 3$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Isole la ligne trigonométrique, puis cherche à la calculatrice, en mode radian, le réel donné par l'énoncé d'existence.

Indice 2

La première équation donne $\sin x = 0{,}4$: la touche réciproque donne alors le réel β de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ qui convient.

Indice 3

Point délicat : la seconde famille du sinus part de $\pi - \beta$; pour la tangente, une seule famille, avec $k\pi$.

Réponse

Première équation. Elle s'écrit $\sin x = 0{,}4$, et $-1 \leq 0{,}4 \leq 1$. Soit β le réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = 0{,}4$: $\beta \approx 0{,}412$.

D'après la résolution de $\sin x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \beta + 2k\pi \quad \text{ou}$$
$$x = \pi - \beta + 2k\pi.$$

Ici, $\pi - \beta \approx 2{,}730$.

Seconde équation. Soit γ le réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \gamma = 3$: $\gamma \approx 1{,}249$. D'après la résolution de $\tan x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \gamma + k\pi.$$

Équations trigonométriques : se ramener à une équation fondamentale, solutions dans un intervalle

Isoler la ligne trigonométrique

En clair. Une équation ressemble rarement à $\cos x = a$ dès le départ. Il faut d'abord la transformer en équation fondamentale, puis appliquer ce que tu sais.

Parfois on isole $\cos x$, $\sin x$ ou $\tan x$ comme une inconnue. Parfois l'inconnue est cachée dans un argument comme $2x - \frac{\pi}{3}$.

Devine : Se ramener

À quelle équation fondamentale se ramène $2\tan x + 2 = 0$?

A. $\tan x = 1$

Faux.

Erreur de signe : en passant de l'autre côté, 2 devient -2.

B. $\tan x = -2$

Faux.

Tu as oublié de diviser par le coefficient 2.

C. $\tan x = -1$

Juste.

Juste : $2\tan x = -2$, donc $\tan x = -1$.

D. $\tan x = 0$

Faux.

Le terme constant ne disparaît pas : il passe dans le second membre.

Correction

On isole $\tan x$ comme une inconnue : $2\tan x = -2$, puis $\tan x = -1$.

C'est une équation fondamentale, déjà résolue : $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Méthode : se ramener à une équation fondamentale

1. **Isole** la ligne trigonométrique, comme l'inconnue d'une équation du premier degré.
2. **Transforme** le second membre en une ligne du même nom, grâce aux angles associés : par exemple $\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$.
3. **Pose** X égal à l'argument, par exemple $X = 2x - \dfrac{\pi}{3}$; résous en X, puis reviens à x en divisant **tout** par le coefficient de x, y compris $2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
4. **Sépare** un produit nul en plusieurs équations fondamentales.

Trois équations qui se ramènent

Exemple : un angle associé

Résolvons $\sin x = \cos\dfrac{\pi}{5}$. Les deux membres ne sont pas des lignes du même nom. D'après les angles associés :

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{5} &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)\\ &= \sin\frac{3\pi}{10}.\end{aligned}$$

L'équation devient $\sin x = \sin\dfrac{3\pi}{10}$. D'après la résolution de $\sin x = a$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}x &= \frac{3\pi}{10} + 2k\pi \quad \text{ou}\\ x &= \pi - \frac{3\pi}{10} + 2k\pi\\ &= \frac{7\pi}{10} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Exemple : un argument à transformer

Résolvons $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Posons $X = 2x - \dfrac{\pi}{3}$.

Comme $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, la résolution de $\cos X = a$ donne, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}X &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou}\\ X &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.\end{aligned}$$

Premier cas. On ajoute $\dfrac{\pi}{3}$ aux deux membres :

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{aligned}$$

donc $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Second cas. De même :

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \end{aligned}$$

donc $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$.

Exemple **: un produit nul**

Résolvons $(2\sin x + 1)\cos x = 0$. Rappel du collège : un produit de facteurs vaut zéro exactement quand l'un d'eux vaut zéro. On distingue donc deux cas, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Premier facteur nul. $2\sin x + 1 = 0$ s'écrit $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \\ x &= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Second facteur nul. $\cos x = 0$ s'écrit $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{2}$, donc $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Comme $-\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \pi$, ces deux familles se regroupent en :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Vérifie : Diviser par deux

Dans l'exemple de l'argument $2x - \dfrac{\pi}{3}$, pourquoi les solutions s'écrivent-elles avec $k\pi$ et non avec $2k\pi$?

A. On a divisé $2k\pi$ par 2, comme le reste de l'égalité.

Juste.

Juste : $\dfrac{2k\pi}{2} = k\pi$.

B. Parce que la tangente revient tous les demi-tours.

Faux.

Aucune tangente dans cette équation : c'est un cosinus.

C. C'est une erreur : il faudrait garder $2k\pi$.

Faux.

En gardant $2k\pi$, on perdrait par exemple $x = \dfrac{5\pi}{4}$, qui est solution.

D. Parce que $\cos(X + \pi) = \cos X$.

Faux.
C'est faux : $\cos(X+\pi) = -\cos X$.

Correction
On divise tous les termes par 2 : $\dfrac{2k\pi}{2} = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Les solutions reviennent donc tous les demi-tours.

Contrôle : pour $x = \dfrac{5\pi}{4}$, on a

$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{13\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6} + 2\pi, \end{aligned}$$

dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Garder les solutions d'un intervalle

Méthode : garder les solutions d'un intervalle

1. **Écris** chaque famille sous la forme $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \alpha + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. **Encadre** x par les bornes de l'intervalle, puis déduis-en un encadrement de k.
3. **Liste** les entiers k de cet encadrement et calcule les solutions correspondantes.
4. **Place** les points sur le cercle trigonométrique pour contrôler leur nombre.

Exemple : choisir les solutions dans un intervalle

Reprenons $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, dans l'intervalle de travail $]-\pi, \pi]$.

Première famille. Pour $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, la condition $-\pi < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{4} < k \leq \dfrac{3}{4}$: on retranche $\dfrac{\pi}{4}$, puis on divise par π. Donc $k = -1$ ou $k = 0$: $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Seconde famille. Pour $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$, la même condition équivaut à $-\dfrac{13}{12} < k \leq \dfrac{11}{12}$. Donc $k = -1$ ou $k = 0$: $x = -\dfrac{11\pi}{12}$ ou $x = \dfrac{\pi}{12}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Vérifie : Combien de solutions ?

Combien de solutions l'équation $\tan x = -1$ a-t-elle dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$?

A. Une.

Faux.

Tu as gardé $k = 0$ seulement ; $k = 1$ convient aussi.

B. Deux.

Juste.

Juste : $-\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.

C. Trois.

Faux.

Pour $k = -1$, on obtient $-\dfrac{5\pi}{4}$, qui est inférieur à $-\pi$.

D. Quatre.

Faux.

Pour la tangente, une seule famille : on ne double pas le compte.

Correction

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'encadrement $-\pi < -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{3}{4} < k \leq \dfrac{5}{4}$. Donc $k = 0$ ou $k = 1$:

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

À toi, puis le coin devoir

À toi : Un produit nul dans un intervalle

Résous dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ l'équation $(2\sin x + 1)\cos x = 0$ de l'exemple. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Reprends les familles de solutions trouvées dans l'exemple du produit nul.

Indice 2

Encadre k pour chaque famille : $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

Indice 3

Point délicat : ne suppose pas que $k = 0$ convient pour chaque famille ; contrôle-le par l'encadrement.

Réponse

Les solutions dans $\mathbb{R}$ ont été trouvées dans l'exemple ; on encadre k dans chaque famille, avec $k \in \mathbb{Z}$ et la condition $-\pi < x \leq \pi$.

Famille $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. La condition équivaut à $-\dfrac{3}{2} < k \leq \dfrac{1}{2}$, donc $k = -1$ ou $k = 0$. On obtient $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

Famille $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$. La condition équivaut à $-\dfrac{5}{12} < k \leq \dfrac{7}{12}$, donc $k = 0$. On obtient $-\dfrac{\pi}{6}$.

Famille $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$. La condition équivaut à $-\dfrac{13}{12} < k \leq -\dfrac{1}{12}$, donc $k = -1$. On obtient $-\dfrac{5\pi}{6}$.

Conclusion. Dans $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution dans un intervalle

En devoir, une résolution dans un intervalle se rédige en trois temps : familles dans $\mathbb{R}$, encadrement de k, liste des solutions.

Écris par exemple : « Pour $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, la condition $-\pi < x \leq \pi$ équivaut à $-\dfrac{5}{4} < k \leq \dfrac{3}{4}$, donc $k = -1$ ou $k = 0$. »

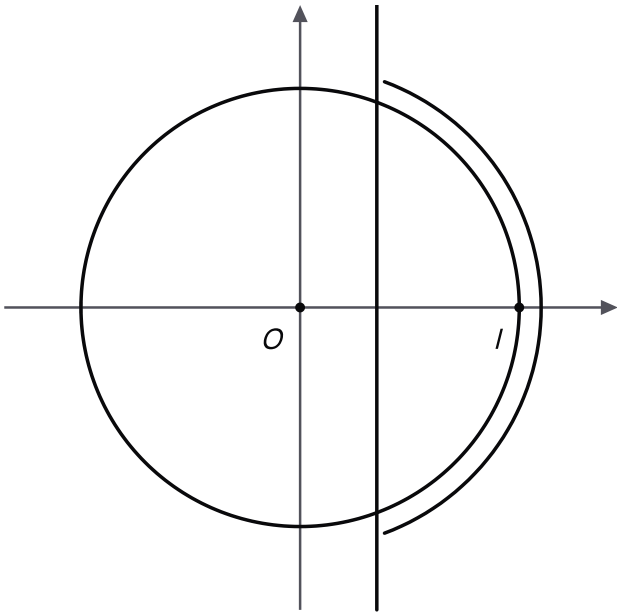
Nomme la propriété qui donne les familles. Termine par l'ensemble S, écrit en extension.

Inéquations trigonométriques sur le cercle trigonométrique

Un arc de solutions

En clair. Résoudre $\cos x \geq a$, c'est chercher les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse au moins a. Ils sont sur la droite verticale des points d'abscisse a, ou à sa droite : ils forment un **arc** du cercle.

Il reste à traduire cet arc en réels, dans un intervalle de travail choisi d'avance, par exemple $]-\pi, \pi]$.



Pour un réel a donné, les points du cercle situés sur la droite verticale d'abscisse a ou à sa droite forment un arc qui passe par I.

Devine : Lire un arc

Dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, quels réels x vérifient $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$?

A. Ceux de $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$

Faux.

Tu as oublié la partie de l'arc située sous l'axe des abscisses.

B. Ceux de $\left]-\pi, -\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

Faux.

Ces réels ont un cosinus au plus égal à $\dfrac{1}{2}$: c'est l'inégalité contraire.

C. Ceux de $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$

Juste.

Juste : c'est l'arc qui passe par I, entre les deux points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

D. Ceux de $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$

Faux.

Ces points sont sur la droite verticale d'abscisse $\frac{1}{2}$ ou à sa gauche : leur abscisse est au plus $\frac{1}{2}$.

Correction

Dans $]-\pi, \pi]$, les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont repérés par $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$.

Les points d'abscisse au moins $\frac{1}{2}$ forment l'arc qui les relie en passant par I. Cet arc correspond aux réels de $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, bornes comprises.

Propriété : Inéquations en cosinus sur]–π, π]

Soit a un réel tel que $-1 < a < 1$, et α l'unique réel de $]0, \pi[$ tel que $\cos\alpha = a$. Pour tout réel x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

- $\cos x \geq a \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$;
- $\cos x \leq a \Leftrightarrow -\pi < x \leq -\alpha$ ou $\alpha \leq x \leq \pi$.

Pour les inégalités strictes, on exclut les réels $-\alpha$ et α.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il se lit sur le cercle : les points d'abscisse au moins a sont sur la droite verticale formée des points d'abscisse a, ou à sa droite.

Ils forment l'arc qui va du point repéré par $-\alpha$ au point repéré par α en passant par I. Dans $]-\pi, \pi]$, cet arc est repéré par les réels de $[-\alpha, \alpha]$.

Une méthode pour lire le cercle

Méthode : résoudre une inéquation sur le cercle

1. **Nomme** l'intervalle de travail, par exemple $]-\pi, \pi]$.
2. **Résous** l'équation associée dans cet intervalle, et place les points-frontières sur le cercle.
3. **Repère** l'arc qui convient : à droite de la droite verticale formée des points d'abscisse a pour $\cos x \geq a$, au-dessus de la droite horizontale formée des points d'ordonnée a pour $\sin x \geq a$.
4. **Traduis** l'arc en un ou deux intervalles, en disant si chaque borne est comprise.

Exemple : deux inéquations en cosinus

Cosinus positif ou nul. Résolvons $\cos x \geq 0$ sur $]-\pi, \pi]$. Le réel de $]0, \pi[$ de cosinus 0 est $\alpha = \frac{\pi}{2}$. D'après les inéquations en cosinus :

$$S = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

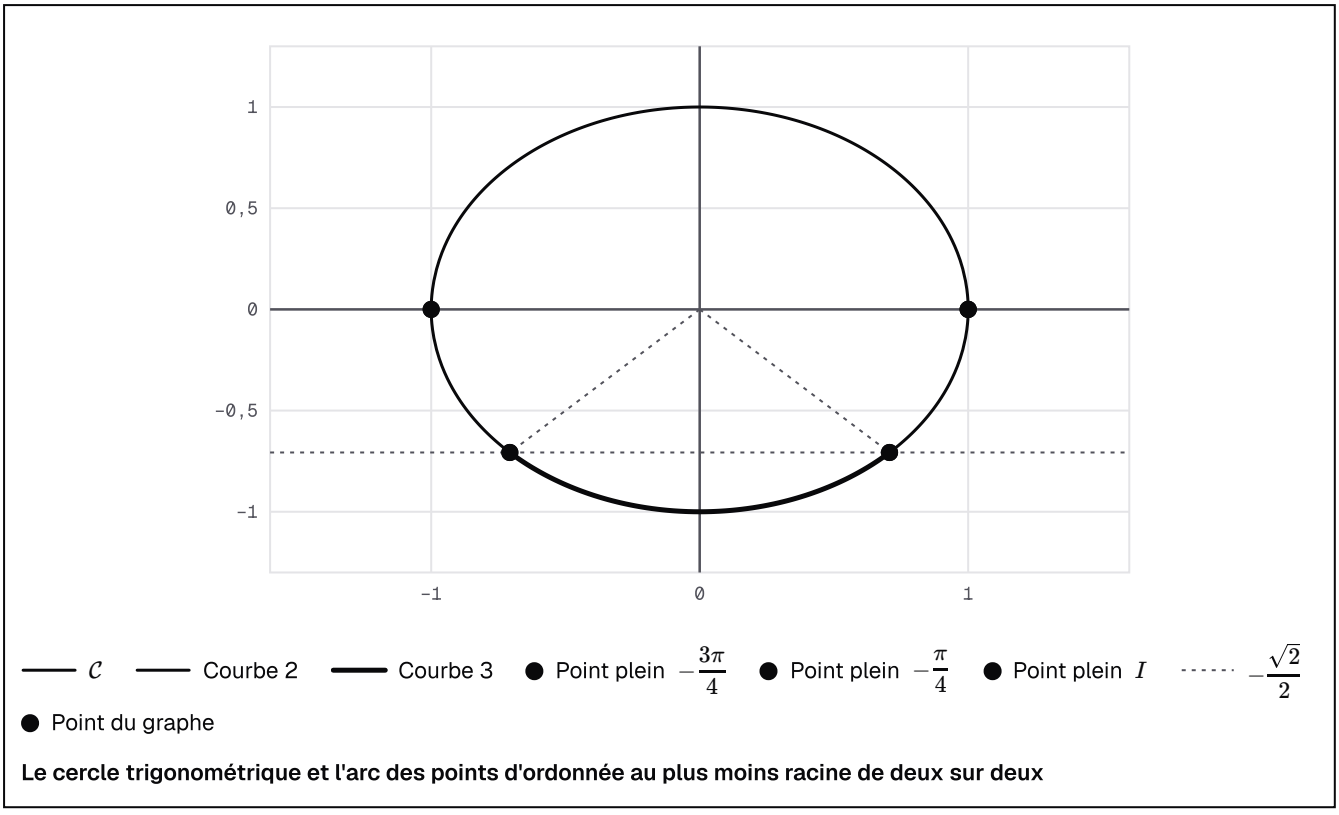
C'est le demi-cercle de droite.

Cosinus strictement négatif. Pour $\cos x < 0$ sur $]-\pi, \pi]$, les inéquations en cosinus donnent d'abord $\cos x \leq 0$ pour $-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. L'inégalité est stricte : on exclut $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Donc :

$$S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Le réel π appartient à S, car $\cos \pi = -1$.

Lire un arc en sinus



Le cercle trigonométrique et l'arc des points d'ordonnée au plus moins racine de deux sur deux

Propriété : Inéquations en sinus sur]−π, π]

Soit a un réel tel que $-1 < a < 1$, et β l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin \beta = a$. Pour tout réel x de l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

- si $a \geq 0$, alors $\sin x \geq a \Leftrightarrow \beta \leq x \leq \pi - \beta$;
- si $a < 0$, alors $\sin x \leq a \Leftrightarrow -\pi - \beta \leq x \leq \beta$.

Pour les inégalités strictes, on exclut les réels où $\sin x = a$ (β et $\pi - \beta$ dans le premier cas, $-\pi - \beta$ et β dans le second). Les inégalités contraires au sens strict sont vérifiées par les autres réels de $]-\pi, \pi]$; au sens large, on y ajoute ces deux réels.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il se lit sur le cercle.

- Pour $a \geq 0$, les points d'ordonnée au moins a forment l'arc qui va du point repéré par β au point repéré par $\pi - \beta$ en passant par J.
- Pour $a < 0$, les points d'ordonnée au plus a forment l'arc qui va du point repéré par $-\pi - \beta$ au point repéré par β, sous l'axe des abscisses.

Exemple : deux inéquations en sinus

Un sinus négatif. Résolvons $\sin x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$. Le réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de sinus $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est $\beta = -\dfrac{\pi}{4}$. Ici $a < 0$.

D'après les inéquations en sinus, $-\pi - \beta \leq x \leq \beta$, c'est-à-dire $-\dfrac{3\pi}{4} \leq x \leq -\dfrac{\pi}{4}$. Donc :

$$S = \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right].$$

C'est l'arc mis en évidence sur la figure.

Un sinus positif. Pour $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$, on a $a \geq 0$ et $\beta = \dfrac{\pi}{3}$. D'après les inéquations en sinus, $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \pi - \dfrac{\pi}{3}$. Donc :

$$S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

C'est l'arc situé au-dessus de la droite horizontale.

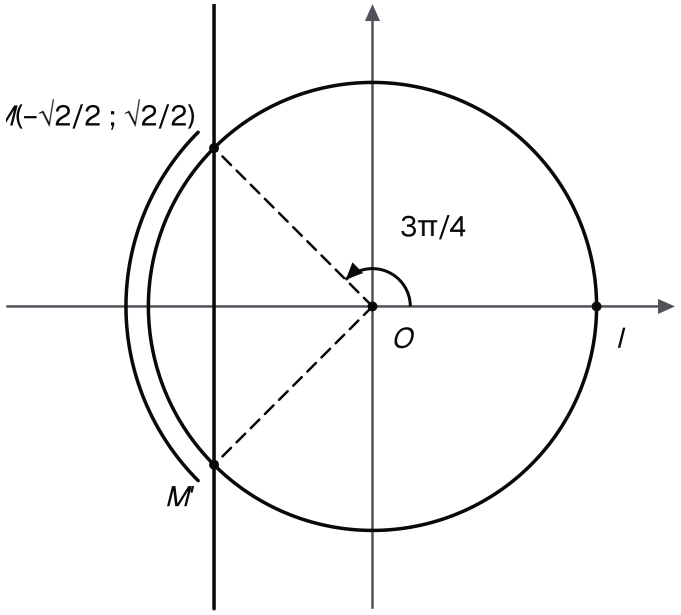
Attention : un arc coupé en deux

✗ « $\cos x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $]-\pi, \pi]$ équivaut à $\dfrac{3\pi}{4} \leq x \leq -\dfrac{3\pi}{4}$. »

✓ Cet encadrement n'a aucun sens, car $\dfrac{3\pi}{4} > -\dfrac{3\pi}{4}$. L'arc passe par le point repéré par π, au bord de l'intervalle de travail.

Il donne donc **deux** intervalles :

$$S = \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$



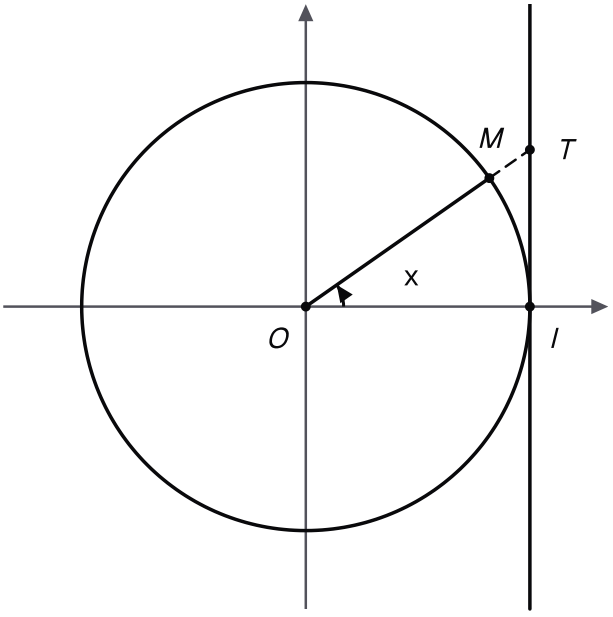
L'arc des points d'abscisse au plus moins racine de 2 sur 2 passe par le point repéré par pi : sur l'intervalle de travail, il donne deux intervalles.

Lire en tangente

En clair. Pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, le point M est sur le demi-cercle de droite, privé de ses extrémités. La droite (OM) coupe la droite verticale formée des points d'abscisse 1 au point d'ordonnée $\tan x$.

Ainsi, $\tan x \leq a$ correspond aux points M situés sous le point repéré par γ, ou en ce point.

Pour $\tan x \geq 1$, le point M est-il au-dessus ou au-dessous du point repéré par $\frac{\pi}{4}$?



La droite (OM) coupe la droite verticale des points d'abscisse 1 en un point T dont l'ordonnée est tan x.

Propriété : Inéquations en tangente sur]–π/2, π/2[

Soit a un réel et γ l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\gamma = a$. Pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

- $\tan x \geq a \Leftrightarrow \gamma \leq x < \frac{\pi}{2}$;
- $\tan x \leq a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x \leq \gamma$.

Pour les inégalités strictes, on exclut le réel γ.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il se lit sur le demi-cercle de droite, repéré par les réels de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Un point M situé sous le point repéré par γ donne une droite (OM) qui coupe la droite verticale des points d'abscisse 1 sous le point d'ordonnée a.

Exemple : une inéquation en tangente

Résolvons $\tan x \leq 1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Le réel de cet intervalle de tangente 1 est $\gamma = \frac{\pi}{4}$. D'après les inéquations en tangente :

$$S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right].$$

La borne $-\frac{\pi}{2}$ est exclue : la tangente n'y existe pas.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Deux inéquations

Résous dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $2\sin x + 1 > 0$, puis dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $\tan x \geq \sqrt{3}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Isole la ligne trigonométrique, puis résous l'équation associée pour placer les points-frontières.
Indice 2
La première s'écrit $\sin x > -\frac{1}{2}$: c'est le contraire d'une inéquation en sinus avec $a < 0$, comme dans l'exemple.
Indice 3
Point délicat : l'arc des solutions de la première passe par le point repéré par π ; pense aux deux intervalles et aux bornes exclues.

Réponse

Première inéquation. Elle équivaut à $\sin x > -\dfrac{1}{2}$. Le réel de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de sinus $-\dfrac{1}{2}$ est $\beta = -\dfrac{\pi}{6}$, et $-\pi - \beta = -\dfrac{5\pi}{6}$.

D'après les inéquations en sinus, $\sin x \leq -\dfrac{1}{2}$ équivaut à $-\dfrac{5\pi}{6} \leq x \leq -\dfrac{\pi}{6}$. On garde les autres réels de $]-\pi, \pi]$:

$$S = \left]-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, \pi\right].$$

Seconde inéquation. On a $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$, car $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. D'après les inéquations en tangente :

$$S = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Remarque : Coin devoir : rédiger une inéquation

En devoir, commence toujours par l'intervalle de travail, puis justifie les points-frontières.

Pour l'inéquation de l'activité, écris par exemple : « Sur $]-\pi, \pi]$, $\cos x = \dfrac{1}{2}$ équivaut à $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{\pi}{3}$. D'après les inéquations en cosinus, $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ équivaut à $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$. »

Une figure du cercle, avec l'arc colorié, aide le correcteur à te suivre.

Angles inscrits et arcs interceptés

Ce que tu sais déjà

Rappel du collège. Soit A, B, M trois points d'un cercle de centre O. L'angle $\widehat{AMB}$, de sommet M sur le cercle, est un angle inscrit. L'angle $\widehat{AOB}$, de sommet le centre, est un angle au centre. Tu as vu un lien entre ces deux angles.

Rappel du chapitre « Calcul trigonométrique ». Un angle au centre mesurant θ radians découpe, sur un cercle de rayon R, un arc dont la longueur vaut $R\theta$.

Devine : Deux spectateurs

Les deux poteaux A et B d'un but sont sur le bord d'une piste circulaire. Deux spectateurs M et N, assis sur le bord du même côté du but, regardent les poteaux. M est plus près du but que N. Lequel voit le but sous le plus grand angle ?

A. M, le plus proche du but.

Faux.
L'intuition trompe ici : se rapprocher ne change pas l'angle, tant qu'on reste sur le bord, du même côté.

B. N, le plus éloigné du but.

Faux.

S'éloigner ne change pas l'angle, tant qu'on reste sur le même arc.

C. Ils le voient sous le même angle.

Juste.

Juste : les deux angles interceptent le même arc.

D. Cela dépend du rayon de la piste.

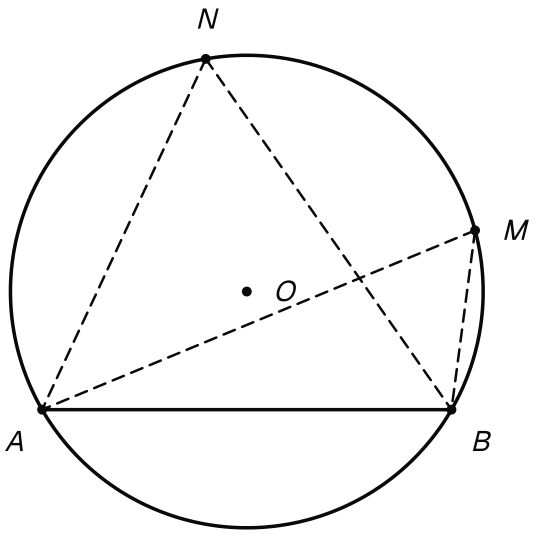
Faux.

Le rayon fixe la taille de la figure, pas l'égalité des deux angles.

Correction

Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont inscrits dans le même cercle. Ils interceptent le même arc d'extrémités A et B : celui qui ne contient pas les spectateurs.

Cette section démontre qu'ils sont alors égaux. Fais la figure sur ton cahier, et mesure les deux angles au rapporteur.



La piste circulaire de centre O : les poteaux A et B du but, et les spectateurs M et N assis sur le grand arc, M plus près du but que N.

Arcs et angles au centre

Définition : Arc, angle au centre et angle inscrit

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et A, B deux points distincts de $\mathcal{C}$.

- Les points A et B partagent $\mathcal{C}$ en deux **arcs** d'extrémités A et B. La **mesure** d'un arc, en radians, est le quotient de sa longueur par R : les mesures des deux arcs d'extrémités A et B ont pour somme 2π. Ces deux arcs sont situés de part et d'autre de la droite (AB) : deux points de $\mathcal{C}$ distincts de A et de B sont sur le même arc si et seulement s'ils sont du même côté de (AB) ; on l'admet, comme une lecture de la figure. Lorsqu'un arc est contenu dans un demi-cercle, sa mesure est celle de l'**angle au centre** $\widehat{AOB}$.
- Soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B. L'angle géométrique $\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** dans $\mathcal{C}$; il **intercepte** l'arc d'extrémités A et B qui ne contient pas M.

Exemple : mesurer les arcs de la piste

La piste a pour rayon $R = 30$ m. Le petit arc d'extrémités A et B, derrière le but, mesure 20π m de long. D'après la définition de la mesure d'un arc, sa mesure vaut :

$$\frac{20\pi}{30} = \frac{2\pi}{3}.$$

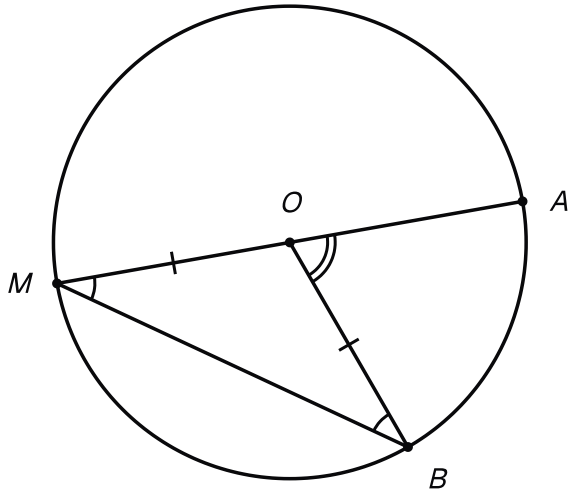
L'autre arc mesure $2\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Le petit arc est contenu dans un demi-cercle, car $\dfrac{2\pi}{3} \leq \pi$: l'angle au centre vaut $\widehat{AOB} = \dfrac{2\pi}{3}$.

