BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Un polynôme de degré trois et son signe

Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. 0,5 pts

Calculer $P(1)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?

INDICE

Outil : un réel qui annule un polynôme est une racine ; pense au chapitre « Les polynômes ».

CORRIGÉ

Calcul.

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 - 2 - 5 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conséquence. Le réel 1 annule P : c'est une racine de P. D'après le chapitre « Les polynômes », un polynôme qui admet 1 pour racine se factorise par $x - 1$: il existe un polynôme Q de degré 2 tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

2. 1 pts

Déterminer les réels b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x - 1)(x^2 + bx + c)$.

INDICE

Début : développe $(x - 1)(x^2 + bx + c)$. **Ensuite :** identifie les coefficients de x^2, puis le terme constant, avec ceux de $P(x)$.

CORRIGÉ

Développement. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &(x - 1)(x^2 + bx + c) \\ &= x^3 + (b - 1)x^2 \\ &\quad + (c - b)x - c \end{aligned}$$

Identification. Deux polynômes égaux ont les mêmes coefficients. On compare avec $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$:

- coefficient de x^2 : $b - 1 = -2$, donc $b = -1$;
- terme constant : $-c = 6$, donc $c = -6$;
- contrôle sur le coefficient de x : $c - b = -6 + 1 = -5$.

Conclusion. $b = -1$ et $c = -6$: pour tout réel x, $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

3. 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Début : règle du produit nul. **Ensuite :** calcule le discriminant de $x^2 - x - 6$.

CORRIGÉ

Produit nul. D'après la question 2 et la règle du produit nul, $P(x) = 0$ équivaut à $x - 1 = 0$ ou $x^2 - x - 6 = 0$.

Équation du second degré. Pour $x^2 - x - 6$, on a $a = 1, b = -1$ et $c = -6$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-1)^2 \\ &\quad - 4 \times 1 \times (-6) \\ &= 1 + 24 = 25\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, d'après le théorème « Résolution de l'équation du second degré », les solutions sont :

$$x_1 = \frac{1 - 5}{2} = -2$$
$$x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

Conclusion. $S = \{-2, 1, 3\}$.

4. 1,5 pts

Dresser le tableau de signes de $P(x)$, puis résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

INDICE

Début : une ligne pour $x - 1$, une pour $x^2 - x - 6$, dont le coefficient a vaut 1. **Ensuite :** la règle des signes donne la dernière ligne.

CORRIGÉ

Signe des facteurs.

- $x - 1 < 0$ si $x < 1$, et $x - 1 > 0$ si $x > 1$.
- $x^2 - x - 6$ a pour racines -2 et 3, et son coefficient a vaut $1 > 0$. Le théorème « Signe d'un trinôme du second degré » s'applique : $x^2 - x - 6 > 0$ sur $]-\infty, -2[$ et sur $]3, +\infty[$, et $x^2 - x - 6 < 0$ sur $]-2, 3[$.

Tableau de signes. La règle des signes d'un produit donne le signe de $P(x)$:

- sur $]-\infty, -2[$: $x - 1 < 0$ et $x^2 - x - 6 > 0$, donc $P(x) < 0$;
- sur $]-2, 1[$: les deux facteurs sont négatifs, donc $P(x) > 0$;
- sur $]1, 3[$: $x - 1 > 0$ et $x^2 - x - 6 < 0$, donc $P(x) < 0$;
- sur $]3, +\infty[$: les deux facteurs sont positifs, donc $P(x) > 0$.

$P(x)$ est nul en -2, 1 et 3.

Conclusion. On garde les intervalles où $P(x) > 0$ et les trois racines : $P(x) \geq 0$ pour $x \in [-2, 1] \cup [3, +\infty[$.

5. 1 pts

En déduire les solutions de l'équation $t^6 - 2t^4 - 5t^2 + 6 = 0$, d'inconnue réelle t.

INDICE

Outil : pose $X = t^2$, avec $X \geq 0$, et reconnais $P(X)$.

CORRIGÉ

Changement d'inconnue. On pose $X = t^2$, avec $X \geq 0$. Alors $t^4 = X^2$ et $t^6 = X^3$: l'équation s'écrit $X^3 - 2X^2 - 5X + 6 = 0$, c'est-à-dire $P(X) = 0$.

Valeurs de X. D'après la question 3, $X = -2$, $X = 1$ ou $X = 3$. Un carré n'est jamais strictement négatif : on écarte $X = -2$.

Retour à t. $t^2 = 1$ équivaut à $t = -1$ ou $t = 1$; $t^2 = 3$ équivaut à $t = -\sqrt{3}$ ou $t = \sqrt{3}$.

