BURHAN

Équations, inéquations et systèmes : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations, inéquations et systèmes	Application	8

Exercice 1

Trois équations avec une valeur absolue

Dans cet exercice, x désigne un réel.

1.

Résoudre l'équation $|3x-4|=5$.

INDICE

Outil : un réel a pour valeur absolue 5 s'il vaut 5 ou -5. Annonce les deux cas.

CORRIGÉ

Le second membre 5 est strictement positif. Un réel a pour valeur absolue 5 exactement lorsqu'il vaut 5 ou -5 : on distingue deux cas.

Premier cas : $3x-4=5$**.**

$$\begin{aligned} & 3x-4=5 \\ \Leftrightarrow\ & 3x=9 \\ \Leftrightarrow\ & x=3 \end{aligned}$$

Deuxième cas : $3x-4=-5$**.**

$$\begin{aligned} & 3x-4=-5 \\ \Leftrightarrow\ & 3x=-1 \\ \Leftrightarrow\ & x=-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Conclusion. L'équation $|3x-4|=5$ a deux solutions, une par cas : $S=\left\{-\frac{1}{3},3\right\}$.

2.

Résoudre l'équation $|x+2| = |2x-7|$.

INDICE

Outil : deux réels ont la même valeur absolue s'ils sont égaux ou opposés.

CORRIGÉ

D'après la propriété de la valeur absolue, deux réels ont la même valeur absolue si et seulement s'ils sont égaux ou opposés. On distingue donc deux cas.

Premier cas : $x+2$ et $2x-7$ sont égaux. L'égalité $x+2 = 2x-7$ équivaut à $x = 9$.

Deuxième cas : $x+2$ et $2x-7$ sont opposés.

$$\begin{aligned} & x+2 = -(2x-7) \\ \Leftrightarrow\ & x+2 = -2x+7 \\ \Leftrightarrow\ & 3x = 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $x = 9$: $|9+2| = 11$ et $|18-7| = 11$. Pour $x = \frac{5}{3}$:

$$\left|\frac{5}{3}+2\right| = \frac{11}{3}$$
$$\left|\frac{10}{3}-7\right| = \frac{11}{3}$$

Conclusion. Les deux valeurs conviennent : $S = \left\{\frac{5}{3}, 9\right\}$.

3.

Résoudre l'équation $|4-x| = -2$.

INDICE

Outil : quel est le signe d'une valeur absolue ?

CORRIGÉ

Une valeur absolue n'est jamais strictement négative : pour tout réel x, $|4-x| \geq 0$.

Le second membre vaut -2, et $-2 < 0$. Aucun réel x ne peut donc vérifier $|4-x| = -2$.

Conclusion. L'équation n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

Exercice 2

Une équation du premier degré à paramètre

Soit m un réel. On considère l'équation (E_m) : $(m+3)x = m+5$, d'inconnue réelle x.

1.

Résoudre (E_m) lorsque $m = -3$.

INDICE

Début : remplace m par -3 dans les deux membres, puis regarde l'égalité obtenue.

CORRIGÉ

Équation obtenue. Pour $m = -3$, le coefficient de x vaut $-3+3 = 0$ et le second membre vaut $-3+5 = 2$. L'équation s'écrit :

$$0 \times x = 2$$

Résolution. Pour tout réel x, $0 \times x = 0$, et $0 \neq 2$: aucun réel ne vérifie cette égalité.

Conclusion. Pour $m = -3$, l'équation (E_m) n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

2.

Résoudre (E_m) lorsque $m \neq -3$.

INDICE

Outil : par quoi peux-tu diviser les deux membres, et pourquoi en as-tu le droit ?

CORRIGÉ

Comme $m \neq -3$, le réel $m+3$ n'est pas nul. On peut donc diviser les deux membres de (E_m) par $m+3$:

$$\begin{aligned} &(m+3)x = m+5 \\ \Leftrightarrow\ &x = \frac{m+5}{m+3} \end{aligned}$$

Conclusion. Pour $m \neq -3$, l'équation (E_m) a une seule solution : $S = \left\{ \dfrac{m+5}{m+3} \right\}$.

3.

Contrôler ce résultat en résolvant directement l'équation obtenue pour $m = 2$, puis pour $m = -5$.

