BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Niveau examen	5

Exercice 1 — 5 pts

Un polynôme de degré trois et son signe

Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. — 0,5 pts

Calculer $P(1)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?

INDICE

Outil : un réel qui annule un polynôme est une racine ; pense au chapitre « Les polynômes ».

2. — 1 pts

Déterminer les réels b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$.

INDICE

Début : développe $(x-1)(x^2 + bx + c)$. **Ensuite :** identifie les coefficients de x^2, puis le terme constant, avec ceux de $P(x)$.

3. — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Début : règle du produit nul. **Ensuite :** calcule le discriminant de $x^2 - x - 6$.

4. — 1,5 pts

Dresser le tableau de signes de $P(x)$, puis résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

INDICE

Début : une ligne pour $x - 1$, une pour $x^2 - x - 6$, dont le coefficient a vaut 1. **Ensuite :** la règle des signes donne la dernière ligne.

5. — 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $t^6 - 2t^4 - 5t^2 + 6 = 0$, d'inconnue réelle t.

INDICE

Outil : pose $X = t^2$, avec $X \geq 0$, et reconnais $P(X)$.

Exercice 2 5 pts

Deux agences de location de voitures

Pour louer une voiture pour la journée, l'agence A demande 200 DH plus 2 DH par kilomètre parcouru, et l'agence B demande 80 DH plus 3 DH par kilomètre. On note x le nombre de kilomètres parcourus et y le prix payé, en dirhams.

1. 1 pts

Exprimer y en fonction de x pour chaque agence, puis écrire le système qui traduit « les deux agences demandent le même prix ».

INDICE

Début : écris $y = \ldots$ pour chaque agence. **Ensuite :** passe les termes en x dans le premier membre.

2. 0,5 pts

Calculer le déterminant D de ce système. Combien a-t-il de solutions ?

INDICE

Outil : $D = ab' - a'b$, avec $a = -2, b = 1, a' = -3, b' = 1$.

3. 1 pts

Calculer D_x et D_y, puis la solution du système. Vérifier le résultat.

INDICE

Outil : $D_x = cb' - c'b$ et $D_y = ac' - a'c$, puis $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$.

4. 0,5 pts

Dans un repère du plan, on trace les droites $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ d'équations $y = 2x + 200$ et $y = 3x + 80$. Que représente la solution trouvée pour ces droites, puis pour la situation ?

INDICE

Outil : la propriété « Système et position relative de deux droites ».

5. 1 pts

Une agence C demande 150 DH plus 2 DH par kilomètre. Écrire le système qui traduit « A et C demandent le même prix ». Calculer son déterminant, puis conclure.

INDICE

Début : le système s'écrit comme à la question 1. **Ensuite :** si le déterminant est nul, compare les deux équations.

6. 1 pts

En déduire, selon le nombre de kilomètres, l'agence la moins chère entre A et B. Quel est le meilleur choix pour 200 km ?

INDICE

Outil : l'agence A est moins chère quand son prix est inférieur à celui de B ; compare $2x + 200$ et $3x + 80$.

Exercice 3 — 5 pts

Un régime avec deux aliments au moindre coût

Un sportif compose ses repas avec deux aliments F et G. Une portion de F apporte 2 unités de protéines et 1 unité de vitamines ; une portion de G apporte 1 unité de protéines et 3 unités de vitamines. Chaque jour, il lui faut au moins 8 unités de protéines et au moins 9 unités de vitamines. Son stock lui permet de prendre au plus 6 portions de chaque aliment. Une portion de F coûte 5 DH et une portion de G coûte 4 DH.

On note x et y les nombres de portions de F et de G. Le plan est rapporté à un repère orthonormé ; fais la figure sur ton cahier.

1. — 1 pts

Traduire les contraintes par un système d'inéquations d'inconnues x et y.

INDICE

Début : une inéquation pour les protéines, une pour les vitamines. **Ensuite :** ajoute les limites du stock et la positivité.

2. — 1 pts

Tracer les droites $\mathcal{D}_1 : 2x + y = 8$ et $\mathcal{D}_2 : x + 3y = 9$. À l'aide d'un point test, dire de quel côté de chaque droite se trouvent les solutions.

INDICE

Début : deux points par droite. **Ensuite :** teste l'origine, qui n'est sur aucune des deux droites.

3. — 1,25 pts

La région des solutions est un quadrilatère. Calculer les coordonnées du sommet A commun à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, puis celles des sommets B, C et E situés sur les droites d'équations $y = 6$ et $x = 6$.