Conclusion. $S = \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$.

Exercice 2 5 pts

Deux agences de location de voitures

Pour louer une voiture pour la journée, l'agence A demande 200 DH plus 2 DH par kilomètre parcouru, et l'agence B demande 80 DH plus 3 DH par kilomètre. On note x le nombre de kilomètres parcourus et y le prix payé, en dirhams.

1. 1 pts

Exprimer y en fonction de x pour chaque agence, puis écrire le système qui traduit « les deux agences demandent le même prix ».

INDICE

Début : écris $y = \dots$ pour chaque agence. **Ensuite :** passe les termes en x dans le premier membre.

CORRIGÉ

Prix. Pour x kilomètres, l'agence A demande $y = 2x + 200$ et l'agence B demande $y = 3x + 80$, en dirhams.

Système. Les deux agences demandent le même prix y pour x kilomètres exactement lorsque le couple (x, y) vérifie ces deux égalités. On passe les termes en x dans le premier membre :

$$\begin{cases} -2x + y = 200 \\ -3x + y = 80 \end{cases}$$

2. 0,5 pts

Calculer le déterminant D de ce système. Combien a-t-il de solutions ?

INDICE

Outil : $D = ab' - a'b$, avec $a = -2, b = 1, a' = -3, b' = 1$.

CORRIGÉ

Avec $a = -2, b = 1, a' = -3$ et $b' = 1$:

$$\begin{aligned} D &= (-2) \times 1 - (-3) \times 1 \\ &= -2 + 3 = 1 \end{aligned}$$

Conclusion. $D \neq 0$: d'après le théorème « Système de déterminant non nul », le système a une unique solution.

3. 1 pts

Calculer D_x et D_y, puis la solution du système. Vérifier le résultat.

INDICE

Outil : $D_x = cb' - c'b$ et $D_y = ac' - a'c$, puis $x = \dfrac{D_x}{D}$ et $y = \dfrac{D_y}{D}$.

CORRIGÉ

Déterminants. Avec $c = 200$ et $c' = 80$:

$$\begin{aligned} D_x &= 200 \times 1 - 80 \times 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= (-2) \times 80 \\ &\quad - (-3) \times 200 \\ &= -160 + 600 = 440 \end{aligned}$$

Solution. D'après le théorème « Système de déterminant non nul » :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{120}{1} = 120$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{440}{1} = 440$$

Vérification. $-2 \times 120 + 440 = 200$ et $-3 \times 120 + 440 = 80$.

Conclusion. Le système a pour unique solution le couple $(120, 440)$.

4. 0,5 pts

Dans un repère du plan, on trace les droites $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ d'équations $y = 2x + 200$ et $y = 3x + 80$. Que représente la solution trouvée pour ces droites, puis pour la situation ?

INDICE

Outil : la propriété « Système et position relative de deux droites ».

CORRIGÉ

Droites. Le système de la question 1 est formé des équations de $\mathcal{D}_A$ et de $\mathcal{D}_B$, et son déterminant $D = 1$ n'est pas nul. Avec la propriété « Système et position relative de deux droites », on en déduit que $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$ sont sécantes, au point de coordonnées $(120, 440)$.

Situation. Pour 120 km parcourus, les deux agences demandent le même prix : 440 DH.

5. 1 pts

Une agence C demande 150 DH plus 2 DH par kilomètre. Écrire le système qui traduit « A et C demandent le même prix ». Calculer son déterminant, puis conclure.

INDICE

Début : le système s'écrit comme à la question 1. **Ensuite :** si le déterminant est nul, compare les deux équations.

CORRIGÉ

Système. L'agence C demande $y = 2x + 150$. Comme à la question 1 :

$$\begin{cases} -2x + y = 200 \\ -2x + y = 150 \end{cases}$$

Déterminant.

$$\begin{aligned} D &= (-2) \times 1 - (-2) \times 1 \\ &= -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Le déterminant étant nul, la propriété « Système et position relative de deux droites » montre que les droites $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_C$, d'équations $y = 2x + 200$ et $y = 2x + 150$, sont parallèles.

Conclusion. Un couple (x, y) qui vérifierait les deux équations donnerait $200 = -2x + y = 150$, ce qui est faux. Les droites sont donc strictement parallèles et le système n'a aucune solution : A et C ne demandent jamais le même prix. Quel que soit le nombre de kilomètres, C est moins chère que A, de $200 - 150 = 50$ DH.

