BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Entraînement	7

Exercice 1

Deux inéquations avec une valeur absolue, puis leur intersection

Dans cet exercice, x désigne un réel.

1.

Résoudre l'inéquation $|2x - 3| \leq 5$.

INDICE

Outil : pour $c > 0$, $|A| \leq c$ équivaut à $-c \leq A \leq c$.

2.

Résoudre l'inéquation $|x + 1| > 2$.

INDICE

Outil : $|A| > c$ équivaut à $A < -c$ ou $A > c$. Annonce les deux cas, puis réunis-les.

3.

En déduire l'ensemble des réels qui vérifient à la fois les deux inéquations.

INDICE

Outil : place S_1 et S_2 sur une même droite graduée et cherche leur partie commune.

Exercice 2

Trois équations avec x puissance 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes en posant $X = x^2$.

1.

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

INDICE

Début : écris l'équation en X, avec $X \geq 0$. **Ensuite :** calcule son discriminant.

2.

$2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$.

INDICE

Outil : même méthode ; pense à écarter une valeur de X strictement négative.

3.

$x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

INDICE

Outil : cherche une racine évidente de l'équation en X.

Exercice 3

Une inéquation avec un quotient

On considère l'inéquation (I) : $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} \geq 0$, d'inconnue réelle x.

1.

Donner la valeur interdite, puis factoriser le numérateur $x^2 - x - 2$.

INDICE

Début : le dénominateur ne doit pas être nul. **Ensuite :** essaie $x = -1$ dans le numérateur.

2.

Étudier le signe du quotient $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ sur chaque intervalle.

INDICE

Outil : un tableau avec une ligne pour le numérateur et une pour le dénominateur ; la valeur 3 porte une double barre.

3.

En déduire l'ensemble des solutions de (I), puis celui de l'inéquation stricte $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3} < 0$.

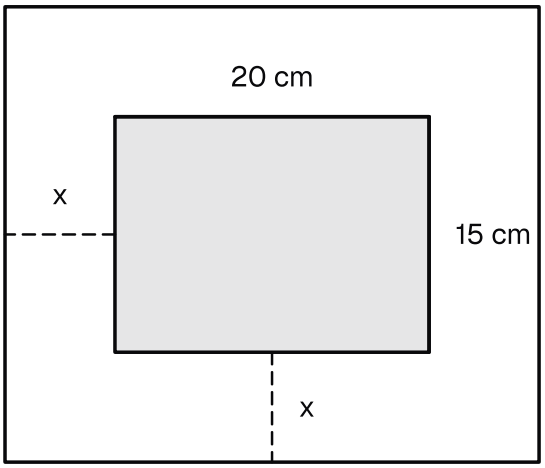
INDICE

Outil : relis le tableau de la question 2. Pour l'inégalité large, que fais-tu des racines du numérateur, et de la valeur interdite ?

Exercice 4

Le cadre d'une photo

Une photo rectangulaire mesure 20 cm sur 15 cm. On l'entoure d'un cadre de largeur constante x cm, avec $x > 0$. La photo et son cadre forment un grand rectangle.



La photo de 20 cm sur 15 cm, entourée d'un cadre de même largeur x tout autour : ensemble, ils forment le grand rectangle.

1.

Exprimer en fonction de x l'aire du grand rectangle, sous forme développée.

INDICE

Outil : le cadre ajoute x de chaque côté, donc $2x$ à chaque dimension.

2.

On veut que le grand rectangle ait une aire de 500 cm². Écrire l'équation obtenue sous la forme $2x^2 + 35x - 100 = 0$, puis trouver la largeur du cadre.

INDICE

Début : retranche 500, puis divise par 2. **Ensuite :** calcule le discriminant et garde la solution positive.

3.

La baguette du cadre est coûteuse : on veut que l'aire du cadre seul ne dépasse pas 36 cm². Quelles largeurs x conviennent ?

INDICE

Début : l'aire du cadre seul est l'aire du grand rectangle moins celle de la photo. **Ensuite :** écris l'inéquation, passe tout dans un membre et divise par 2.

Exercice 5

Le sucre d'un mélange de deux jus

Un litre de jus d'orange contient 80 g de sucre, un litre de jus de mangue en contient 120 g. Un cuisinier verse 20 litres d'un mélange des deux jus dans une fontaine. Une analyse indique que ce mélange contient en tout 1960 g de sucre. On note x et y les volumes, en litres, de jus d'orange et de jus de mangue.

1.

Traduire la situation par un système de deux équations, puis le résoudre par la méthode du déterminant.

INDICE

Début : une équation pour le volume, une pour la masse de sucre. **Ensuite :** calcule D, puis D_x et D_y.