Le théorème de l'angle inscrit

Au rapporteur, l'angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre, quelle que soit la position de M sur le grand arc.

Pourquoi est-ce vrai ? Lorsque le centre O est sur un côté de l'angle, un triangle isocèle apparaît. Les autres positions s'y ramènent en traçant un diamètre.



Le cas clé de la preuve : le centre O est sur le côté [MA], le triangle OMB est isocèle en O et l'angle au centre AOB est un angle extérieur de ce triangle.

Théorème : Théorème de l'angle inscrit

Soit A, B et M trois points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. La mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est la **moitié** de la mesure de l'arc qu'il intercepte.

En particulier, lorsque cet arc est contenu dans un demi-cercle, $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$.

Démonstration

Idée de la preuve. **Étape 1.** On suppose d'abord que O appartient au segment $[MA]$; le cas où O appartient à $[MB]$ est symétrique. Alors $\widehat{OMB} = \widehat{AMB}$, et le triangle OMB est isocèle en O, car $OM = OB$: $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$. Comme O appartient à $[MA]$, $\widehat{AOB} = \pi - \widehat{MOB}$; la somme des angles du triangle OMB donne $\widehat{AOB} = \widehat{OMB} + \widehat{OBM} = 2\,\widehat{AMB}$. L'arc intercepté est contenu dans un demi-cercle d'extrémités M et A : il mesure $\widehat{AOB}$.

Étape 2. Sinon, soit M' le point diamétralement opposé à M. Si M' est sur l'arc intercepté (O intérieur à l'angle), $\widehat{AMB} = \widehat{AMM'} + \widehat{M'MB}$; sinon (O extérieur à l'angle), $\widehat{AMB}$ est la différence de ces deux angles. L'arc intercepté est de même la somme ou la différence des arcs qu'ils interceptent ; l'étape 1 s'applique à chacun. La justification de ces sommes et différences est omise.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de l'idée de preuve

Retiens le cas clé : le centre O est sur le côté $[MA]$. Le triangle OMB est isocèle en O, et l'angle au centre est la somme de ses deux angles de base, qui sont égaux. D'où le facteur 2.

Sinon, le diamètre issu de M ramène à ce cas : l'angle est la somme de deux angles du cas clé si O est à l'intérieur de l'angle, leur différence s'il est à l'extérieur. La justification de ces sommes et différences n'est pas détaillée.

Vérifie : L'argument du cas clé

Dans l'idée de la preuve, pourquoi les angles $\widehat{OMB}$ et $\widehat{OBM}$ sont-ils égaux ?

A. Parce que $[MA]$ est un diamètre.

Faux.
Le diamètre place O sur $[MA]$, mais il ne concerne pas le triangle OMB.

B. Parce que $OM = OB$: le triangle OMB est isocèle.

Juste.
Juste : OM et OB sont deux rayons du cercle.

C. Parce que la somme des angles d'un triangle vaut π.

Faux.
La somme des angles sert ensuite ; elle ne dit pas que deux angles sont égaux.

D. Parce que $\widehat{AOB}$ est un angle au centre.

Faux.
C'est la conclusion visée, pas la raison de cette égalité.

Correction
Les points M et B sont sur le cercle de centre O : $OM = OB$, car ce sont deux rayons.

Le triangle OMB est donc isocèle en O. D'après le rappel du collège, ses angles de base $\widehat{OMB}$ et $\widehat{OBM}$ sont égaux.

Exemple : les angles de la piste

Reprends la piste : l'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut $\dfrac{2\pi}{3}$.

Sur le grand arc. Le spectateur M voit le but sous l'angle inscrit $\widehat{AMB}$, qui intercepte le petit arc. D'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

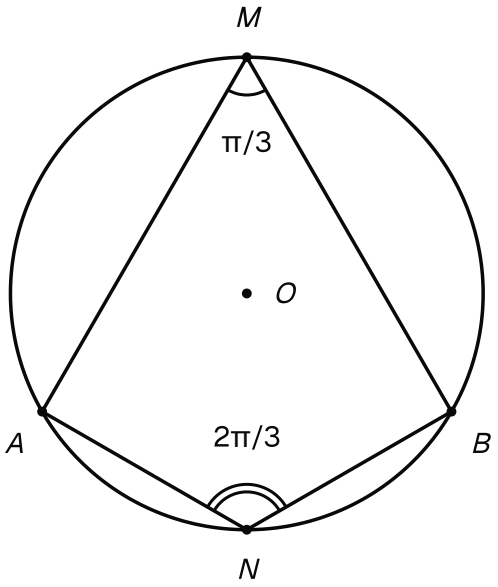
Sur le petit arc. Un spectateur P, placé sur le petit arc, intercepte le grand arc, de mesure $\dfrac{4\pi}{3}$. Cet arc n'est pas contenu dans un demi-cercle : on prend la moitié de sa mesure.

$$\widehat{APB} = \frac{1}{2} \times \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Deux angles, un même arc

Tous les spectateurs du grand arc voient le but sous le même angle.

Pourquoi est-ce vrai ? Chacun intercepte le même petit arc, et le théorème de l'angle inscrit donne la moitié de sa mesure. Pour deux sommets sur des arcs différents, on utilise que les mesures des deux arcs ont pour somme 2π.



Sur la piste, M est sur le grand arc et N sur le petit arc d'extrémités A et B : les angles inscrits AMB et ANB mesurent pi sur 3 et 2 pi sur 3, de somme pi.

Propriété : Angles inscrits qui interceptent le même arc

Soit A et B deux points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$, et M, N deux points de $\mathcal{C}$ distincts de A et de B.

- Si M et N appartiennent au **même** arc d'extrémités A et B, alors $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.
- Si M et N appartiennent aux **deux arcs différents** d'extrémités A et B, alors $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$.
- Si $[AB]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, alors $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration

Étape 1. Soit m et m' les mesures des deux arcs d'extrémités A et B. D'après la définition des arcs, $m + m' = 2\pi$.

Étape 2. Si M et N sont sur l'arc de mesure m, les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ interceptent tous deux l'autre arc, de mesure m'. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = \dfrac{m'}{2}$.

Étape 3. Si M est sur l'arc de mesure m et N sur l'arc de mesure m', le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{AMB} = \dfrac{m'}{2}$ et $\widehat{ANB} = \dfrac{m}{2}$. Donc $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \dfrac{m + m'}{2} = \pi$.

Étape 4. Si $[AB]$ est un diamètre, les deux arcs sont des demi-cercles : $m = m' = \pi$, donc $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur deux faits. Un angle inscrit vaut la moitié de l'arc qu'il intercepte. Les deux arcs d'extrémités A et B ont des mesures m et m' de somme 2π.

- Même arc intercepté : angles égaux.
- Arcs différents : $\dfrac{m}{2} + \dfrac{m'}{2} = \pi$.
- Diamètre : $m = m' = \pi$, d'où un angle droit.

Vérifie : Le cas des deux arcs

Dans la preuve, M et N sont sur les deux arcs différents d'extrémités A et B. Quel fait donne $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$?

A. Chaque angle intercepte un demi-cercle.

Faux.
Ce n'est vrai que si $[AB]$ est un diamètre.

B. Les deux angles interceptent le même arc.

Faux.
Avec des sommets sur deux arcs différents, les arcs interceptés sont différents.

C. Les mesures des deux arcs ont pour somme 2π.

Juste.
Juste : la moitié de 2π vaut π.

D. La somme des angles du triangle AMB vaut π.

Faux.
Ce triangle ne contient pas l'angle $\widehat{ANB}$.

Correction
Soit m et m' les mesures des deux arcs, M étant sur le premier. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{AMB} = \dfrac{m'}{2}$ et $\widehat{ANB} = \dfrac{m}{2}$.

Comme $m + m' = 2\pi$:

$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \frac{m + m'}{2} = \pi.$$

Exemple : spectateurs et diamètre

Même arc. Sur la piste, M et N sont sur le grand arc. D'après la propriété des angles qui interceptent le même arc, $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{3}$: c'est la réponse à la prédiction du début de la section.

Deux arcs différents. Le spectateur P est sur le petit arc. Comme l'annonce la même propriété :

$$\begin{aligned}\widehat{AMB} + \widehat{APB} &= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Cas du diamètre. Soit E le point diamétralement opposé à A. Les deux arcs d'extrémités A et E mesurent π. Tout point Q de la piste distinct de A et de E vérifie donc :

$$\widehat{AQE} = \frac{1}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Méthode, piège, à toi

Méthode : calculer un angle inscrit

1. **Repère** le sommet de l'angle et l'arc intercepté : celui qui ne contient pas le sommet.
2. **Cherche** l'angle au centre ou la mesure de cet arc, puis divise par 2.
3. **Relie** l'angle à un autre angle inscrit : ils sont égaux si les deux sommets sont sur le même arc, supplémentaires sinon.
4. **Pense** au diamètre : un angle inscrit dans un demi-cercle est droit.

Attention : la moitié, pas le double

✗ « L'angle au centre $\widehat{AOB}$ vaut $\dfrac{2\pi}{3}$, donc $\widehat{AMB} = 2 \times \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$. »

✓ Un angle d'un triangle ne dépasse jamais π : ce résultat doit t'alerter. L'angle inscrit est **deux fois plus petit** que l'angle au centre associé au même arc : $\widehat{AMB} = \dfrac{\pi}{3}$.

Vérifie aussi quel arc est intercepté : celui qui ne contient pas M.

À toi : Les angles d'un triangle inscrit

Trois spectateurs U, V, W sont assis sur le bord de la piste. Les trois arcs qu'ils délimitent, sans autre spectateur à l'intérieur, mesurent $\dfrac{\pi}{2}$ de U à V, $\dfrac{2\pi}{3}$ de V à W et $\dfrac{5\pi}{6}$ de W à U. Calcule les trois angles du triangle UVW, puis contrôle leur somme. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour chaque sommet, repère l'arc intercepté : celui qui ne contient pas ce sommet.
Indice 2

L'angle en W intercepte l'arc qui va de U à V ; applique le théorème de l'angle inscrit.