INDICE

Outil : remplace m par sa valeur, puis résous l'équation du premier degré obtenue.

CORRIGÉ

Pour $m = 2$. L'équation s'écrit $5x = 7$, donc $x = \dfrac{7}{5}$. La formule de la question 2 donne la même valeur :

$$\frac{2+5}{2+3} = \frac{7}{5}$$

Pour $m = -5$. L'équation s'écrit $-2x = 0$, donc $x = 0$. La formule donne :

$$\frac{-5+5}{-5+3} = \frac{0}{-2} = 0$$

Conclusion. Les deux résolutions directes confirment le résultat : si $m = -3$, $S = \varnothing$; sinon, $S = \left\{\dfrac{m+5}{m+3}\right\}$.

Exercice 3

Quatre équations résolues sans discriminant

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, sans calculer de discriminant.

1.

$5x^2 - 20 = 0$.

INDICE

Outil : isole x^2.

CORRIGÉ

On isole x^2 :

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 20 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 5x^2 = 20 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 4 \end{aligned}$$

Comme $4 > 0$, les réels dont le carré vaut 4 sont -2 et 2.

Conclusion. $S = \{-2, 2\}$.

2.

$2x^2 - 9x = 0$.

INDICE

Outil : mets x en facteur, puis applique la règle du produit nul.

CORRIGÉ

Factorisation. On met x en facteur : pour tout réel x, $2x^2 - 9x = x(2x - 9)$.

Produit nul. D'après la règle du produit nul, $x(2x - 9) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $2x - 9 = 0$, c'est-à-dire à $x = 0$ ou $x = \dfrac{9}{2}$.

Conclusion. $S = \left\{0, \dfrac{9}{2}\right\}$.

3.

$x^2 - 6x + 9 = 0$.

INDICE

Outil : reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

On reconnaît l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, avec $a = x$ et $b = 3$. Pour tout réel x :

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Le carré $(x - 3)^2$ vaut 0 exactement quand $x - 3$ vaut 0 : l'équation équivaut à $x - 3 = 0$, soit $x = 3$.

Conclusion. $S = \{3\}$.

4.

$3x^2 + x - 4 = 0$.

INDICE

Début : essaie des valeurs simples, comme 1 ou -1. **Ensuite :** factorise par $x - \alpha$, où α est la racine trouvée ; l'autre facteur commence par $3x$.

CORRIGÉ

Racine évidente. Pour $x = 1$: $3 \times 1^2 + 1 - 4 = 0$. Le réel 1 est donc une racine.

Factorisation. On cherche un réel q tel que, pour tout réel x, $3x^2 + x - 4 = (x - 1)(3x + q)$. En développant :

$$\begin{aligned}&(x - 1)(3x + q)\\ &= 3x^2 + qx - 3x - q\\ &= 3x^2 + (q - 3)x - q\end{aligned}$$

On identifie les coefficients : $q - 3 = 1$ et $-q = -4$, d'où $q = 4$. Ainsi, pour tout réel x, $3x^2 + x - 4 = (x - 1)(3x + 4)$.

Produit nul. L'équation équivaut à $x - 1 = 0$ ou $3x + 4 = 0$, soit $x = 1$ ou $x = -\dfrac{4}{3}$.

Conclusion. $S = \left\{-\dfrac{4}{3}, 1\right\}$.

Exercice 4

Discriminant, solutions et factorisation

On considère les trinômes $P(x) = 2x^2 + 3x - 9$ et $Q(x) = 4x^2 - 4x + 5$, où x est un réel.

1.

Calculer le discriminant de $P(x)$, puis résoudre l'équation $P(x) = 0$.

INDICE

Outil : $a = 2, b = 3, c = -9$; attention au signe de c dans $-4ac$.

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = 2, b = 3$ et $c = -9$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times 2 \times (-9) \\ &= 9 + 72 = 81 = 9^2\end{aligned}$$

Solutions. Comme $\Delta > 0$, d'après le théorème « Résolution de l'équation du second degré », l'équation a deux solutions :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-3 - 9}{4} = -3 \\ x_2 &= \frac{-3 + 9}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Conclusion. $S = \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}$.

2.

En déduire une factorisation de $P(x)$.

INDICE

Outil : la propriété « Factorisation d'un trinôme », dans le cas d'un discriminant strictement positif.