6. 1 pts

En déduire, selon le nombre de kilomètres, l'agence la moins chère entre A et B. Quel est le meilleur choix pour 200 km ?

INDICE

Outil : l'agence A est moins chère quand son prix est inférieur à celui de B ; compare $2x + 200$ et $3x + 80$.

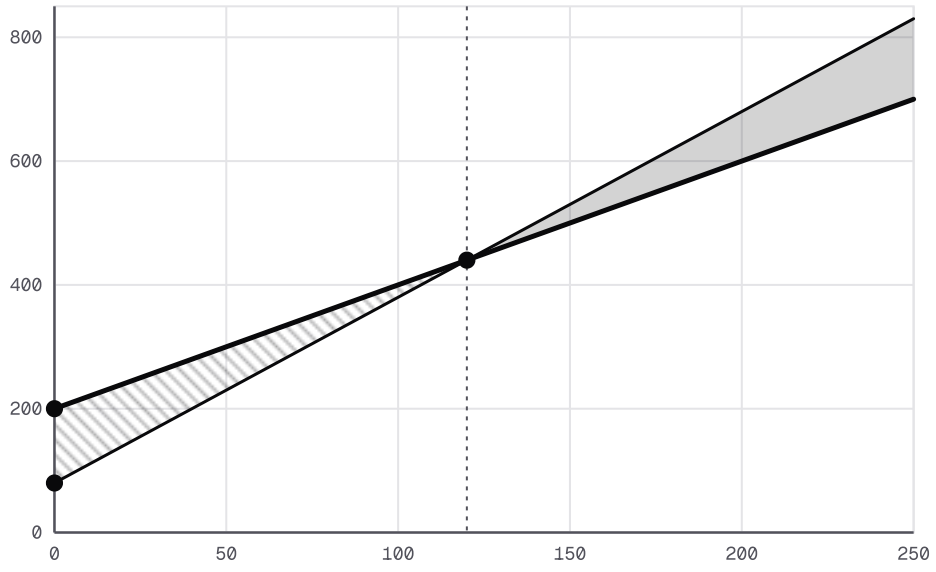
CORRIGÉ

Comparaison. Pour x kilomètres, A est moins chère que B lorsque $2x + 200 < 3x + 80$. En retranchant $2x + 80$ aux deux membres, cette inéquation équivaut à $120 < x$.

De même, $2x + 200 > 3x + 80$ équivaut à $x < 120$, et les deux prix sont égaux pour $x = 120$ (question 4).

Conclusion. L'agence B est la moins chère en dessous de 120 km, l'agence A au-delà de 120 km ; à 120 km, elles sont à égalité.

Pour 200 km. A demande $2 \times 200 + 200 = 600$ DH et B demande $3 \times 200 + 80 = 680$ DH. Comme $200 > 120$, le meilleur choix est l'agence A.



Les droites des deux agences se croisent pour 120 km : avant, la droite de B est la plus basse ; après, c'est celle de A.

Exercice 3 — 5 pts

Un régime avec deux aliments au moindre coût

Un sportif compose ses repas avec deux aliments F et G. Une portion de F apporte 2 unités de protéines et 1 unité de vitamines ; une portion de G apporte 1 unité de protéines et 3 unités de vitamines. Chaque jour, il lui faut au moins 8 unités de protéines et au moins 9 unités de vitamines. Son stock lui permet de prendre au plus 6 portions de chaque aliment. Une portion de F coûte 5 DH et une portion de G coûte 4 DH.

On note x et y les nombres de portions de F et de G. Le plan est rapporté à un repère orthonormé ; fais la figure sur ton cahier.

1. — 1 pts

Traduire les contraintes par un système d'inéquations d'inconnues x et y.

INDICE

Début : une inéquation pour les protéines, une pour les vitamines. **Ensuite :** ajoute les limites du stock et la positivité.

CORRIGÉ

Apports. Les protéines apportées valent $2x + y$ unités et les vitamines $x + 3y$ unités : il faut $2x + y \geq 8$ et $x + 3y \geq 9$.

Stock. Les nombres de portions sont positifs et au plus égaux à 6 : $0 \leq x \leq 6$ et $0 \leq y \leq 6$.

Système.

$$\begin{cases} 2x + y \geq 8 \\ x + 3y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

2. 1 pts

Tracer les droites $\mathcal{D}_1 : 2x + y = 8$ et $\mathcal{D}_2 : x + 3y = 9$. À l'aide d'un point test, dire de quel côté de chaque droite se trouvent les solutions.