Indice 3

Point délicat : n'associe jamais un sommet à un arc dont il est une extrémité.

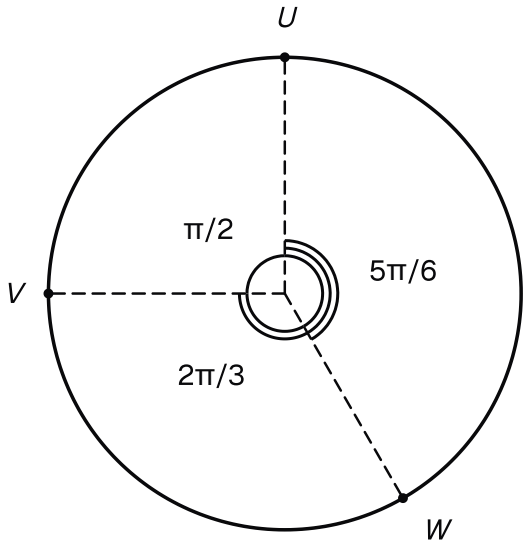
Réponse

D'après le théorème de l'angle inscrit, chaque angle vaut la moitié de l'arc qu'il intercepte.

- L'angle en W intercepte l'arc de U à V : $\widehat{UWV} = \dfrac{\pi}{4}$.
- L'angle en U intercepte l'arc de V à W : $\widehat{VUW} = \dfrac{\pi}{3}$.
- L'angle en V intercepte l'arc de W à U : $\widehat{UVW} = \dfrac{5\pi}{12}$.

Contrôle. La somme des angles d'un triangle vaut π, et :

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} \\ &= \frac{3\pi + 4\pi + 5\pi}{12} \\ &= \pi. \end{aligned}$$



Les spectateurs U, V et W partagent la piste en trois arcs, de mesures pi sur 2, 2 pi sur 3 et 5 pi sur 6, lues sur les angles au centre.

Points cocycliques et quadrilatères inscriptibles

Quatre points sur un cercle ?

Rappel du collège. Par trois points non alignés passe un seul cercle : son centre est le point de concours des médiatrices du triangle.

En clair. Pour quatre points, ce n'est pas toujours possible : le quatrième point peut tomber à côté du cercle des trois premiers. Il faut donc un critère.

Devine : Lequel est inscriptible ?

Lequel de ces quadrilatères a toujours ses quatre sommets sur un même cercle ?

A. Un losange.

Faux.

Un losange qui n'est pas un carré ne convient pas : on le vérifie plus loin avec ses angles.

B. Un rectangle.

Juste.

Juste : le centre du rectangle est à la même distance des quatre sommets.

C. Un parallélogramme.

Faux.

Un losange est un parallélogramme : ce n'est donc pas toujours vrai.

D. Un trapèze.

Faux.

Un trapèze qui a deux angles droits sans être un rectangle ne convient pas, par exemple.

Correction

Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu O. Donc O est à la même distance des quatre sommets : ils sont sur le cercle de centre O.

Pour un losange qui n'est pas un carré, la propriété qui suit montre qu'aucun cercle ne convient.

Définition : Points cocycliques, quadrilatère inscriptible

- Des points sont **cocycliques** s'ils appartiennent à un même cercle.
- Un quadrilatère est **inscriptible** si ses quatre sommets sont cocycliques. Ce cercle est le cercle **circonscrit** au quadrilatère, et l'on dit que le quadrilatère est **inscrit** dans ce cercle.

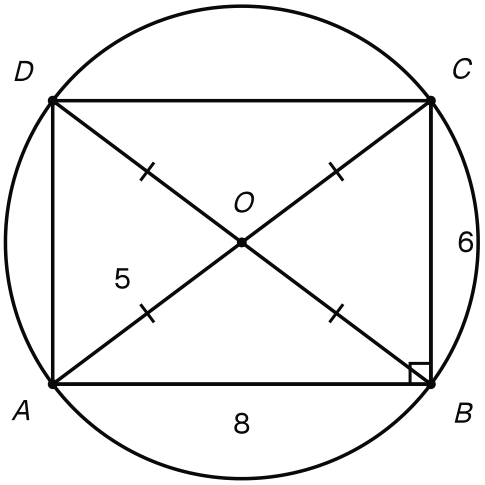
Exemple : un rectangle et ses sommets

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur 8 et de largeur 6. D'après le théorème de Pythagore, ses diagonales mesurent 10.

Elles se coupent en leur milieu O, donc :

$$OA = OB = OC = OD = 5.$$

Les points A, B, C, D sont donc cocycliques, sur le cercle de centre O et de rayon 5 : $ABCD$ est inscriptible.



Le rectangle ABCD de longueur 8 et de largeur 6 : ses diagonales se coupent en O, à la distance 5 des quatre sommets, centre du cercle qui les porte.

Les angles opposés

Dans le rectangle, deux angles opposés valent $\frac{\pi}{2}$ chacun : leur somme vaut π.

Pourquoi est-ce vrai pour tout quadrilatère convexe inscrit ? Deux sommets opposés, comme A et C, sont de part et d'autre de la diagonale (BD). D'après la définition des arcs, ils sont donc sur les deux arcs différents d'extrémités B et D.

Propriété : Angles opposés d'un quadrilatère inscrit

Soit $ABCD$ un quadrilatère **convexe** inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. Alors ses angles opposés sont **supplémentaires** :

$$\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi \quad \text{et} \quad \widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi.$$

Démonstration

Étape 1. Le quadrilatère $ABCD$ est convexe : ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent. La droite (BD) ne rencontre $\mathcal{C}$ qu'en B et D : elle ne contient ni A ni C. Les points A et C sont donc de part et d'autre de la droite (BD).

Étape 2. D'après la définition des arcs, deux points de $\mathcal{C}$ situés de part et d'autre de (BD) appartiennent aux deux arcs différents d'extrémités B et D. C'est le cas de A et C.

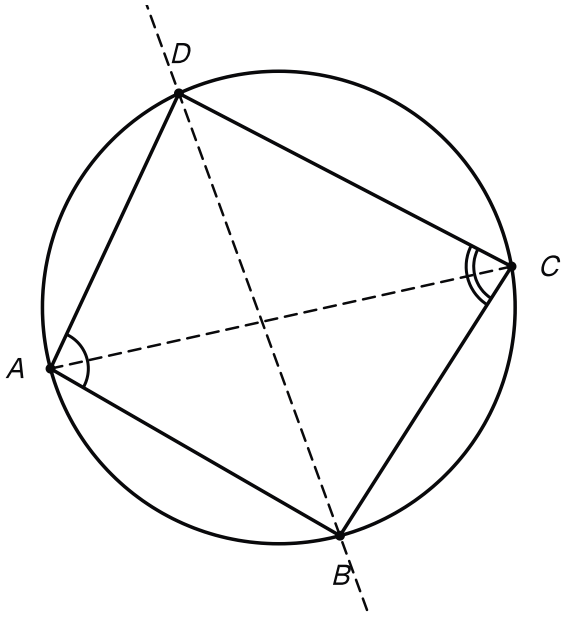
Étape 3. D'après la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc (cas des deux arcs différents), $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$.

Étape 4. De même, B et D sont de part et d'autre de la droite (AC) : ils appartiennent aux deux arcs différents d'extrémités A et C, donc $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve ne calcule rien : elle **place** les sommets. La convexité fait se couper les diagonales : deux sommets opposés sont de part et d'autre de l'autre diagonale.

Les deux arcs étant de part et d'autre de cette diagonale, ces sommets sont sur deux arcs différents. La propriété des angles inscrits situés sur deux arcs différents donne alors la somme π.



Dans le quadrilatère convexe inscrit ABCD, les diagonales se coupent : A et C sont de part et d'autre de (BD), donc sur deux arcs différents d'extrémités B et D.

Vérifie : Le rôle de la convexité

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « $ABCD$ est convexe » ?

A. À garantir que A, B, C, D sont sur un cercle.

Faux.

C'est l'autre hypothèse : le quadrilatère est inscrit.

B. À rendre deux angles opposés droits.

Faux.

Les angles d'un quadrilatère convexe inscrit ne sont pas forcément droits.

C. À placer A et C sur deux arcs différents d'extrémités B et D.

Juste.

Juste : les diagonales se coupent, donc A et C sont de part et d'autre de (BD).

D. À rendre les quatre côtés égaux.

Faux.

Un quadrilatère convexe peut avoir des côtés de longueurs quelconques.

Correction

La convexité fait se couper les diagonales : A et C sont de part et d'autre de (BD).

D'après la définition des arcs, ils sont donc sur les deux arcs différents d'extrémités B et D. La suite de la preuve applique la propriété des angles inscrits.

Exemple **: calculer, puis écarter un losange**

Angles manquants. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit, avec $\widehat{DAB} = \dfrac{2\pi}{5}$ et $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$. D'après la propriété des angles opposés :

$$\widehat{BCD} = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}.$$

De même, $\widehat{CDA} = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

Un losange. Un losange dont un angle mesure $\dfrac{\pi}{3}$ a deux angles opposés de $\dfrac{\pi}{3}$. Leur somme vaut $\dfrac{2\pi}{3} \neq \pi$. S'il était inscrit, la propriété des angles opposés serait contredite : ce losange n'est donc pas inscriptible.

Sans convexité. Place A, C, B, D dans cet ordre sur un cercle, et considère le quadrilatère croisé $ABCD$. Ses sommets A et C sont du même côté de (BD) : les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$ interceptent le même arc. Ils sont **égaux**, et leur somme n'est pas π en général.

Reconnaître des points cocycliques

Devine : Un cercle ou non ?

Un quadrilatère convexe $ABCD$ vérifie $\widehat{DAB} = \dfrac{3\pi}{4}$ et $\widehat{BCD} = \dfrac{\pi}{4}$. Ses quatre sommets sont-ils sur un même cercle ?

A. Non, car les deux angles sont différents.

Faux.