CORRIGÉ

Le discriminant de $P(x)$ est strictement positif et ses racines sont -3 et $\frac{3}{2}$. D'après la propriété « Factorisation d'un trinôme », pour tout réel x :

$$\begin{aligned}P(x) &= 2(x + 3)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= (x + 3)(2x - 3)\end{aligned}$$

Contrôle. En développant :

$$\begin{aligned}&(x + 3)(2x - 3) \\ &= 2x^2 - 3x + 6x - 9 \\ &= 2x^2 + 3x - 9\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $P(x) = (x + 3)(2x - 3)$.

3.

Écrire la forme canonique de $Q(x)$.

INDICE

Début : mets 4 en facteur. **Ensuite :** complète le carré de $x^2 - x$.

CORRIGÉ

Mise en facteur. Pour tout réel x :

$$Q(x) = 4\left(x^2 - x + \frac{5}{4}\right)$$

Carré à compléter. $x^2 - x$ est le début du développement de $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$. Donc, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & x^2 - x + \frac{5}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

Conclusion. La forme canonique de $Q(x)$ est, pour tout réel x :

$$Q(x) = 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]$$

4.

Calculer le discriminant de $Q(x)$. L'équation $Q(x) = 0$ a-t-elle des solutions ?

INDICE

Outil : le théorème « Résolution de l'équation du second degré », selon le signe de Δ.

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = 4$, $b = -4$ et $c = 5$:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 4 \times 5 \\ &= 16 - 80 = -64 \end{aligned}$$

Solutions. Comme $\Delta < 0$, d'après le théorème « Résolution de l'équation du second degré », l'équation $Q(x) = 0$ n'a aucune solution réelle.

Contrôle. La forme canonique le confirme : pour tout réel x, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \geq 1$, donc $Q(x) \geq 4$.

Conclusion. L'équation $Q(x) = 0$ n'a pas de solution : $S = \varnothing$.

Exercice 5

Le signe de deux trinômes

On pose $P(x) = -x^2 + x + 6$ et $Q(x) = x^2 + 2x + 5$, où x est un réel.

1.

Étudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

INDICE

Début : calcule le discriminant et les racines. **Ensuite :** repère le signe de a.

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = -1$, $b = 1$ et $c = 6$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 \\ &= 1 + 24 = 25 = 5^2\end{aligned}$$

Racines. Comme $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines :

$$\frac{-1 - 5}{-2} = 3$$
$$\frac{-1 + 5}{-2} = -2$$

Rangées dans l'ordre croissant : $\alpha = -2$ et $\beta = 3$.

Signe. Ici $a = -1 < 0$. D'après le théorème « Signe d'un trinôme du second degré », $P(x)$ a le signe de a hors de l'intervalle des racines et le signe opposé entre elles :

- $P(x) < 0$ si $x < -2$ ou $x > 3$;
- $P(x) > 0$ si $-2 < x < 3$;
- $P(x) = 0$ si $x = -2$ ou $x = 3$.

Contrôle. $P(0) = 6 > 0$, et 0 est bien compris entre -2 et 3.

2.

Étudier le signe de $Q(x)$.

INDICE

Outil : calcule le discriminant ; que dit le signe d'un trinôme quand son discriminant est strictement négatif ?

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = 1, b = 2$ et $c = 5$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2^2 - 4 \times 1 \times 5 \\ &= 4 - 20 = -16\end{aligned}$$

Signe. Comme $\Delta < 0$, d'après le théorème « Signe d'un trinôme du second degré », $Q(x)$ a le signe de $a = 1$ pour tout réel x : pour tout réel x, $Q(x) > 0$.

Contrôle. Pour tout réel x, $Q(x) = (x+1)^2 + 4$: somme d'un carré et de 4, ce nombre est au moins égal à 4.

3.

En déduire le signe du produit $P(x) \times Q(x)$.

INDICE

Outil : multiplier par un nombre strictement positif ne change pas le signe.

CORRIGÉ

D'après la question 2, pour tout réel x, $Q(x) > 0$. Multiplier par un nombre strictement positif ne change pas le signe : pour tout réel x, $P(x) \times Q(x)$ a donc le signe de $P(x)$.

Conclusion. D'après la question 1, le produit $P(x) \times Q(x)$ est :

- strictement négatif sur $]-\infty, -2[$ et sur $]3, +\infty[$;
- strictement positif sur $]-2, 3[$;
- nul en -2 et en 3.

Exercice 6

Trois inéquations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1.

$2x^2 - 3x - 5 < 0$.

INDICE

Début : cherche les racines du trinôme. **Ensuite :** où le trinôme est-il du signe contraire de a ?

CORRIGÉ

Discriminant. Ici $a = 2, b = -3$ et $c = -5$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 \\ &\quad - 4 \times 2 \times (-5) \\ &= 9 + 40 = 49 = 7^2\end{aligned}$$

Racines. Comme $\Delta > 0$:

$$\alpha = \frac{3 - 7}{4} = -1$$
$$\beta = \frac{3 + 7}{4} = \frac{5}{2}$$

Signe. Ici $a = 2 > 0$. D'après le théorème « Signe d'un trinôme du second degré », $2x^2 - 3x - 5$ est strictement négatif entre ses racines, et seulement là.

Conclusion. Comme l'inégalité est stricte, on exclut les racines, qui annulent le trinôme. Donc $S = \left]-1, \frac{5}{2}\right[$.

2.

$x^2 + 4 \geq 4x$.

INDICE

Début : passe tous les termes dans le premier membre. **Ensuite :** reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

Tout dans le premier membre. L'inéquation $x^2 + 4 \geq 4x$ équivaut à $x^2 - 4x + 4 \geq 0$.

Identité remarquable. Pour tout réel x, $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. L'inéquation équivaut donc à $(x - 2)^2 \geq 0$.

Conclusion. Un carré est positif ou nul pour tout réel x : tous les réels sont solutions, et $S = \mathbb{R}$.

3.

$x^2 + 4 > 4x$.

INDICE

Outil : reprends la question 2 ; quand un carré est-il nul ?

CORRIGÉ

Comme à la question 2, l'inéquation équivaut à $(x-2)^2 > 0$.

Ce carré est positif ou nul pour tout réel x, et il n'est nul que si $x - 2 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 2$. Il est donc strictement positif pour tout réel x différent de 2.

Conclusion. Tous les réels sauf 2 sont solutions :

$$S =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

Exercice 7

Le prix des billets de cinéma

Une famille paie 110 DH pour 2 billets adultes et 3 billets enfants. Une autre famille paie 95 DH pour 3 billets adultes et 1 billet enfant, au même cinéma. On note x le prix d'un billet adulte et y celui d'un billet enfant, en dirhams.

1.

Traduire la situation par un système de deux équations d'inconnues x et y.

INDICE

Outil : une équation par famille ; le prix payé est la somme des prix des billets.

CORRIGÉ

La première famille paie $2x + 3y$ dirhams, la seconde $3x + y$ dirhams. Le couple (x, y) vérifie donc le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 110 \\ 3x + y = 95 \end{cases}$$

2.

Calculer le déterminant D de ce système. Que peut-on en conclure ?

INDICE

Outil : $D = ab' - a'b$; puis le théorème « Système de déterminant non nul ».

CORRIGÉ

Déterminant. Avec $a = 2$, $b = 3$, $a' = 3$ et $b' = 1$:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 1 - 3 \times 3 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Conclusion. $D \neq 0$: d'après le théorème « Système de déterminant non nul », le système a une unique solution.

3.

Calculer D_x et D_y, puis le prix de chaque billet. Vérifier le résultat.

INDICE

Outil : dans D_x, la colonne des coefficients de x est remplacée par les seconds membres.

CORRIGÉ

Déterminants D_x et D_y.

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 110 & 3 \\ 95 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 110 \times 1 - 95 \times 3 \\ &= 110 - 285 = -175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y &= \begin{vmatrix} 2 & 110 \\ 3 & 95 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 95 - 3 \times 110 \\ &= 190 - 330 = -140 \end{aligned}$$

Solution. D'après le théorème « Système de déterminant non nul » :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-175}{-7} = 25$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-140}{-7} = 20$$

Vérification. $2 \times 25 + 3 \times 20 = 50 + 60 = 110$ et $3 \times 25 + 20 = 75 + 20 = 95$.

Conclusion. Un billet adulte coûte 25 DH et un billet enfant 20 DH.

4.

Le plan est rapporté à un repère. Quelle est la position relative des droites $\mathcal{D}$: $2x + 3y - 110 = 0$ et $\mathcal{D}'$: $3x + y - 95 = 0$? Donner leurs points communs.

INDICE

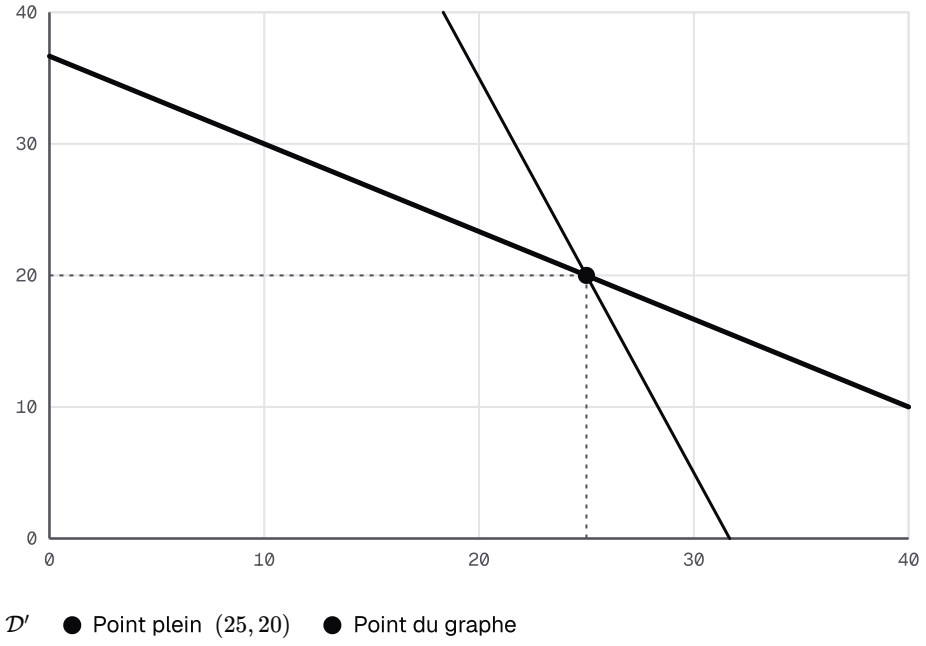
Outil : la propriété « Système et position relative de deux droites » ; relis le déterminant de la question 2.

CORRIGÉ

Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ si et seulement si le couple (x, y) est solution du système de la question 1.

Ce système a pour déterminant $D = -7$, qui n'est pas nul. La propriété « Système et position relative de deux droites » donne alors leur position : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes. Leur seul point commun est $(25, 20)$.

Conclusion. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point unique, dont les coordonnées sont les prix trouvés à la question 3.



Les droites D et D' se coupent en un seul point, de coordonnées (25, 20) : les prix des deux billets.

Exercice 8

Le demi-plan d'une inéquation stricte

Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'inéquation $(I) : 3x - 2y + 6 > 0$, d'inconnues réelles x et y. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Tracer la droite frontière $\mathcal{D}$ d'équation $3x - 2y + 6 = 0$. En quel trait la dessine-t-on ?

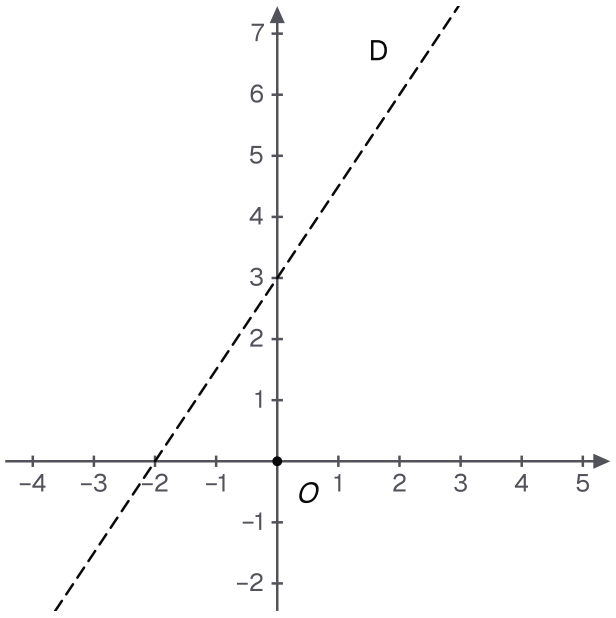
INDICE

Outil : cherche le point de $\mathcal{D}$ d'abscisse 0, puis celui d'ordonnée 0.

