BURHAN

Résumé : Équations, inéquations et systèmes

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/resume

Chapitre	Semestre
Équations, inéquations et systèmes	Semestre 1

Premier degré : valeur absolue et paramètre

Méthode : équation avec une valeur absolue

1. **Isole** la valeur absolue pour obtenir $|A| = c$, où A est une expression du premier degré.
2. **Regarde** le signe de c. Si $c < 0$, il n'y a aucune solution, car une valeur absolue n'est jamais négative. Si $c = 0$, résous $A = 0$.
3. **Si** $c > 0$, annonce deux cas. Premier cas : $A = c$. Deuxième cas : $A = -c$.
4. **Réunis** les solutions des deux cas dans S.

Pour $|A| = |B|$, les deux cas sont $A = B$ et $A = -B$.

Exemple

Énoncé. Résous $|2x - 5| = 3$.

Premier cas. $2x - 5 = 3$, donc $2x = 8$ et $x = 4$.

Deuxième cas. $2x - 5 = -3$, donc $2x = 2$ et $x = 1$.

Conclusion. On réunit les deux cas : $S = \{1, 4\}$.

Méthode : inéquation avec une valeur absolue

Soit c un réel strictement positif et A une expression du premier degré.

- $|A| \leq c$ équivaut à $-c \leq A \leq c$: une seule double inégalité à résoudre.
- $|A| \geq c$ équivaut à $A \leq -c$ ou $A \geq c$: deux cas, puis leur réunion.

Si $c < 0$: $|A| \leq c$ n'a aucune solution et $|A| \geq c$ est vraie pour tout réel. Si $c = 0$: $|A| \leq 0$ équivaut à $A = 0$, $|A| > 0$ équivaut à $A \neq 0$, et $|A| \geq 0$ est vraie pour tout réel.

Résous ensuite chaque inégalité du premier degré et écris S sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles. Avec une inégalité stricte, les bornes sont exclues.

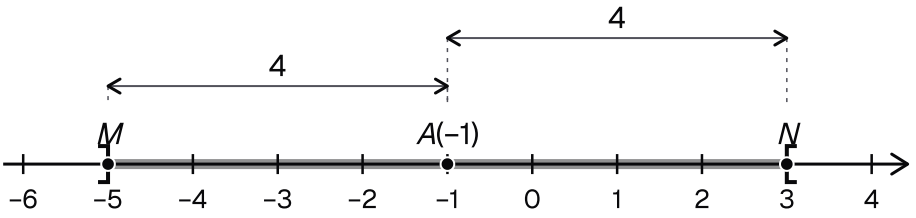
Exemple

Énoncé. Résous $|x + 1| < 4$.

Double inégalité. L'inéquation équivaut à $-4 < x + 1 < 4$.

Calcul. On retranche 1 aux trois membres : $-5 < x < 3$.

Conclusion. $S =]-5, 3[$.



Lecture sur la droite graduée : |x + 1| < 4 garde les réels à moins de 4 unités de -1, d'où l'intervalle ouvert de -5 à 3.

Méthode : équation du premier degré à paramètre

1. **Ramène** l'équation à la forme $(\dots)\,x = (\dots)$, où chaque parenthèse dépend du paramètre m.
2. **Cherche** les valeurs de m qui annulent le coefficient de x.
3. **Premier cas** : ce coefficient n'est pas nul. Tu peux diviser par lui, et l'équation a une seule solution.
4. **Deuxième cas** : ce coefficient est nul. Remplace m par sa valeur. Tu obtiens $0 = 0$, et tout réel convient, ou $0 = k$ avec $k \neq 0$, et aucun réel ne convient.
5. **Conclus** en rappelant la réponse de chaque cas.

Ne divise jamais par une expression en m sans avoir écarté le cas où elle est nulle.

Exemple

Énoncé. Selon le réel m, résous l'équation $m(x - 2) = x + 1$, d'inconnue x.

Forme utile. $mx - 2m = x + 1$, donc $(m - 1)x = 2m + 1$.

Premier cas : $m \neq 1$. On divise par $m - 1$, qui n'est pas nul : $S = \left\{ \dfrac{2m + 1}{m - 1} \right\}$.

Deuxième cas : $m = 1$. L'équation devient $0 \times x = 3$: aucun réel ne convient, $S = \varnothing$.

Second degré sans discriminant

Définition : Trinôme et équation du second degré

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$, où x est un réel, s'appelle un **trinôme du second degré** ; a, b et c sont ses **coefficients**.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue réelle x, est une **équation du second degré**. Un réel x_0 tel que $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ est une **solution** de cette équation ; on dit aussi que x_0 est une **racine** du trinôme.

Méthode : trois formes à repérer

Avant tout calcul de discriminant, regarde la forme de l'équation.

- **Aucun terme constant** ($c = 0$) : mets x en facteur, puis utilise la règle du produit nul.
- **Aucun terme en** x ($b = 0$) : isole x^2. L'égalité $x^2 = k$ donne $-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$ quand $k > 0$, le seul réel 0 quand $k = 0$, et rien quand $k < 0$.
- **Une identité remarquable** : reconnais un carré $(x + u)^2$ ou une différence $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, puis factorise.

Exemple

Énoncé. Résous $3x^2 + 7x = 0$, puis $4x^2 - 9 = 0$.

Facteur commun. $3x^2 + 7x = x(3x + 7)$. D'après la règle du produit nul, $x = 0$ ou $3x + 7 = 0$: $S = \left\{-\frac{7}{3}, 0\right\}$.

Différence de deux carrés. $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$. Le produit est nul si $x = \frac{3}{2}$ ou si $x = -\frac{3}{2}$: $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Méthode : une racine évidente

1. **Essaie** des valeurs simples, comme 0, 1, -1, 2 ou -2, jusqu'à trouver un réel α qui annule le trinôme.
2. **Factorise** par $x - \alpha$, comme au chapitre « Les polynômes » : l'autre facteur est du premier degré et commence par ax.
3. **Résous** l'équation produit nul obtenue.
4. **Contrôle** en développant la factorisation.

Exemple

Énoncé. Résous $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Racine évidente. Pour $x = 1$: $1 + 4 - 5 = 0$. Donc 1 est une racine.

Factorisation. $x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$. Contrôle : $(x - 1)(x + 5) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5$.

Conclusion. $x - 1 = 0$ ou $x + 5 = 0$: $S = \{-5, 1\}$.

Attention : Ne divise pas par l'inconnue

Dans $x^2 = -3x$, diviser par x donne seulement $x = -3$. Pourtant 0 convient aussi : $0^2 = -3 \times 0$.

Passe tout dans un membre : $x^2 + 3x = 0$, soit $x(x+3) = 0$, et $S = \{-3, 0\}$.

Forme canonique et discriminant

Propriété : Forme canonique d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Définition : Discriminant d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$. Le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ (et de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$). Avec cette notation, la forme canonique s'écrit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Écris la forme canonique de $2x^2 + 8x + 6$, puis calcule son discriminant.

Mise en facteur. $2x^2 + 8x + 6 = 2\left(x^2 + 4x + 3\right)$.

Carré complété. $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$, donc $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$.

Forme canonique. $2x^2 + 8x + 6 = 2\left[(x+2)^2 - 1\right]$.

Discriminant. $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16$. On retrouve $\dfrac{\Delta}{4a^2} = \dfrac{16}{16} = 1$.

Résoudre et factoriser avec le discriminant

Théorème : Résolution de l'équation du second degré

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- n'a **aucune solution** si $\Delta < 0$;
- a une **seule solution** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ (on dit que x_0 est une **racine double**) ;
- a **deux solutions distinctes** $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

Propriété : Factorisation d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta = 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne peut pas s'écrire comme le produit de deux facteurs du premier degré.

Méthode : le discriminant pas à pas

1. **Range** l'équation : un membre nul, l'autre écrit dans l'ordre x^2, puis x, puis la constante.
2. **Note** a, b et c, chacun avec son signe.
3. **Calcule** $\Delta = b^2 - 4ac$ en mettant les nombres négatifs entre parenthèses.
4. **Conclus** selon le signe de Δ avec le théorème « Résolution de l'équation du second degré », puis écris S.
5. **Factorise** si on te le demande : $a(x - x_1)(x - x_2)$, ou $a(x - x_0)^2$, ou aucune factorisation si $\Delta < 0$.

Exemple

Énoncé. Résous $3x^2 - 5x - 2 = 0$, puis factorise le trinôme.

Coefficients. $a = 3, b = -5, c = -2$.

Discriminant. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49 = 7^2$.

Solutions. $x_1 = \dfrac{5 - 7}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{5 + 7}{6} = 2$, donc $S = \left\{-\dfrac{1}{3}, 2\right\}$.

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 2 &= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) \\ &= (3x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Exemple

Discriminant nul. Pour $9x^2 - 6x + 1 = 0$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$. La racine double est $x_0 = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$, donc $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. Factorisation : $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$.

Discriminant négatif. Pour $3x^2 - 2x + 1 = 0$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8$. Aucun réel ne convient : $S = \varnothing$, et le trinôme ne se factorise pas.

Attention : Le signe de chaque coefficient compte

Pour $-x^2 + 4x + 5 = 0$, on a $a = -1$. Le discriminant vaut $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36$, et non $16 - 20$.

Garde aussi le signe de a au dénominateur : $x_1 = \dfrac{-4 - 6}{-2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-4 + 6}{-2} = -1$.

Méthode : changer d'inconnue

1. **Repère** l'expression qui se répète. Dans une équation avec x^4 et x^2, c'est x^2.
2. **Pose** $X = x^2$ et note tout de suite que $X \geq 0$.
3. **Résous** l'équation du second degré d'inconnue X.
4. **Reviens** à x : écarte chaque valeur négative de X, puis résous $x^2 = X$ pour les autres.

Exemple

Énoncé. Résous $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Nouvelle inconnue. Avec $X = x^2$, où $X \geq 0$: $X^2 - 5X + 4 = 0$.

Résolution en X. 1 est racine évidente, et $X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$. Donc $X = 1$ ou $X = 4$, deux valeurs positives.

Retour à x. $x^2 = 1$ donne -1 et 1 ; $x^2 = 4$ donne -2 et 2. Ainsi $S = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Signe d'un trinôme et inéquations

Théorème : Signe d'un trinôme du second degré

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c$ est strictement du **signe de** a.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et, pour tout réel $x \neq x_0$, il est strictement du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, on note α et β les deux racines, avec $\alpha < \beta$. Le trinôme s'annule en α et en β ; il est strictement du signe de a si $x < \alpha$ ou $x > \beta$, et strictement du **signe contraire** de a si $\alpha < x < \beta$.

En résumé : un trinôme est du signe de a, sauf entre ses racines.

Méthode : dresser le tableau de signes

1. **Cherche** les racines du trinôme, avec ou sans discriminant.
2. **Place**-les dans l'ordre croissant sur la première ligne du tableau de signes, entre $-\infty$ et $+\infty$.
3. **Remplis** la seconde ligne : un 0 sous chaque racine, le signe de a à l'extérieur des racines, le signe opposé entre elles.
4. **Contrôle** avec $x = 0$: le trinôme y vaut c.

Exemple

Énoncé. Étudie le signe de $-2x^2 + 2x + 4$.

Racines. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36$. Les racines sont $\frac{-2-6}{-4} = 2$ et $\frac{-2+6}{-4} = -1$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

Signe. Ici $a = -2 < 0$: le trinôme est strictement négatif si $x < -1$ ou $x > 2$, et strictement positif si $-1 < x < 2$.

Contrôle. Pour $x = 0$, il vaut $4 > 0$, et 0 est bien entre -1 et 2.

Tableau de signes du trinôme de l'exemple : négatif à l'extérieur des racines, positif entre elles

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-2x^2 + 2x + 4$		−	0	+	0	−	

Attention : Le signe de a d'abord

Le trinôme $1 - x^2$ a pour racines -1 et 1, mais son coefficient a vaut -1. Il est donc positif entre -1 et 1, et négatif à l'extérieur. Lis toujours le signe de a avant de remplir le tableau.

Méthode : résoudre une inéquation du second degré

1. **Passe** tous les termes dans un membre pour comparer un trinôme, un produit ou un quotient à 0.
2. **Dresse** le tableau de signes. Pour un produit ou un quotient, une ligne par facteur, puis la règle des signes.
3. **Marque** d'une double barre chaque valeur qui annule un dénominateur : elle est interdite.

4. **Lis** les intervalles qui conviennent. Une racine est gardée pour $\leq$ ou $\geq$, écartée pour $<$ ou $>$.

Exemple

Énoncé. Résous $x^2 - x \leq 6$.

Un membre nul. L'inéquation s'écrit $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Racines. $\Delta = 1 + 24 = 25$, d'où $\alpha = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $\beta = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

Lecture. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif ou nul entre ses racines, bornes comprises : $S = [-2, 3]$.

Exemple

Énoncé. Résous $\dfrac{x-3}{x^2-1} \geq 0$.

Valeurs interdites. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ s'annule en -1 et en 1.

Signes. Le numérateur est négatif avant 3, positif après. Le dénominateur est positif si $x < -1$ ou $x > 1$, négatif entre -1 et 1.

Quotient. Il est négatif sur $]-\infty, -1[$, positif sur $]-1, 1[$, négatif sur $]1, 3[$, nul en 3 et positif sur $]3, +\infty[$.

Conclusion. $S =]-1, 1[\cup [3, +\infty[$.

Attention : Ne chasse pas un dénominateur

Dans l'exemple précédent, multiplier les deux membres par $x^2 - 1$ serait une faute. Ce nombre change de signe selon x, donc le sens de l'inégalité aussi. On étudie le signe du quotient, sans jamais chasser le dénominateur.

Systèmes de deux équations

Définition : Système de deux équations à deux inconnues ; déterminant

Soit a, b, c, a', b', c' des réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Le système

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

est un **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** x et y. Une **solution** de (S) est un couple (x, y) de réels qui vérifie les deux équations à la fois.

Le **déterminant** du système (S) est le réel

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Théorème : Système de déterminant non nul

Soit (S) le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

de déterminant $D = ab' - a'b$. On pose

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

et

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Si $D \neq 0$, le système (S) a une **unique solution** : le couple $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$.

Méthode : le déterminant

1. **Aligne** les inconnues : chaque équation sous la forme $ax + by = c$, avec x d'abord, y ensuite.
2. **Calcule** $D = ab' - a'b$: produit en descendant, moins produit en montant.
3. **Si** $D \neq 0$, calcule D_x, où les seconds membres prennent la place de la colonne de x, et D_y, où ils prennent celle de y.
4. **Divise** : $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$.
5. **Vérifie** le couple dans les deux équations.

Exemple

Énoncé. Résous le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x - 4y = 41 \end{cases}$$

Déterminant. $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) - 5 \times 2 = -22$, qui n'est pas nul.

Calculs. $D_x = 7 \times (-4) - 41 \times 2 = -110$ et $D_y = 3 \times 41 - 5 \times 7 = 88$. Donc $x = \frac{-110}{-22} = 5$ et $y = \frac{88}{-22} = -4$.

Vérification. $15 - 8 = 7$ et $25 + 16 = 41$: $S = \{(5, -4)\}$.

Attention : Le déterminant se lit en croix

Pour le système précédent, écrire $3 \times 2 - 5 \times (-4) = 26$ mélange les lignes et les colonnes. Le déterminant croise les coefficients : $3 \times (-4) - 5 \times 2 = -22$. Une erreur ici fausse x et y ensemble.

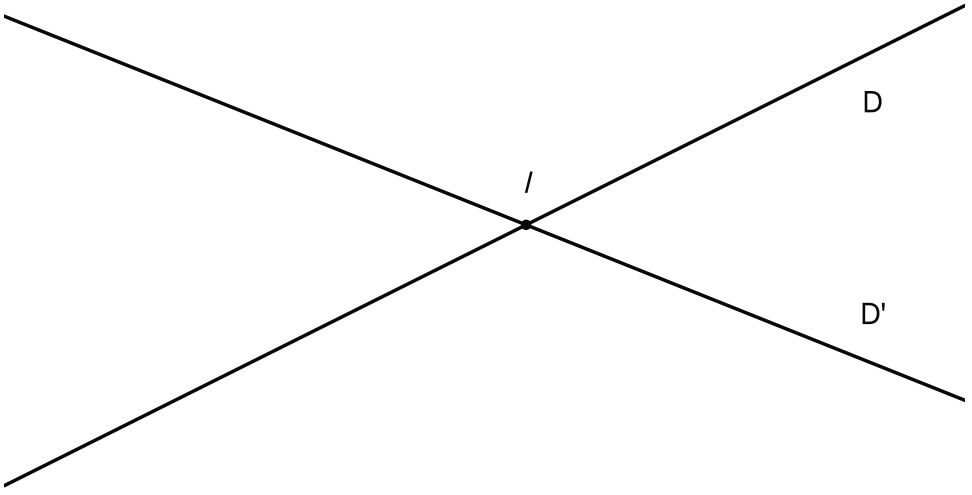
Propriété : Système et position relative de deux droites

Le plan est rapporté à un repère. Soit (S) le système

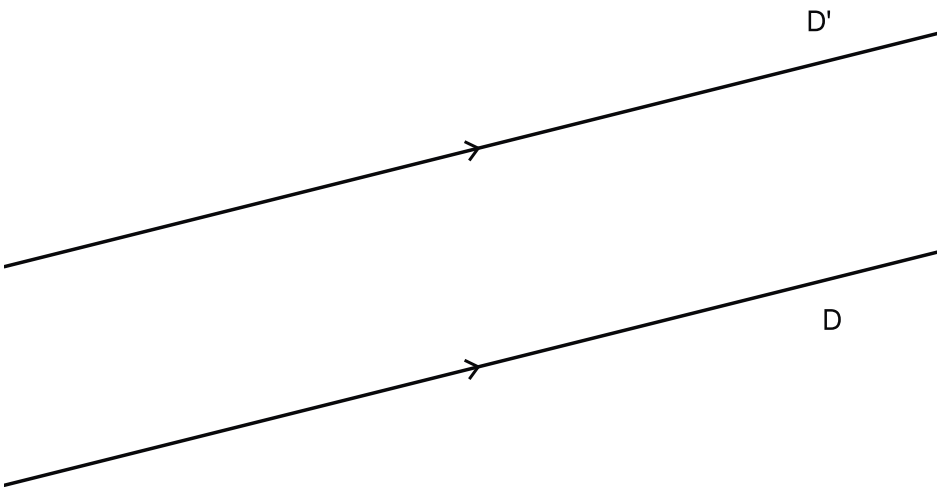
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

de déterminant $D = ab' - a'b$, et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ les droites d'équations cartésiennes $ax + by - c = 0$ et $a'x + b'y - c' = 0$. Les solutions de (S) sont les couples de coordonnées des points communs à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. De plus :

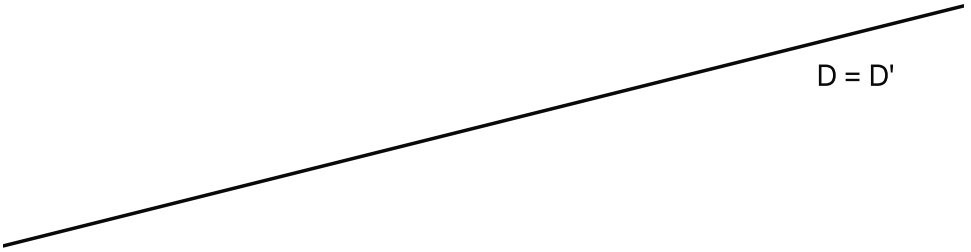
- si $D \neq 0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **sécantes**, et (S) a une unique solution ;
- si $D = 0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **parallèles** : (S) n'a aucune solution si elles sont strictement parallèles, et une infinité de solutions si elles sont confondues.



Premier cas, déterminant non nul : deux droites qui se croisent en un seul point, dont les coordonnées forment l'unique solution.



Deuxième cas, déterminant nul et aucun point commun : les droites sont strictement parallèles, et le système n'a pas de solution.



Troisième cas, déterminant nul et un point commun : les deux équations décrivent la même droite, et chacun de ses points donne une solution.

Méthode : lire un système sur deux droites

1. **Calcule** le déterminant D du système.
2. **Si** $D \neq 0$: les deux droites se coupent en un seul point, dont les coordonnées sont la solution.
3. **Si** $D = 0$: les droites sont parallèles. Choisis un point simple de la première et teste-le dans la seconde équation.
4. **Conclus** : point commun, droites confondues et infinité de solutions ; sinon, droites strictement parallèles et $S = \varnothing$.

Exemple

Énoncé. Étudie le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$$

Déterminant. $D = 2 \times 6 - (-4) \times (-3) = 12 - 12 = 0$: les droites sont parallèles.

Point test. Le point $(2, 0)$ vérifie la première équation. Dans la seconde : $-4 \times 2 + 6 \times 0 = -8$, qui n'est pas égal à 1.

Conclusion. Les droites sont strictement parallèles : $S = \varnothing$. Avec le second membre -8 au lieu de 1, elles seraient confondues.

Régionnement et programmation linéaire

Définition : Inéquation du premier degré à deux inconnues

Soit a, b, c trois réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Une inéquation de la forme $ax + by + c > 0$ (ou $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$) est une **inéquation du premier degré à deux inconnues** x et y. Une **solution** est un couple (x, y) de réels qui la vérifie.

Le plan étant rapporté à un repère, **résoudre graphiquement** une inéquation (ou un système d'inéquations) à deux inconnues, c'est représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ dont le couple de coordonnées est solution.

Propriété : Régionnement du plan par une droite

Le plan est rapporté à un repère. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La droite $\mathcal{D}$ partage le plan en deux **demi-plans ouverts** de frontière $\mathcal{D}$:

- si $b \neq 0$ et si $y = mx + p$ est l'équation réduite de $\mathcal{D}$, ce sont l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y > mx + p$ (au-dessus de $\mathcal{D}$) et l'ensemble des points tels que $y < mx + p$ (au-dessous de $\mathcal{D}$) ;
- si $b = 0$, la droite $\mathcal{D}$ a une équation de la forme $x = k$, et ce sont l'ensemble des points tels que $x > k$ et l'ensemble des points tels que $x < k$.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c > 0$ est l'un de ces deux demi-plans, et l'ensemble des points tels que $ax + by + c < 0$ est l'autre.

Méthode : représenter les solutions sur ton cahier

1. **Trace** la droite frontière $ax + by + c = 0$ à l'aide de deux de ses points. Trait plein pour $\leq$ ou $\geq$, pointillés pour $<$ ou $>$.
2. **Choisis** un point test hors de la droite et remplace ses coordonnées dans l'inéquation.
3. **Garde** son demi-plan si l'inégalité est vraie, l'autre sinon. Hachure la partie qui ne convient pas.

4. **Pour un système**, refais ce travail pour chaque inéquation : la partie non hachurée est la solution.

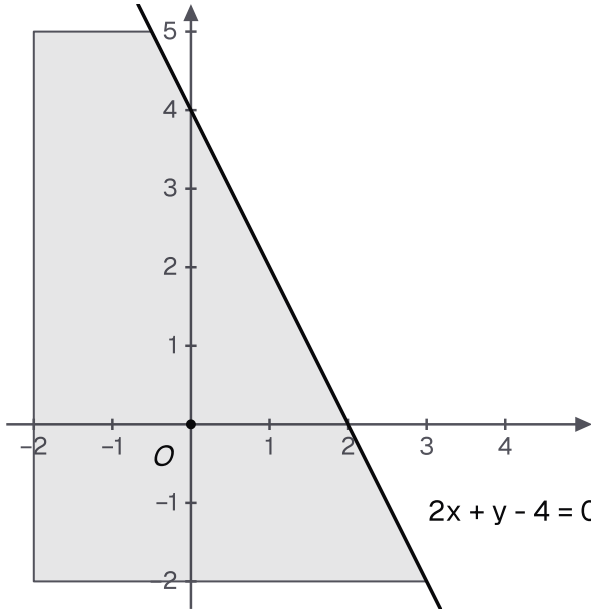
Exemple

Énoncé. Représente les solutions de $2x + y - 4 \leq 0$.

Frontière. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + y - 4 = 0$ passe par $(0, 4)$ et $(2, 0)$. On la trace en trait plein.

Point test. Pour $O(0, 0)$: $2 \times 0 + 0 - 4 = -4 \leq 0$. L'origine convient.

Conclusion. Les solutions forment le demi-plan de frontière $\mathcal{D}$ qui contient O, droite comprise : c'est $y \leq -2x + 4$. On hachure l'autre côté.



La frontière 2x + y - 4 = 0 en trait plein, et en teinte le côté de l'origine : il contient toutes les solutions de 2x + y - 4 ≤ 0.

Attention : Un point test hors de la frontière

La droite $x - 2y = 0$ passe par l'origine : O ne peut pas servir de point test pour $x - 2y > 0$.

Prends $(1, 0)$: $1 - 0 = 1 > 0$, son demi-plan convient. L'inégalité est stricte : les points de la droite sont exclus.

Propriété : Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet

Le plan est rapporté à un repère. Soit $\mathcal{P}$ une région du plan non vide, formée des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient un système d'inéquations **larges** ($\leq$ ou $\geq$) du premier degré à deux inconnues, et limitée par un polygone, côtés compris. Soit λ et μ deux réels.