Des angles opposés d'un quadrilatère inscrit n'ont pas à être égaux : c'est leur somme qui compte.

B. On ne peut pas le savoir sans mesurer les côtés.

Faux.

Les angles suffisent : l'énoncé suivant ne demande aucune longueur.

C. Oui.

Juste.

Juste : les angles opposés en A et en C ont pour somme π ; c'est ce que dit l'énoncé suivant.

Correction
La propriété précédente part d'un cercle et donne des angles. Ici, on part des angles pour obtenir le cercle : c'est le chemin inverse.

On a $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$, et l'énoncé suivant affirme que cela suffit pour un quadrilatère convexe.

Propriété : Reconnaître des points cocycliques

- Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Si $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$, alors $ABCD$ est inscriptible.
- Soit A, B, C, D quatre points distincts tels que C et D n'appartiennent pas à la droite (AB) et soient du **même côté** de cette droite. Si $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, alors A, B, C et D sont cocycliques.

Remarque : Résultat admis

Ce résultat est admis. Il est plausible : si le quatrième point était à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle des trois autres, l'angle sous lequel il voit $[AB]$ changerait. Trace la figure sur ton cahier pour le constater au rapporteur.

Exemple : deux façons de reconnaître un cercle

Angles opposés. Un quadrilatère convexe $KLMN$ vérifie $\widehat{NKL} = \frac{5\pi}{8}$ et $\widehat{LMN} = \frac{3\pi}{8}$. Ces angles opposés ont pour somme :

$$\frac{5\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \pi.$$

D'après la reconnaissance des points cocycliques, $KLMN$ est inscriptible.

Deux angles droits. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit H le pied de la hauteur issue de B, et K celui de la hauteur issue de C. Fais la figure sur ton cahier.

Les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{BKC}$ sont droits, donc égaux. De plus, H et K sont du même côté de (BC), celui de A. D'après la reconnaissance des points cocycliques, B, C, H et K sont cocycliques.

Le cercle est celui de diamètre $[BC]$: un triangle rectangle est inscrit dans le cercle qui a pour diamètre son hypoténuse.

Méthode, piège, à toi, coin devoir

Méthode : démontrer que quatre points sont cocycliques

1. **Quadrilatère convexe** : montre que deux angles opposés ont pour somme π.

2. **Même côté** : montre que deux points situés du même côté d'une droite (AB) voient $[AB]$ sous le même angle.
3. **Angles droits** : deux points qui voient $[AB]$ sous un angle droit sont sur le cercle de diamètre $[AB]$.
4. **Conclus** en citant la propriété employée, hypothèses vérifiées.

Attention : opposés, pas consécutifs

✗ « Dans $ABCD$, $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = \pi$, donc $ABCD$ est inscriptible. »

✓ Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont **consécutifs** : leur somme vaut π dans tout trapèze de bases $[AD]$ et $[BC]$, inscriptible ou non.

Le critère porte sur deux angles **opposés**, comme $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$. Vérifie aussi l'ordre des sommets et la convexité.

À toi : Un quadrilatère par ses angles

Un quadrilatère convexe $EFGH$ a pour angles $\widehat{HEF} = \dfrac{5\pi}{12}$, $\widehat{EFG} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\widehat{FGH} = \dfrac{7\pi}{12}$. Calcule $\widehat{GHE}$, puis dis si $EFGH$ est inscriptible. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π (rappel du collège).

Indice 2

Les angles opposés sont $\widehat{HEF}$ et $\widehat{FGH}$, puis $\widehat{EFG}$ et $\widehat{GHE}$.

Indice 3

Point délicat : n'additionne pas deux angles consécutifs, comme $\widehat{HEF}$ et $\widehat{EFG}$.

Réponse

Quatrième angle. La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π. Donc :

$$\begin{aligned}\widehat{GHE} &= 2\pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{2} \\ &\quad - \frac{7\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Angles opposés. Les angles opposés $\widehat{HEF}$ et $\widehat{FGH}$ ont pour somme $\dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{7\pi}{12} = \pi$.

Conclusion. On a $\widehat{GHE} = \dfrac{\pi}{2}$ et, d'après la reconnaissance des points cocycliques, $EFGH$ est inscriptible.

Remarque : Coin devoir : rédiger une preuve de cocyclicité

En devoir, la conclusion « les points sont cocycliques » doit citer son critère.

Écris par exemple : « Les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{BKC}$ sont droits, et H, K sont du même côté de (BC). D'après la reconnaissance des points cocycliques, B, C, H, K sont cocycliques. »

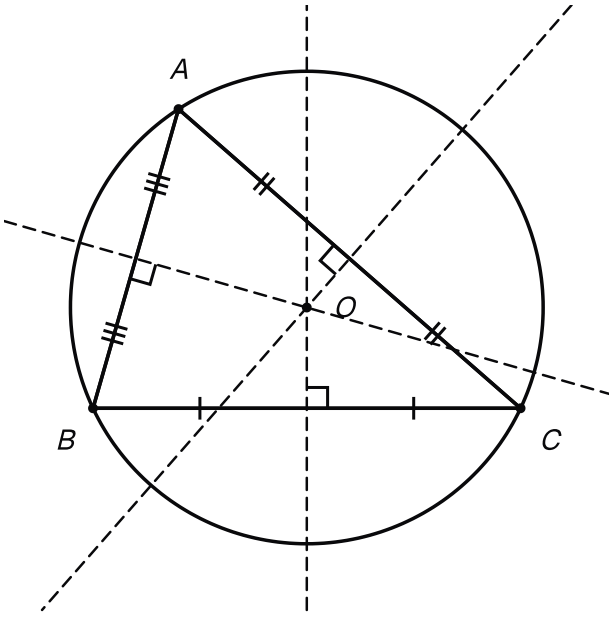
Vérifie chaque hypothèse avant de la citer : la convexité, ou le même côté de la droite.

La loi des sinus

Le cercle circonscrit

Rappel du collège. Les trois sommets d'un triangle sont sur un même cercle, le cercle circonscrit. Les médiatrices des côtés se coupent en son centre.

Si le triangle est rectangle, ce cercle a pour diamètre l'hypoténuse. Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé par l'hypoténuse.



Les trois médiatrices du triangle ABC se coupent en un même point O, centre du cercle qui passe par A, B et C.

Devine : Un quotient

Dans un triangle ABC, on note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$: chaque côté porte le nom du sommet qui lui fait face. Un triangle ABC rectangle en C est inscrit dans un cercle de rayon $R = 4$. Que vaut le quotient $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$?

A. 4

Faux.
C'est le rayon ; le quotient est égal à l'hypoténuse, qui est un diamètre.

B. 8

Juste.
Juste : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = c$, et l'hypoténuse est un diamètre.

C. 16

Faux.
Aucun carré n'intervient : $\sin\widehat{A} = \dfrac{a}{c}$.

D. Cela dépend de l'angle $\widehat{A}$.

Faux.
Le côté a et $\sin\widehat{A}$ changent ensemble : leur quotient reste le même.

Correction
Le triangle est rectangle en C : son hypoténuse est $[AB]$, de longueur c. D'après le sinus d'un angle aigu :

$$\sin\widehat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c},$$

donc $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = c$. Or l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit : $c = 2R = 8$.

Ce quotient vaut le diamètre $2R$, quel que soit le triangle rectangle.

Pourquoi est-ce vrai dans un triangle quelconque ? On fabrique un triangle rectangle avec le diamètre issu d'un sommet. Les angles inscrits relient ensuite l'un de ses angles à l'angle $\widehat{A}$.

La loi des sinus

Théorème : Loi des sinus

Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures en radians des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$. Alors

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R.$$

Démonstration

Étape 1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit et D le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à B : $BD = 2R$. Si $D = C$, $[BC]$ est un diamètre ; d'après la propriété des angles inscrits (cas du diamètre), $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = BC = 2R$.

Étape 2. Sinon, $D \neq C$ et le même cas du diamètre donne $\widehat{BCD} = \dfrac{\pi}{2}$. Dans le triangle BCD rectangle en C, d'hypoténuse $[BD]$, on a $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{a}{2R}$.

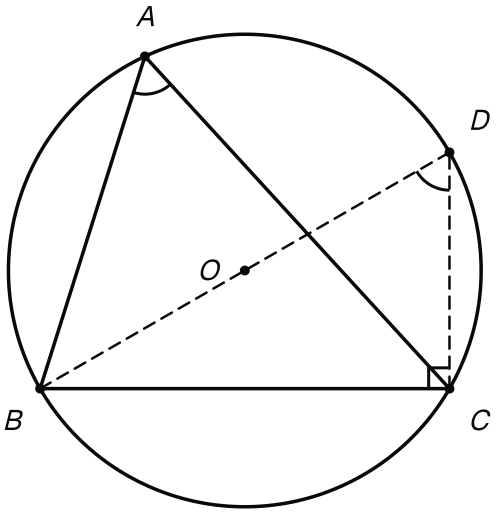
Étape 3. Si $D = A$, alors $\widehat{BDC} = \widehat{A}$. Sinon, A et D sont deux points de $\mathcal{C}$ distincts de B et de C : d'après la propriété des angles inscrits qui interceptent le même arc, $\widehat{BDC} = \widehat{A}$ ou $\widehat{BDC} = \pi - \widehat{A}$. Comme $\sin(\pi - x) = \sin x$ (angles associés), $\sin\widehat{BDC} = \sin\widehat{A}$ dans tous les cas.

Étape 4. Donc $\sin\widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$, qui n'est pas nul car $a > 0$: $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R$. En échangeant les rôles des sommets, on obtient de même $\dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = 2R$ et $\dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le diamètre $[BD]$ fabrique un triangle rectangle BCD, d'hypoténuse $2R$. Son angle en D intercepte le même arc que $\widehat{A}$, ou l'autre arc.

Dans les deux cas, il a le même sinus que $\widehat{A}$, grâce à $\sin(\pi - x) = \sin x$. Retiens l'idée : un diamètre ramène au triangle rectangle du collège.



Le diamètre [BD] du cercle circonscrit à ABC fabrique le triangle BCD rectangle en C ; ici A et D sont sur le même arc d'extrémités B et C, et l'angle en D est égal à l'angle en A.

Vérifie : L'égalité des sinus

Dans la preuve, pourquoi a-t-on $\sin\widehat{BDC} = \sin\widehat{A}$?

A. Parce que $\widehat{BDC} = \widehat{A}$ dans tous les cas.

Faux.

Si D et A sont sur des arcs différents, les angles sont supplémentaires, pas égaux.

B. Parce que le triangle BCD est rectangle en C.

Faux.

Cela donne $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{a}{2R}$, mais pas le lien avec $\widehat{A}$.

C. Angles égaux ou supplémentaires, puis $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Juste.

Juste : les deux cas donnent le même sinus.

D. Parce que le triangle ABD est isocèle.

Faux.

Rien n'indique que ce triangle est isocèle.

Correction

Les points A et D sont sur le cercle, distincts de B et de C. D'après la propriété des angles inscrits, $\widehat{BDC} = \widehat{A}$ s'ils sont sur le même arc, et $\widehat{BDC} = \pi - \widehat{A}$ sinon.

Les angles associés donnent $\sin(\pi - \widehat{A}) = \sin \widehat{A}$: le sinus est le même dans les deux cas.

Exemple : résoudre un triangle

Soit ABC un triangle avec $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{3}$ et $a = 6$.

Troisième angle. La somme des angles donne :

$$\widehat{C} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}.$$

Côté b. D'après la loi des sinus, $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$, donc :

$$\begin{aligned} b &= \frac{6 \sin \dfrac{\pi}{3}}{\sin \dfrac{\pi}{4}} \\ &= \frac{6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{6\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Ainsi $b \approx 7{,}35$. Contrôle : $\widehat{B} > \widehat{A}$ et $b > a$.

La méthode et le rayon

Méthode : calculer avec la loi des sinus

1. **Nomme** chaque côté d'après l'angle qui lui fait face : a face à $\widehat{A}$.
2. **Complète** les angles grâce à $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.
3. **Choisis** l'égalité de la loi des sinus qui contient la donnée et l'inconnue.

4. **Calcule**, avec une valeur approchée si besoin ; le rayon R vient de $2R = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$.

Exemple : le rayon du cercle circonscrit

Rayon du cercle circonscrit. Dans le triangle précédent, d'après la loi des sinus :

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{6}{\sin \dfrac{\pi}{4}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{2}} \\ &= 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Donc $R = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$.

Un angle obtus. Si $a = 7$ et $\widehat{A} = \dfrac{5\pi}{6}$, alors, d'après les angles associés :

$$\sin \widehat{A} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Donc $2R = \dfrac{7}{\dfrac{1}{2}} = 14$, et $R = 7$.

Un piège, puis à toi

Attention : le diamètre, pas le rayon

✗ « D'après la loi des sinus, $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = R$, donc $R = 6\sqrt{2}$. »

✓ Le quotient commun vaut $2R$, le **diamètre** : ici $R = 3\sqrt{2}$. Divise aussi chaque côté par le sinus de l'angle **opposé**, jamais d'un angle voisin.

À la calculatrice, vérifie le mode : radian si les angles sont en radians, degré s'ils sont en degrés.

À toi : Le troisième côté

Reprends le triangle de l'exemple : $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{4}$, $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{3}$ et $a = 6$. Calcule une valeur approchée du côté c au centième, puis contrôle-la. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Tu connais déjà $\widehat{C} = \dfrac{5\pi}{12}$ et le quotient commun $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$, calculé dans l'exemple du rayon.

Indice 2

Choisis l'égalité de la loi des sinus qui contient c et le quotient déjà connu ; le sinus de $\dfrac{5\pi}{12}$ se calcule à la calculatrice, en mode radian.

Indice 3

Point délicat : $\dfrac{5\pi}{12}$ n'est pas un angle usuel ; garde plusieurs décimales jusqu'au bout du calcul.

Réponse

D'après la loi des sinus :

$$\frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = 6\sqrt{2}.$$

Donc $c = 6\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{12}$. À la calculatrice, en mode radian, $\sin\dfrac{5\pi}{12} \approx 0{,}9659$, d'où $c \approx 8{,}20$.

Contrôle : $c < a + b$, car $8{,}20 < 6 + 7{,}35$. De plus, $\widehat{C}$ est le plus grand angle, et c le plus grand côté.

Aire d'un triangle et cercle inscrit

La hauteur et le sinus

Rappel du collège. L'aire d'un triangle vaut la moitié du produit d'une base par la hauteur correspondante.

Devine : Une hauteur

Dans un triangle ABC, $b = CA = 6$ et $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$. Quelle est la longueur de la hauteur issue de A ?

A. 3

Juste.

Juste : $6\sin\dfrac{\pi}{6} = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3$.

B. $3\sqrt{3}$

Faux.

Tu as pris le cosinus : $6\cos\dfrac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$ est la longueur CH.

C. 6

Faux.

La hauteur est plus courte que l'hypoténuse $[AC]$ du triangle rectangle AHC.

D. 12

Faux.

Tu as divisé par $\sin\dfrac{\pi}{6}$ au lieu de multiplier.

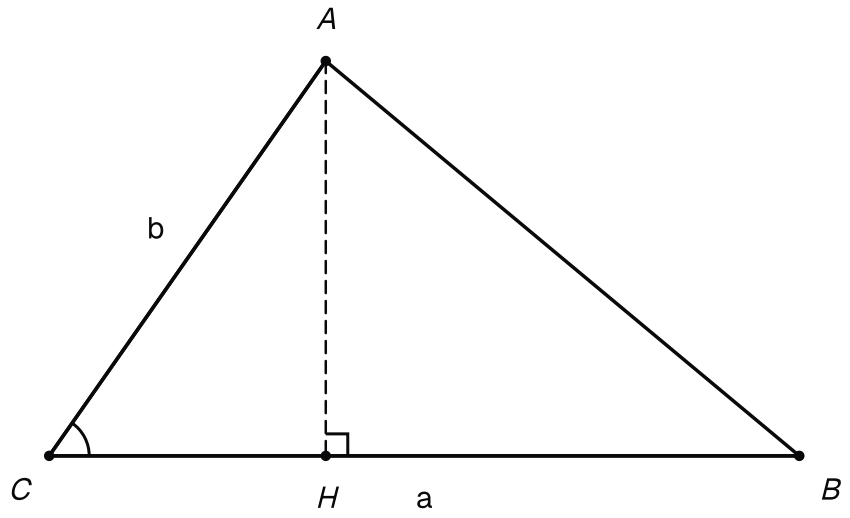
Correction

Soit H le pied de la hauteur issue de A. Le triangle AHC est rectangle en H, d'hypoténuse $AC = 6$. D'après le sinus d'un angle aigu :

$$\begin{aligned} AH &= AC \times \sin \widehat{C} \\ &= 6 \times \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$

En clair. Si l'on connaît deux côtés et l'angle compris entre eux, le sinus donne la hauteur, donc l'aire.

Pourquoi est-ce vrai ? Comme dans l'activité, la hauteur issue de A est un côté de l'angle droit du triangle rectangle AHC, d'hypoténuse b.



La hauteur AH issue de A est un côté de l'angle droit du triangle AHC, d'hypoténuse b : elle vaut b sin C.

L'aire avec un sinus

Propriété : Aire d'un triangle et sinus d'un angle

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ les mesures en radians de ses angles, et $\mathcal{A}$ son aire. Alors

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}\,bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}\,ca\sin\widehat{B}.$$

Démonstration

Étape 1. Soit H le pied de la hauteur issue de A. D'après la formule d'aire du collège, $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,BC \times AH = \frac{1}{2}\,a \times AH$.

Étape 2. Si $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$, alors $H = C$ et $AH = b = b\sin\widehat{C}$.

Étape 3. Sinon, $H \neq C$ et le triangle AHC est rectangle en H, d'hypoténuse $AC = b$, donc $AH = b\sin\widehat{ACH}$. Si H appartient à la demi-droite $[CB)$, alors $\widehat{ACH} = \widehat{C}$. Sinon, H appartient à la demi-droite opposée, et les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires : $\widehat{ACH} = \pi - \widehat{C}$. Comme $\sin(\pi - x) = \sin x$ (angles associés), $AH = b\sin\widehat{C}$ dans les deux cas.

Étape 4. Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,ab\sin\widehat{C}$. Les deux autres égalités s'obtiennent de même avec les hauteurs issues de B et de C.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve calcule la hauteur : $AH = b\sin\widehat{C}$. Elle distingue la position du pied H :

- sur la demi-droite $[CB)$, l'angle utile du triangle rectangle AHC est $\widehat{C}$;
- sur la demi-droite opposée, c'est $\pi - \widehat{C}$.

L'égalité $\sin(\pi - x) = \sin x$ redonne la même hauteur : une seule formule pour tous les triangles.

Vérifie : Le pied de la hauteur de l'autre côté

Dans la preuve, si le pied H appartient à la demi-droite opposée à $[CB)$, quel angle du triangle rectangle AHC sert au calcul de AH ?

A. L'angle $\widehat{C}$ lui-même.

Faux.
L'angle $\widehat{C}$ n'est pas un angle du triangle AHC : il est supplémentaire de $\widehat{ACH}$.

B. L'angle $\pi - \widehat{C}$.

Juste.
Juste : c'est l'angle $\widehat{ACH}$, et il a le même sinus que $\widehat{C}$.

C. L'angle $\dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Faux.
Aucune bissectrice n'intervient dans cette preuve.