INDICE

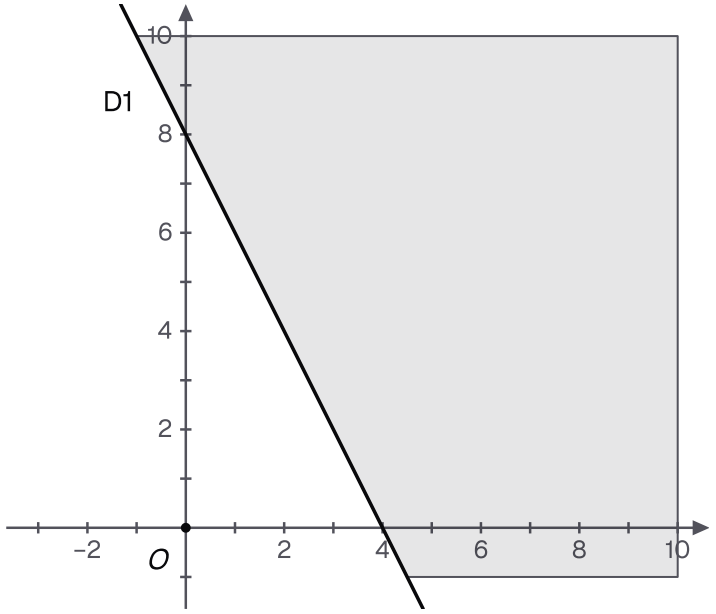
Début : deux points par droite. **Ensuite :** teste l'origine, qui n'est sur aucune des deux droites.

CORRIGÉ

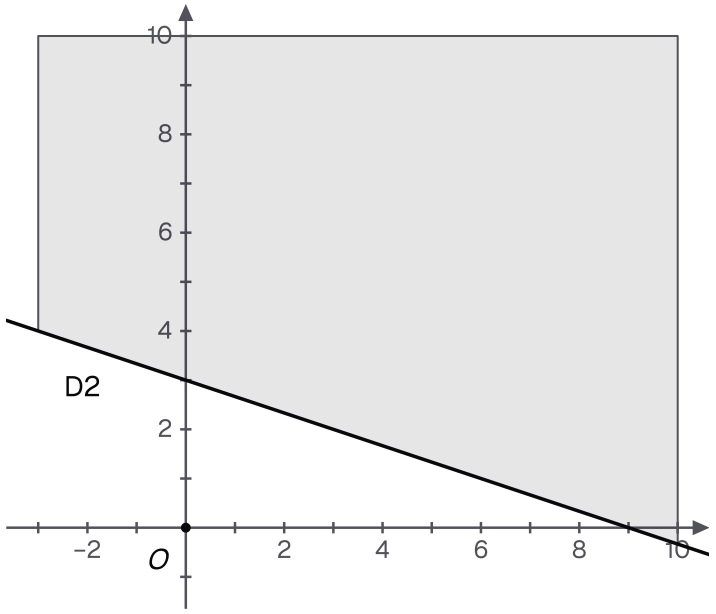
Tracés. $\mathcal{D}_1$ passe par $(4, 0)$ et $(0, 8)$; $\mathcal{D}_2$ passe par $(9, 0)$ et $(0, 3)$. Les inégalités sont larges : on trace les droites en traits pleins.

Point test. L'origine n'est sur aucune des deux droites. Pour $O(0, 0)$, l'inégalité $0 \geq 8$ est fausse, et $0 \geq 9$ aussi. D'après la propriété « Régionnement du plan par une droite », les solutions de chacune des deux inéquations sont du côté de la droite qui ne contient pas O.

On hachure, pour chaque droite, le côté qui contient O.



Pour 2x + y ≥ 8 : l'origine ne convient pas, donc les solutions sont teintées du côté de D1 opposé à O.



Pour x + 3y ≥ 9 : là encore O ne convient pas, et la partie teintée est de l'autre côté de D2.

3. 1,25 pts

La région des solutions est un quadrilatère. Calculer les coordonnées du sommet A commun à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, puis celles des sommets B, C et E situés sur les droites d'équations $y = 6$ et $x = 6$.

INDICE

Début : pour A, résous le système de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par le déterminant. **Ensuite :** les trois autres sommets sont sur les droites $y = 6$ et $x = 6$.

CORRIGÉ

Sommet A. Ses coordonnées sont la solution du système formé par $2x + y = 8$ et $x + 3y = 9$:

$$D = 2 \times 3 - 1 \times 1 = 5$$
$$D_x = 8 \times 3 - 9 \times 1 = 15$$
$$D_y = 2 \times 9 - 1 \times 8 = 10$$

Comme $D \neq 0$, d'après le théorème « Système de déterminant non nul », $x = \dfrac{15}{5} = 3$ et $y = \dfrac{10}{5} = 2$. Donc $A(3, 2)$.