Parmi les points $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$, l'expression $\lambda x + \mu y$ prend sa **plus grande valeur** et sa **plus petite valeur** en des **sommets** du polygone.

Remarque

Ce résultat est admis.

Méthode : un problème de programmation linéaire

1. **Nomme** les deux inconnues et écris chaque contrainte sous forme d'inéquation. N'oublie ni $x \geq 0$ ni $y \geq 0$.
2. **Représente** la région des solutions et calcule chaque sommet en résolvant le système de ses deux droites.
3. **Écris** la quantité à rendre maximale ou minimale sous la forme $\lambda x + \mu y$.
4. **Compare** ses valeurs aux sommets, puis réponds par une phrase sur la situation.

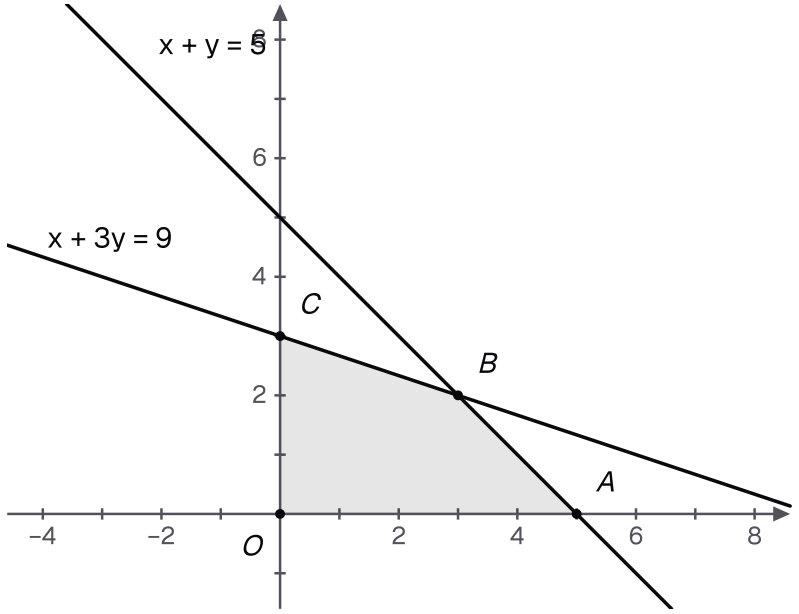
Exemple

Énoncé. La région $\mathcal{P}$ est définie par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 5$ et $x + 3y \leq 9$. Cherche la plus grande valeur de $2x + 5y$ sur $\mathcal{P}$.

Sommets. $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $C(0, 3)$, et B où se coupent $x + y = 5$ et $x + 3y = 9$. En soustrayant, $2y = 4$: $B(3, 2)$.

Valeurs. En O : 0. En A : 10. En B : $6 + 10 = 16$. En C : 15.

Conclusion. La plus grande valeur est 16, atteinte en $B(3, 2)$.



La région P, teintée, a quatre sommets : O, A et C sur les axes, et B à la rencontre des droites x + y = 5 et x + 3y = 9.

Quelle méthode pour quelle question ?

Méthode : Quelle méthode pour quelle question ?

- **Valeur absolue** : deux cas annoncés, ou une double inégalité.
- **Paramètre** : un cas où le coefficient de x est nul, un cas où il ne l'est pas.
- **Second degré simple** : facteur commun, carré isolé, identité remarquable ou racine évidente.
- **Second degré général** : le discriminant, puis la factorisation.
- **Puissances 4 et 2** : le changement d'inconnue $X = x^2$.
- **Signe ou inéquation** : le tableau de signes et le signe de a.
- **Système** : le déterminant, puis la position des deux droites.
- **Région du plan** : la droite frontière et un point test.
- **Meilleure valeur** : les sommets de la région.

Discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Deux solutions si le discriminant est strictement positif

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Racine double si le discriminant est nul

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Factorisation si le discriminant est strictement positif

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Valeur absolue, c strictement positif

$$|A| \leq c \Leftrightarrow -c \leq A \leq c$$

Déterminant d'un système

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Solution si le déterminant n'est pas nul

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, annonce chaque cas avant de le traiter, puis réunis les réponses.

Écris toujours l'ensemble S, même vide. Vérifie une solution dans l'équation de départ.

Pour une région, décris la frontière, le point test et les sommets, puis fais la figure sur ton cahier.