D. L'angle $\widehat{BAC}$.

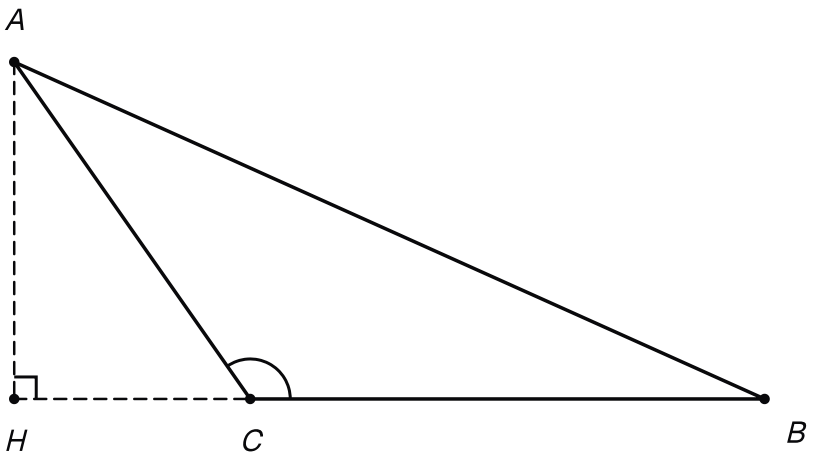
Faux.
Cet angle ne fait pas partie du triangle AHC.

Correction
Si H est sur la demi-droite opposée à $[CB)$, les angles $\widehat{ACH}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires. Dans le triangle AHC, rectangle en H, l'angle en C vaut donc $\pi - \widehat{C}$.

Ainsi, d'après les angles associés :

$$AH = b\sin(\pi - \widehat{C}) = b\sin\widehat{C}.$$

C'est ce qui se produit lorsque $\widehat{C}$ est obtus.



Lorsque l'angle en C est obtus, le pied H de la hauteur issue de A tombe sur le prolongement de [BC] au-delà de C.

Exemple : deux côtés et l'angle compris

Un angle aigu. Soit ABC un triangle avec $a = 5$, $b = 6$ et $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{6}$. D'après la formule de l'aire avec un sinus :

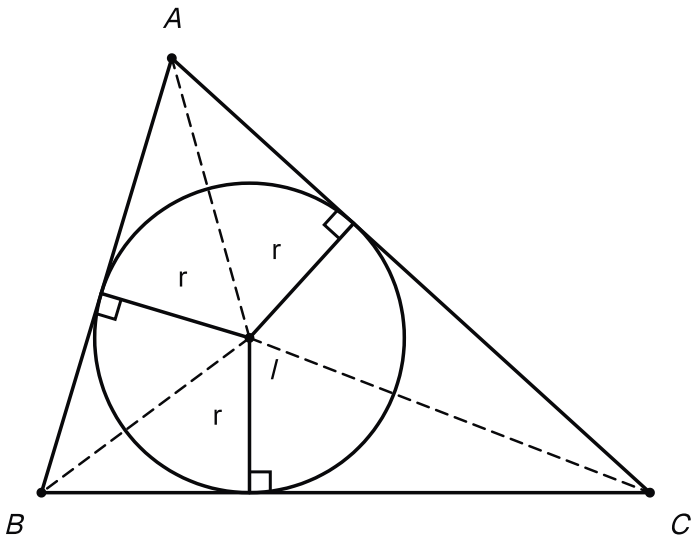
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{15}{2} = 7{,}5.\end{aligned}$$

Un angle obtus. Avec les mêmes côtés et l'angle obtus $\widehat{C} = \dfrac{5\pi}{6}$, l'aire est la même : $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \sin\dfrac{\pi}{6}$, d'après les angles associés.

Le cercle inscrit

Rappel du collège. Le cercle inscrit dans un triangle est tangent à ses trois côtés ; son centre I est le point de concours des bissectrices.

Pourquoi est-ce vrai que l'aire vaut $p\,r$? Les segments $[IA]$, $[IB]$ et $[IC]$ découpent le triangle en trois triangles, de même hauteur r.



Les segments [IA], [IB] et [IC] découpent ABC en trois triangles IBC, ICA et IAB, qui ont tous pour hauteur le rayon r du cercle inscrit.

Devine : Trois petits triangles

Un triangle a pour côtés 6, 8 et 10. Le centre I de son cercle inscrit, de rayon r, le découpe en trois triangles de sommet I, de bases 6, 8, 10 et de même hauteur r. Que vaut la somme de leurs trois aires ?

A. $12r$

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{2} \times (6+8+10) \times r = 12r$.

B. $24r$

Faux.

Tu as oublié le facteur un demi de la formule d'aire.

C. $5r$

Faux.

C'est l'aire du seul triangle de base 10 : ajoute les deux autres.

D. r^2

Faux.

Chaque aire est le produit d'une base par une hauteur : aucun carré n'apparaît.

Correction

D'après la formule d'aire du collège, les trois aires valent $\dfrac{1}{2} \times 6 \times r$, $\dfrac{1}{2} \times 8 \times r$ et $\dfrac{1}{2} \times 10 \times r$. Leur somme vaut :

$$3r + 4r + 5r = 12r.$$

Le facteur 12 est la moitié du périmètre $6+8+10=24$: c'est l'énoncé suivant.

L'aire avec le cercle inscrit

Propriété : Aire d'un triangle et cercle inscrit

Soit ABC un triangle, r le rayon de son cercle inscrit et $\mathcal{A}$ son aire. On note $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ et $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre. Alors

$$\mathcal{A}=p\,r.$$

Démonstration

Étape 1. Le centre I du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices du triangle (rappel du collège). Il est à l'intérieur du triangle, à la distance r de chacune des droites (BC), (CA) et (AB).

Étape 2. Les triangles IBC, ICA et IAB partagent le triangle ABC sans se chevaucher : $\mathcal{A}$ est la somme de leurs aires.

Étape 3. La hauteur du triangle IBC issue de I mesure r, donc son aire est $\dfrac{1}{2}\,ar$. De même, les aires de ICA et de IAB sont $\dfrac{1}{2}\,br$ et $\dfrac{1}{2}\,cr$.

Étape 4. Donc $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\,(a+b+c)\,r=p\,r$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Découpe le triangle depuis le centre I du cercle inscrit : trois triangles, de bases a, b, c et de même hauteur r. Leurs aires s'additionnent :

$$\frac{1}{2}\,(a+b+c)\,r.$$

Le demi-périmètre p apparaît alors de lui-même.

Vérifie : La hauteur des petits triangles

Dans la preuve, quelle est la hauteur du triangle IBC issue de I ?

A. Le rayon R du cercle circonscrit.

Faux.

Le cercle circonscrit n'intervient pas dans cette preuve.

B. La longueur IA.

Faux.

Le segment $[IA]$ joint I à un sommet ; il n'est pas perpendiculaire à (BC).

C. Le rayon r du cercle inscrit.

Juste.

Juste : I est à la distance r de la droite (BC).

D. La hauteur du triangle ABC issue de A.

Faux.

Elle part de A, pas de I : elle est plus longue que r.

Correction

Le cercle inscrit est tangent à (BC) : la distance de I à la droite (BC) vaut r.

C'est la hauteur du triangle IBC issue de I, donc son aire vaut $\dfrac{1}{2}\,ar$.

Exemple : le triangle de côtés 3, 4 et 5

Ce triangle est rectangle, car $3^2 + 4^2 = 5^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Aire. Elle vaut $\mathcal{A} = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$. Avec un sinus, on retrouve $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin\dfrac{\pi}{2} = 6$, car $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$.

Rayon du cercle inscrit. Le demi-périmètre vaut $p = \dfrac{3+4+5}{2} = 6$. D'après la formule de l'aire avec le cercle inscrit, $\mathcal{A} = p\,r$, donc :

$$r = \frac{6}{6} = 1.$$

La méthode, puis à toi

Méthode : calculer une aire ou le rayon du cercle inscrit

1. **Repère** deux côtés et l'angle compris entre eux, puis calcule $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\,ab\sin\widehat{C}$.
2. **Calcule** le demi-périmètre $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, si les trois côtés sont connus.
3. **Déduis** le rayon du cercle inscrit : $r = \dfrac{\mathcal{A}}{p}$.
4. **Contrôle** : le diamètre $2r$ est plus petit que chaque hauteur du triangle, car le cercle inscrit est compris entre un côté et la parallèle à ce côté passant par le sommet opposé.

À toi : Deux rayons pour un triangle

Dans le triangle de côtés 3, 4 et 5, calcule le rayon R du cercle circonscrit grâce à la loi des sinus. Calcule ensuite la hauteur issue du sommet de l'angle droit, et contrôle que $2r$ est plus petit. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

L'angle droit fait face au côté de longueur 5 ; son sinus vaut 1.

Indice 2

Pour la hauteur, écris l'aire avec la base de longueur 5 : $6 = \dfrac{1}{2} \times 5 \times h$.

Indice 3

Point délicat : la loi des sinus donne $2R$, et non R.

Réponse

Notons C le sommet de l'angle droit : $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{2}$ et $c = 5$. D'après la loi des sinus :

$$2R = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{5}{1} = 5,$$

donc $R = \dfrac{5}{2}$. On retrouve le rappel du collège : l'hypoténuse est un diamètre.

La hauteur h issue de C vérifie $\dfrac{1}{2} \times 5 \times h = 6$, donc $h = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

Conclusion. Avec $r = 1$, on a bien $2r = 2 < 2{,}4$: le diamètre du cercle inscrit est plus petit que cette hauteur.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle propriété pour quelle question

- **Résoudre** $\cos x = a$, $\sin x = a$ ou $\tan x = a$: contrôler a, trouver α, écrire les familles avec $k \in \mathbb{Z}$.
- **Se ramener** à une équation fondamentale : isoler, angles associés, argument posé égal à X, produit nul.
- **Choisir** les solutions d'un intervalle : encadrer k.
- **Inéquation** : intervalle de travail, points-frontières, arc lu sur le cercle.
- **Angle inscrit** : moitié de l'arc intercepté ; égaux sur un même arc, supplémentaires sur deux arcs.
- **Points cocycliques** : angles opposés supplémentaires, ou mêmes angles du même côté.
- **Triangle** : loi des sinus, $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\,ab \sin \widehat{C}$ et $\mathcal{A} = p\,r$.

Le mot du prof. Ce chapitre se lit sur un cercle : celui de la trigonométrie, puis celui qui passe par les sommets d'une figure. Avant chaque conclusion, nomme l'intervalle de travail ou la propriété que tu emploies. Ce réflexe te servira dans tous les chapitres de trigonométrie.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Équations trigonométriques et angles inscrits » (tc · sciences · mathematiques)