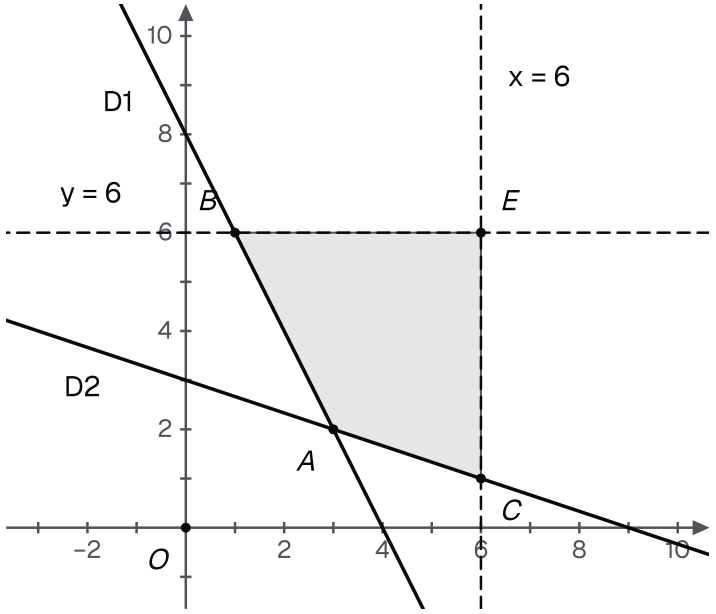
Sommets B et C. Sur $\mathcal{D}_1$ avec $y = 6$: $2x + 6 = 8$, donc $x = 1$ et $B(1, 6)$. Sur $\mathcal{D}_2$ avec $x = 6$: $6 + 3y = 9$, donc $y = 1$ et $C(6, 1)$.

Sommet E. Les droites d'équations $y = 6$ et $x = 6$ se coupent en $E(6, 6)$.

Contrôle.

- $A(3, 2)$ vérifie $0 \leq 3 \leq 6$ et $0 \leq 2 \leq 6$.
- $B(1, 6)$ vérifie $1 + 3 \times 6 = 19 \geq 9$.
- $C(6, 1)$ vérifie $2 \times 6 + 1 = 13 \geq 8$.
- $E(6, 6)$ vérifie $18 \geq 8$, $24 \geq 9$ et les limites du stock.

Conclusion. Les sommets de la région sont $B(1, 6)$, $A(3, 2)$, $C(6, 1)$ et $E(6, 6)$.



Le quadrilatère teinté BACE des repas possibles : A sur D1 et D2, B sur D1 et la droite y = 6, C sur D2 et la droite x = 6, E au coin des deux limites du stock.

4. `0,75 pts`

Exprimer le coût K d'une journée en fonction de x et y, puis calculer sa valeur en chaque sommet.

INDICE

Outil : chaque portion de F coûte 5 DH, chaque portion de G 4 DH.

CORRIGÉ

Coût. Une journée coûte $K = 5x + 4y$ dirhams.

Valeurs aux sommets.

- En $B(1, 6)$: $K = 5 + 24 = 29$.
- En $A(3, 2)$: $K = 15 + 8 = 23$.
- En $C(6, 1)$: $K = 30 + 4 = 34$.
- En $E(6, 6)$: $K = 30 + 24 = 54$.

5. 1 pts

En déduire le coût minimal et la composition des repas correspondante. Contrôler avec le point $(2, 4)$ de la région.

INDICE

Outil : la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet ».

CORRIGÉ

Valeur minimale. La région est non vide et définie par les inégalités larges de la question 1. Par la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet », la plus petite valeur de K est atteinte en l'un des sommets. La plus petite des quatre valeurs de la question 4 est 23, en $A(3, 2)$.

Conclusion. Sur la région, le coût minimal est 23 DH, avec 3 portions de F et 2 portions de G par jour.

Contrôle. Le point $(2, 4)$ est dans la région : $2 \times 2 + 4 = 8 \geq 8$, $2 + 3 \times 4 = 14 \geq 9$, $0 \leq 2 \leq 6$ et $0 \leq 4 \leq 6$. Son coût vaut $5 \times 2 + 4 \times 4 = 26$ DH, bien supérieur à 23 DH.

Exercice 4 5 pts

Un trinôme, sa forme canonique et une valeur absolue

Pour tout réel x, on pose $P(x) = x^2 - 8x + 12$.

1. 0,75 pts

Écrire $P(x)$ sous forme canonique.

INDICE

Outil : $x^2 - 8x$ est le début du développement de $(x-4)^2$; compare les deux.

CORRIGÉ

Carré à compléter. Pour tout réel x, $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$, donc $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$.

Forme canonique. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-4)^2 - 16 + 12 \\ &= (x-4)^2 - 4 \end{aligned}$$

2. 0,75 pts

En déduire, sans calculer de discriminant, une factorisation de $P(x)$, puis les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : $4 = 2^2$; reconnais l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

CORRIGÉ

Factorisation. Comme $4 = 2^2$, on applique l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ avec $A = x - 4$ et $B = 2$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P(x) \\ &= (x - 4 - 2)(x - 4 + 2) \\ &= (x-6)(x-2) \end{aligned}$$

Produit nul. D'après la règle du produit nul, $P(x) = 0$ équivaut à $x - 6 = 0$ ou $x - 2 = 0$.

Conclusion. $S = \{2, 6\}$.

3. 1 pts

Dresser le tableau de signes de $P(x)$, puis résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

INDICE

Début : le coefficient de x^2 vaut 1 et les racines sont 2 et 6. **Ensuite :** l'inégalité est large, les racines sont des solutions.

CORRIGÉ

Signe. Le trinôme $P(x)$ a pour coefficient $a = 1 > 0$ et pour racines $\alpha = 2$ et $\beta = 6$. D'après le théorème « Signe d'un trinôme du second degré » :

- $P(x) > 0$ sur $]-\infty, 2[$ et sur $]6, +\infty[$;
- $P(x) < 0$ sur $]2, 6[$;
- $P(2) = P(6) = 0$.

Inéquation. L'inégalité $P(x) \leq 0$ est large : on garde l'intervalle où $P(x)$ est strictement négatif et les deux racines, où il est nul.

Conclusion. $S = [2, 6]$.

4. 1,25 pts

En déduire de la question 1 que l'équation $P(x) = 0$ équivaut à $|x - 4| = 2$. Résoudre cette équation, puis l'inéquation $|x - 4| \leq 2$, et comparer avec les questions 2 et 3.

INDICE

Début : $P(x) = 0$ équivaut à $(x - 4)^2 = 4$; isole le carré. **Ensuite :** pour $c > 0$, $|A| = c$ équivaut à $A = c$ ou $A = -c$, et $|A| \leq c$ équivaut à $-c \leq A \leq c$.

CORRIGÉ

Équivalence. D'après la question 1, pour tout réel x, $P(x) = 0$ équivaut à $(x - 4)^2 = 4$, soit $(x - 4)^2 = 2^2$. Deux réels ont le même carré si et seulement s'ils sont égaux ou opposés : cela équivaut à $x - 4 = 2$ ou $x - 4 = -2$, c'est-à-dire à $|x - 4| = 2$.

Équation. Le second membre 2 est strictement positif : $|x - 4| = 2$ équivaut à $x - 4 = 2$ ou $x - 4 = -2$, soit $x = 6$ ou $x = 2$. On retrouve $S = \{2, 6\}$, comme à la question 2.

Inéquation. D'après la propriété de la valeur absolue, $|x - 4| \leq 2$ équivaut à $-2 \leq x - 4 \leq 2$. En ajoutant 4 aux trois membres : $2 \leq x \leq 6$.

Conclusion. L'inéquation $|x - 4| \leq 2$ a pour ensemble de solutions $[2, 6]$: c'est l'ensemble trouvé pour $P(x) \leq 0$ à la question 3. Les deux méthodes concordent.

5. 1,25 pts

Résoudre l'inéquation $P(x) \leq x - 2$. En déduire les réels x pour lesquels $0 \leq P(x) \leq x - 2$.

INDICE

Début : d'après la question 2, $P(x) - (x-2) = (x-2)(x-6) - (x-2)$; mets $x-2$ en facteur. **Ensuite :** parmi les solutions trouvées, garde celles pour lesquelles $P(x) \geq 0$, à l'aide de la question 3.

CORRIGÉ

Factorisation. D'après la question 2, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &P(x) - (x-2) \\ &= (x-2)(x-6) \\ &\quad - (x-2) \\ &= (x-2)(x-6-1) \\ &= (x-2)(x-7) \end{aligned}$$

Inéquation. $P(x) \leq x - 2$ équivaut à $P(x) - (x-2) \leq 0$, soit $(x-2)(x-7) \leq 0$. Ce produit est un trinôme de racines 2 et 7, de coefficient $a = 1 > 0$: d'après le théorème « Signe d'un trinôme du second degré », il est négatif ou nul exactement sur $[2, 7]$. Donc $S = [2, 7]$.

Double inégalité. On cherche les réels de $[2, 7]$ pour lesquels, de plus, $P(x) \geq 0$. D'après la question 3, $P(x) \geq 0$ équivaut à $x \leq 2$ ou $x \geq 6$. Parmi les réels de $[2, 7]$, il reste 2 et les réels de $[6, 7]$.

Conclusion. Les réels cherchés forment l'ensemble $S' = \{2\} \cup [6, 7]$.

Contrôle. $P(7) = 49 - 56 + 12 = 5 = 7 - 2$ et $P(6) = 0 \leq 4$.

Exercice 5 5 pts

Un système à paramètre et un point commun à des droites

Pour tout réel m, on considère le système (S_m), d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + my = 9 - m \end{cases}$$

Dans un repère du plan, on note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x - y = 4$ et $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $3x + my = 9 - m$.

1. 0,75 pts

Résoudre par la méthode du déterminant le système (S_0), obtenu pour $m = 0$.

INDICE

Début : pour $m = 0$, la seconde équation s'écrit $3x = 9$, avec $b' = 0$. **Ensuite :** $D = ab' - a'b$, $D_x = cb' - c'b$ et $D_y = ac' - a'c$.

CORRIGÉ

Coefficients. Pour $m = 0$, la seconde équation s'écrit $3x + 0 \times y = 9$:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x = 9 \end{cases}$$

Ainsi $a = 1, b = -1, c = 4, a' = 3, b' = 0$ et $c' = 9$.

Déterminants.

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 0 - 3 \times (-1) = 3 \\ D_x &= 4 \times 0 - 9 \times (-1) = 9 \\ D_y &= 1 \times 9 - 3 \times 4 = -3 \end{aligned}$$

Solution. Comme $D \neq 0$, d'après le théorème « Système de déterminant non nul », $x = \dfrac{9}{3} = 3$ et $y = \dfrac{-3}{3} = -1$.

Contrôle. $3 - (-1) = 4$ et $3 \times 3 = 9$.

Conclusion. $S = \{(3, -1)\}$.

2. 0,75 pts

Calculer, en fonction de m, le déterminant D de (S_m). Pour quelles valeurs de m le système a-t-il une unique solution ?

INDICE

Outil : ici $a = 1, b = -1, a' = 3$ et $b' = m$; pense au théorème « Système de déterminant non nul ».

CORRIGÉ

Déterminant. Avec $a = 1, b = -1, a' = 3$ et $b' = m$:

$$\begin{aligned} D &= 1 \times m - 3 \times (-1) \\ &= m + 3 \end{aligned}$$

Cas.

- Si $m \neq -3$, alors $D \neq 0$: d'après le théorème « Système de déterminant non nul », (S_m) a une unique solution.
- Si $m = -3$, alors $D = 0$: ce cas est étudié à la question 4.

Conclusion. Le système (S_m) a une unique solution pour tout réel $m \neq -3$; la question 4 montre que ce n'est pas le cas pour $m = -3$.

3. 1,25 pts

On suppose $m \neq -3$. Calculer D_x et D_y en fonction de m, puis en déduire la solution de (S_m). Que remarque-t-on ?

INDICE

Début : $c = 4$ et $c' = 9 - m$. **Ensuite :** factorise D_x et D_y par $m + 3$ avant de diviser par D.

CORRIGÉ

Déterminants. Ici $c = 4$ et $c' = 9 - m$:

$$\begin{aligned} D_x &= 4 \times m \\ &\quad - (9 - m) \times (-1) \\ &= 4m + 9 - m \\ &= 3(m + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= 1 \times (9 - m) - 3 \times 4 \\ &= -3 - m \\ &= -(m + 3) \end{aligned}$$

Solution. Comme $m \neq -3$, le déterminant $D = m + 3$ n'est pas nul. D'après le théorème « Système de déterminant non nul » :

$$\begin{aligned} x &= \frac{3(m+3)}{m+3} = 3 \\ y &= \frac{-(m+3)}{m+3} = -1 \end{aligned}$$

Remarque. La solution ne dépend pas de m : pour tout réel $m \neq -3$, $S = \{(3, -1)\}$, comme pour $m = 0$ à la question 1.

4. 1 pts

On suppose $m = -3$. Écrire le système (S_{-3}). À l'aide d'un point de $\mathcal{D}$, dire si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{-3}$ sont strictement parallèles ou confondues, puis donner les solutions du système.

INDICE

Début : $D = 0$, donc les deux droites sont parallèles. **Ensuite :** le point $(4, 0)$ est sur $\mathcal{D}$; teste-le dans la seconde équation.

CORRIGÉ

Système. Pour $m = -3$, on a $9 - m = 12$, et (S_{-3}) s'écrit :

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

Position des droites. D'après la question 2, $D = 0$: les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_{-3}$ sont parallèles (propriété « Système et position relative de deux droites »), strictement parallèles ou confondues.

Point test. Le point $(4, 0)$ est sur $\mathcal{D}$, car $4 - 0 = 4$. Il est aussi sur $\mathcal{D}_{-3}$, car $3 \times 4 - 3 \times 0 = 12$. Deux droites parallèles qui ont un point commun sont confondues. Les deux droites sont donc confondues : la seconde équation est la première multipliée par 3.

Solutions. Le système équivaut à la seule équation $x - y = 4$, c'est-à-dire $y = x - 4$. Ses solutions sont les couples $(x, x - 4)$, où x est un réel quelconque : il y en a une infinité.

5. 1,25 pts

Déduire des questions 3 et 4 un point A commun à toutes les droites $\mathcal{D}_m$, puis le vérifier par le calcul. Déterminer ensuite le réel m pour lequel $\mathcal{D}_m$ passe par le point $B(2,2)$, et préciser la position de cette droite par rapport à $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : le couple $(3,-1)$ vérifie les deux équations quand $m \neq -3$, et $\mathcal{D}_{-3}$ est la droite $\mathcal{D}$. **Ensuite :** pour B, remplace x et y par 2 dans l'équation de $\mathcal{D}_m$; tu obtiens une équation du premier degré d'inconnue m.

CORRIGÉ

Point commun. D'après la question 3, pour tout réel $m \neq -3$, le couple $(3,-1)$ est solution de (S_m) : le point $(3,-1)$ est sur $\mathcal{D}_m$. D'après la question 4, $\mathcal{D}_{-3}$ est la droite $\mathcal{D}$, qui contient aussi ce point, car $3-(-1)=4$.

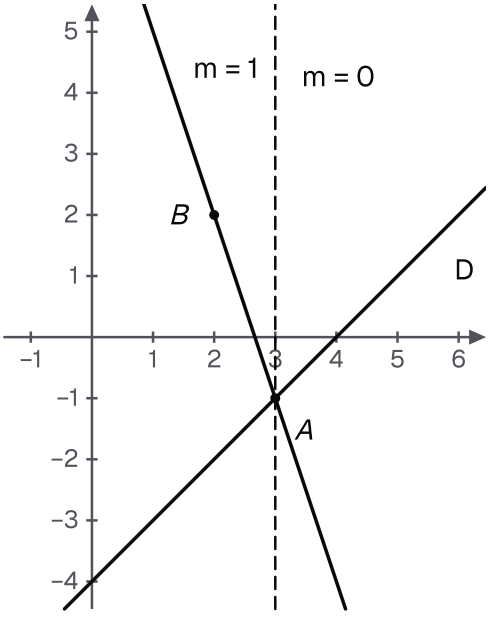
Vérification. En remplaçant x par 3 et y par -1 dans l'équation de $\mathcal{D}_m$, on obtient, pour tout réel m :

$$3 \times 3 + m \times (-1) = 9 - m$$

Cette égalité est vraie pour tout réel m. Toutes les droites $\mathcal{D}_m$ passent donc par $A(3,-1)$.

Droite passant par B. La droite $\mathcal{D}_m$ passe par $B(2,2)$ si et seulement si $3 \times 2 + m \times 2 = 9 - m$. Or $3 \times 2 + 2m = 9 - m$ équivaut à $3m = 3$, soit $m = 1$.

Position. La droite $\mathcal{D}_1$ a pour équation $3x + y = 8$. Comme $1 \neq -3$, le déterminant vaut $D = 1 + 3 = 4$ et n'est pas nul : la propriété « Système et position relative de deux droites » assure que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}$ sont sécantes. Leur point commun est $A(3,-1)$; contrôle : $3 \times 3 + (-1) = 8$.



Les droites Dm obtenues pour m = -3 (c'est la droite D), pour m = 0 et pour m = 1 passent toutes par A(3, -1) ; celle obtenue pour m = 1 passe aussi par B(2, 2).