INDICE

Début : pour A, résous le système de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par le déterminant. **Ensuite :** les trois autres sommets sont sur les droites $y = 6$ et $x = 6$.

4. — 0,75 pts

Exprimer le coût K d'une journée en fonction de x et y, puis calculer sa valeur en chaque sommet.

INDICE

Outil : chaque portion de F coûte 5 DH, chaque portion de G 4 DH.

5. — 1 pts

En déduire le coût minimal et la composition des repas correspondante. Contrôler avec le point $(2, 4)$ de la région.

INDICE

Outil : la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet ».

Exercice 4 5 pts

Un trinôme, sa forme canonique et une valeur absolue

Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^2 - 8x + 12$.

1. 0,75 pts

Écrire $P(x)$ sous forme canonique.

INDICE

Outil : $x^2 - 8x$ est le début du développement de $(x-4)^2$; compare les deux.

2. 0,75 pts

En déduire, sans calculer de discriminant, une factorisation de $P(x)$, puis les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : $4 = 2^2$; reconnais l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

3. 1 pts

Dresser le tableau de signes de $P(x)$, puis résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

INDICE

Début : le coefficient de x^2 vaut 1 et les racines sont 2 et 6. **Ensuite :** l'inégalité est large, les racines sont des solutions.

4. 1,25 pts

En déduire de la question 1 que l'équation $P(x) = 0$ équivaut à $|x-4| = 2$. Résoudre cette équation, puis l'inéquation $|x-4| \leq 2$, et comparer avec les questions 2 et 3.

INDICE

Début : $P(x) = 0$ équivaut à $(x-4)^2 = 4$; isole le carré. **Ensuite :** pour $c > 0$, $|A| = c$ équivaut à $A = c$ ou $A = -c$, et $|A| \leq c$ équivaut à $-c \leq A \leq c$.

5. 1,25 pts

Résoudre l'inéquation $P(x) \leq x - 2$. En déduire les réels x pour lesquels $0 \leq P(x) \leq x - 2$.

INDICE

Début : d'après la question 2, $P(x) - (x-2) = (x-2)(x-6) - (x-2)$; mets $x-2$ en facteur. **Ensuite :** parmi les solutions trouvées, garde celles pour lesquelles $P(x) \geq 0$, à l'aide de la question 3.

Exercice 5 5 pts

Un système à paramètre et un point commun à des droites

Pour tout réel m, on considère le système (S_m), d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + my = 9 - m \end{cases}$$

Dans un repère du plan, on note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - y = 4$ et $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $3x + my = 9 - m$.

1. 0,75 pts

Résoudre par la méthode du déterminant le système (S_0), obtenu pour $m = 0$.

INDICE

Début : pour $m = 0$, la seconde équation s'écrit $3x = 9$, avec $b' = 0$. **Ensuite :** $D = ab' - a'b$, $D_x = cb' - c'b$ et $D_y = ac' - a'c$.

2. 0,75 pts

Calculer, en fonction de m, le déterminant D de (S_m). Pour quelles valeurs de m le système a-t-il une unique solution ?

INDICE

Outil : ici $a = 1, b = -1, a' = 3$ et $b' = m$; pense au théorème « Système de déterminant non nul ».

3. 1,25 pts

On suppose $m \neq -3$. Calculer D_x et D_y en fonction de m, puis en déduire la solution de (S_m). Que remarque-t-on ?

INDICE

Début : $c = 4$ et $c' = 9 - m$. **Ensuite :** factorise D_x et D_y par $m + 3$ avant de diviser par D.

4. 1 pts

On suppose $m = -3$. Écrire le système (S_{-3}). À l'aide d'un point de $\mathcal{D}$, dire si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{-3}$ sont strictement parallèles ou confondues, puis donner les solutions du système.

INDICE

Début : $D = 0$, donc les deux droites sont parallèles. **Ensuite :** le point $(4, 0)$ est sur $\mathcal{D}$; teste-le dans la seconde équation.

5. 1,25 pts

Déduire des questions 3 et 4 un point A commun à toutes les droites $\mathcal{D}_m$, puis le vérifier par le calcul. Déterminer ensuite le réel m pour lequel $\mathcal{D}_m$ passe par le point $B(2,2)$, et préciser la position de cette droite par rapport à $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : le couple $(3,-1)$ vérifie les deux équations quand $m \neq -3$, et $\mathcal{D}_{-3}$ est la droite $\mathcal{D}$. **Ensuite :** pour B, remplace x et y par 2 dans l'équation de $\mathcal{D}_m$; tu obtiens une équation du premier degré d'inconnue m.