CORRIGÉ

Deux points de $\mathcal{D}$. Pour $x = 0$: $-2y + 6 = 0$, donc $y = 3$. Pour $y = 0$: $3x + 6 = 0$, donc $x = -2$. La droite $\mathcal{D}$ passe par les points $(0, 3)$ et $(-2, 0)$.

Trait. L'inégalité de (I) est stricte : les points de $\mathcal{D}$, pour lesquels $3x - 2y + 6 = 0$, ne sont pas solutions. On trace donc $\mathcal{D}$ en pointillés.



La frontière D passe par (0, 3) et (-2, 0) ; elle est tracée en pointillés, car l'inégalité de (I) est stricte.

2.

Déterminer le demi-plan solution à l'aide d'un point test, puis l'écrire avec l'équation réduite de $\mathcal{D}$.

INDICE

Début : l'origine n'est pas sur $\mathcal{D}$; teste-la. **Ensuite :** isole y ; diviser par un nombre négatif change le sens.

CORRIGÉ

Point test. L'origine n'est pas sur $\mathcal{D}$. Pour $O(0,0)$: $3\times 0-2\times 0+6=6$, et $6>0$. L'origine est donc solution.

D'après la propriété « Régionnement du plan par une droite », les solutions de (I) forment le demi-plan ouvert de frontière $\mathcal{D}$ qui contient O.

Équation réduite. (I) équivaut à $-2y>-3x-6$. On divise les deux membres par -2, qui est strictement négatif : le sens de l'inégalité change, et (I) équivaut à

$$y<\frac{3}{2}x+3$$

Conclusion. Les solutions sont les points situés strictement au-dessous de $\mathcal{D}$. On hachure l'autre demi-plan, qui est rejeté.

3.

Les points $A(1,5)$, $B(-2,0)$ et $C(4,1)$ sont-ils solutions de (I) ?

INDICE

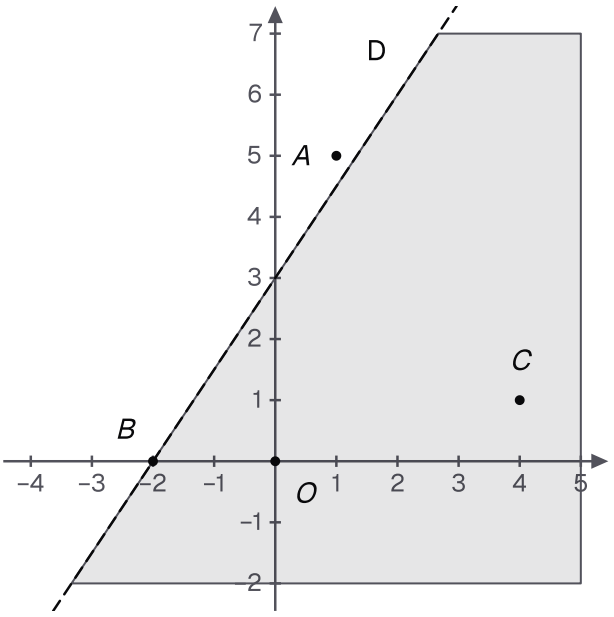
Outil : remplace les coordonnées de chaque point dans $3x-2y+6$.

CORRIGÉ

On calcule $3x-2y+6$ pour chacun des trois points.

- Pour $A(1,5)$: $3-10+6=-1$, qui n'est pas strictement positif. A n'est pas solution.
- Pour $B(-2,0)$: $-6-0+6=0$. Le point B est sur $\mathcal{D}$ et l'inégalité est stricte : B n'est pas solution.
- Pour $C(4,1)$: $12-2+6=16$, et $16>0$. C est solution.

Conclusion. Des trois points, seul C est solution de (I).



Le demi-plan ouvert situé au-dessous de D est teinté ; C y est, A est au-dessus de D et B est sur D : seul C est solution de (I).