2.

Le plan est rapporté à un repère. Interpréter ce résultat à l'aide des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations $x + y - 20 = 0$ et $80x + 120y - 1960 = 0$.

INDICE

Outil : la propriété « Système et position relative de deux droites ».

3.

On veut maintenant 20 litres d'un mélange de deux autres jus, qui contiennent tous deux 90 g de sucre par litre, avec 2000 g de sucre en tout. Écrire le système correspondant et justifier, par le déterminant puis un point test, que cette demande est impossible.

INDICE

Début : écris le système, puis calcule le déterminant ; que peux-tu dire des droites s'il est nul ? **Ensuite :** choisis un point simple de la première droite et teste-le dans la seconde équation.

Exercice 6

Une région à cinq sommets : plus petite et plus grande valeur

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On considère le système d'inéquations

$$(\Sigma) : \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \end{cases}$$

Fais la figure sur ton cahier au fil des questions.

1.

Tracer les droites $\mathcal{D}_1 : x + y = 1$, $\mathcal{D}_2 : x + 2y = 8$ et $\mathcal{D}_3 : 3x + y = 9$. Pour chacune des trois dernières inéquations, indiquer le demi-plan solution à l'aide du point test O.

INDICE

Outil : deux points par droite ; l'origine n'est sur aucune des trois droites. Lis bien le sens de chaque inégalité.

2.

Calculer les coordonnées du point K commun à $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, puis donner les sommets de la région des solutions de (Σ).

INDICE

Début : résous le système de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ par le déterminant. **Ensuite :** sur chaque axe, cherche les valeurs permises par les contraintes.

3.

Calculer $2x + y$ en chaque sommet. En déduire la plus petite et la plus grande valeur de $2x + y$ sur la région.

INDICE

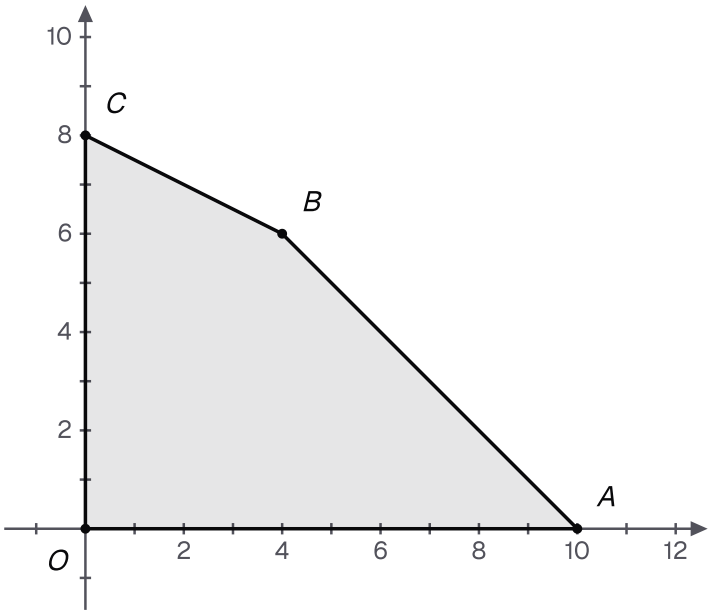
Outil : la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet ».

Exercice 7

L'agriculteur qui sème du blé et du maïs

Un agriculteur dispose de 10 hectares. Il sème x hectares de blé et y hectares de maïs. Un hectare de blé demande 2 milliers de m³ d'eau, un hectare de maïs 4 milliers de m³, et il dispose d'au plus 32 milliers de m³. Un hectare de blé rapporte un bénéfice de 3 milliers de dirhams, un hectare de maïs 5 milliers.

On admet que la région des solutions est le quadrilatère de sommets $O(0,0)$, $A(10,0)$, $B(4,6)$ et $C(0,8)$.



La région admise pour les plans de culture : le quadrilatère teinté de sommets O, A, B et C.

1.

Traduire les contraintes par un système d'inéquations, puis écrire le bénéfice total G en fonction de x et y.

INDICE

Outil : une contrainte pour la surface, une pour l'eau ; n'oublie pas que x et y sont positifs.

2.

Vérifier que le sommet B est le point commun des droites d'équations $x + y = 10$ et $x + 2y = 16$, et qu'il respecte toutes les contraintes.

INDICE

Outil : remplace les coordonnées de B dans chaque équation, puis dans chaque inéquation.

3.

Calculer le bénéfice en chaque sommet. Comment l'agriculteur doit-il partager ses terres ?

INDICE

Outil : la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet ».