BURHAN

Équations, inéquations et systèmes

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/equations-inequations-et-systemes/cours

Chapitre	Semestre
Équations, inéquations et systèmes	Semestre 1

Mettre un problème en équation

Un terrain rectangulaire a un périmètre de 34 m et une aire de 60 m². Quelles sont ses dimensions ?

Tu peux essayer des nombres au hasard. Mais avec d'autres valeurs, les essais ne suffiront plus.

Devine : Une prédiction

Quelles dimensions conviennent pour ce terrain ?

A. 10 m et 6 m.

Faux.

L'aire vaut bien 60 m², mais le périmètre vaut $2 \times (10 + 6) = 32$ m.

B. 9 m et 8 m.

Faux.

Le périmètre vaut bien 34 m, mais l'aire vaut 72 m².

C. 12 m et 5 m.

Juste.

Juste : $2 \times (12 + 5) = 34$ et $12 \times 5 = 60$.

D. 15 m et 4 m.

Faux.

L'aire vaut bien 60 m², mais le périmètre vaut 38 m.

Correction

Le demi-périmètre vaut 17 m. Si une dimension vaut x mètres, l'autre vaut $17 - x$.

L'aire donne $x(17 - x) = 60$. On développe et on passe tout dans un membre :

$$x^2 - 17x + 60 = 0.$$

Les dimensions 12 m et 5 m conviennent. Dans ce chapitre, tu apprends à résoudre une telle équation sans tâtonner.

Cette équation contient x^2 : elle est **du second degré**. Tu vas apprendre à la résoudre, puis à étudier le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$.

Tu résoudras aussi des systèmes de deux équations, et des inéquations à deux inconnues. Elles servent à choisir la meilleure production d'un atelier.

On commence par renforcer le premier degré, vu au collège.

Équations et inéquations du premier degré : valeur absolue et paramètre

Une distance sur la droite numérique

Rappel du collège : si $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ a une seule solution, $x = -\dfrac{b}{a}$.

Rappel du chapitre « L'ordre dans $\mathbb{R}$ » : $|x - a|$ est la distance entre les réels x et a sur la droite numérique. Par exemple, $|7 - 2| = 5$: le réel 7 est à 5 unités de 2.

Devine : Deux réels à la même distance

Quels réels x vérifient $|x - 2| = 3$?

A. $x = 5$ seulement.

Faux.

5 est à 3 unités de 2, à droite. Un autre réel est à 3 unités de 2, à gauche.

B. $x = -1$ ou $x = 5$.

Juste.

Juste : -1 et 5 sont tous deux à 3 unités de 2.

C. $x = -5$ ou $x = 1$.

Faux.

$|-5 - 2| = 7$: le réel -5 est à 7 unités de 2, pas à 3.

D. Aucun réel.

Faux.

Une distance égale à 3 est possible, car 3 est positif.

Correction

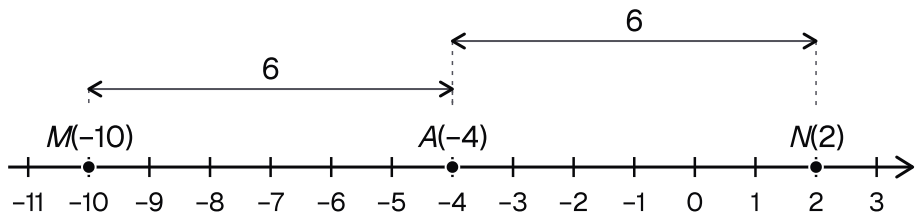
Sur la droite numérique, on part de 2 et on avance de 3 unités dans chaque sens : on obtient $2 + 3 = 5$ et $2 - 3 = -1$.

Donc $S = \{-1, 5\}$.

En clair. Soit a et r deux réels. L'équation $|x - a| = r$:

- a deux solutions, $a - r$ et $a + r$, si $r > 0$;
- a la seule solution a si $r = 0$;
- n'a aucune solution si $r < 0$, car une distance n'est jamais négative.

Pour $|x + 4| = 6$, écris d'abord $x + 4 = x - (-4)$: c'est la distance entre x et -4. Les solutions sont $-4 - 6 = -10$ et $-4 + 6 = 2$.



Sur la droite numérique, les deux solutions de |x + 4| = 6 sont les réels situés à 6 unités de -4, l'un à gauche et l'autre à droite.

Annoncer les cas

Méthode : une équation avec valeur absolue

Pour résoudre $|ax+b|=c$, on annonce les cas selon le signe de c.

1. **Premier cas** : $c<0$. Une valeur absolue n'est jamais négative, donc $S=\varnothing$.
2. **Deuxième cas** : $c=0$. On résout $ax+b=0$.
3. **Troisième cas** : $c>0$. On résout $ax+b=c$ (premier sous-cas), puis $ax+b=-c$ (second sous-cas).
4. **Conclure** en réunissant les solutions trouvées dans l'ensemble S.

Exemple : un second membre positif, puis deux valeurs absolues

Une valeur absolue. Résolvons $|2x-3|=7$. Ici $7>0$: troisième cas, deux sous-cas.

- Premier sous-cas : $2x-3=7$, donc $2x=10$ et $x=5$.
- Second sous-cas : $2x-3=-7$, donc $2x=-4$ et $x=-2$.

Ainsi $S=\{-2,5\}$.

Deux valeurs absolues. Résolvons $|x-1|=|3x+5|$. Deux valeurs absolues sont égales quand les nombres sont égaux, ou bien opposés.

- Premier cas : $x-1=3x+5$, donc $-2x=6$ et $x=-3$.
- Deuxième cas : $x-1=-(3x+5)$, donc $4x=-4$ et $x=-1$.

Ainsi $S=\{-3,-1\}$.

Inéquations avec valeur absolue

En clair. Soit a un réel et r un réel strictement positif.

- L'inégalité $|x-a|\leq r$ signifie que x est à r unités de a au plus : $a-r\leq x\leq a+r$.

- L'inégalité $|x-a| \geq r$ signifie que x est loin de a : $x \leq a-r$ ou $x \geq a+r$.

Plus généralement, pour toute expression A, l'inégalité $|A| \leq r$ équivaut à $-r \leq A \leq r$.

Exemple : trois inéquations

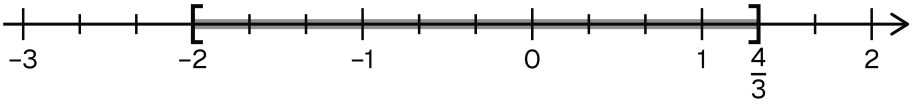
Une inégalité large. Résolvons $|3x+1| \leq 5$. On écrit une double inégalité, on retranche 1, puis on divise par 3, qui est positif :

$$\begin{aligned} -5 \leq 3x+1 &\leq 5 \\ -6 \leq 3x &\leq 4 \\ -2 \leq x &\leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

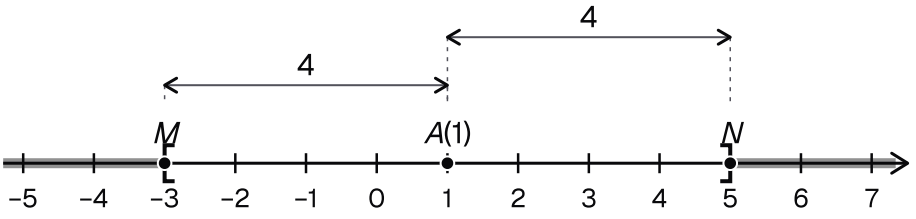
Ainsi $S = \left[-2, \frac{4}{3}\right]$.

Une inégalité stricte. Résolvons $|x-1| > 4$. Les réels situés à plus de 4 unités de 1 vérifient $x < -3$ ou $x > 5$. Ainsi $S =]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$.

Un second membre négatif. L'inéquation $|x+2| \leq -1$ n'a aucune solution : $S = \varnothing$.



Les solutions de |3x + 1| ≤ 5 forment un seul morceau de droite, de -2 à 4/3, bornes comprises.



Les réels à plus de 4 unités de 1 se trouvent de part et d'autre, au-delà de -3 et au-delà de 5, sans ces deux bornes.

Attention : un cas oublié, un second membre négatif

✗ « $|x+3| = 5$, donc $x+3 = 5$ et $x = 2$. »

✓ Il manque le cas $x+3 = -5$, qui donne $x = -8$. Ainsi $S = \{-8, 2\}$.

✗ « $|2x-1| = -4$, donc $2x-1 = -4$ ou $2x-1 = 4$. »

✓ Une valeur absolue n'est jamais négative : $S = \varnothing$.

Regarde le signe du second membre avant d'écrire les cas.

Une équation avec un paramètre

Dans l'équation $(m-3)x = m^2 - 9$, d'inconnue x, la lettre m désigne un réel fixé : c'est un **paramètre**.

Pour $m = 5$, l'équation devient $2x = 16$, donc $x = 8$. Pour $m = 1$, elle devient $-2x = -8$, donc $x = 4$.

La solution change avec m. Une valeur de m pose pourtant problème.

Devine : La valeur qui pose problème

Pour $m = 3$, l'équation $(m-3)x = m^2 - 9$ devient $0 \times x = 0$. Combien de solutions a-t-elle ?

A. Aucune solution.

Faux.

Remplace x par 7 : l'égalité $0 \times 7 = 0$ est vraie. Il y a donc au moins une solution.

B. Une seule : $x = 0$.

Faux.

$x = 0$ convient, mais $x = 7$ aussi : la solution n'est pas unique.

C. Une seule : $x = 6$.

Faux.

C'est la valeur de $m + 3$ pour $m = 3$. Mais on ne peut pas diviser par $m - 3 = 0$.

D. Tous les réels.

Juste.

Juste : pour tout réel x, $0 \times x = 0$.

Correction

Pour $m = 3$, l'égalité $0 \times x = 0$ est vraie quel que soit le réel x. Donc $S = \mathbb{R}$.

On ne pouvait pas diviser par $m - 3$, qui vaut 0.

Méthode : une équation du premier degré à paramètre

1. **Écrire** l'équation sous la forme $Ax = B$, où A et B dépendent du paramètre m.
2. **Premier cas** : $A \neq 0$. On divise par A : une seule solution, $x = \dfrac{B}{A}$.
3. **Deuxième cas** : $A = 0$. On remplace m par sa valeur. Si $B = 0$, tout réel est solution ; sinon, aucun réel ne l'est.
4. **Conclure** en rappelant chaque cas avec son ensemble S.

Une discussion complète, puis à toi

Exemple : deux équations à paramètre

Résolvons $(m-3)x = m^2 - 9$. Ici $A = m - 3$ et, d'après l'identité $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$, $B = m^2 - 9 = (m-3)(m+3)$.

- Premier cas : $m \neq 3$. On divise par $m - 3$, qui n'est pas nul : $x = \dfrac{(m-3)(m+3)}{m-3} = m + 3$, et $S = \{m + 3\}$.
- Deuxième cas : $m = 3$. L'équation devient $0 \times x = 0$, et $S = \mathbb{R}$.

Autre exemple. Résolvons $(m+2)x = 3$.

- Premier cas : $m \neq -2$. On divise par $m + 2$: $S = \left\{\dfrac{3}{m+2}\right\}$.
- Deuxième cas : $m = -2$. L'équation devient $0 \times x = 3$, impossible : $S = \varnothing$.

Attention : diviser sans regarder le cas nul

✗ « $(m-3)x = m^2 - 9$, donc $x = m + 3$ pour tout réel m. »

✓ La division par $m - 3$ n'est permise que si $m \neq 3$. Pour $m = 3$, tous les réels sont solutions, et pas seulement 6.

Avant de diviser par une expression en m, cherche quand elle s'annule.

À toi : Une inéquation, puis une discussion

Résous $|2x + 1| < 5$. Résous ensuite $(2m - 6)x = m - 3$, en distinguant les cas selon le paramètre m. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour l'inéquation, écris l'encadrement $-5 < 2x + 1 < 5$.
Indice 2
Pour l'équation, $A = 2m - 6 = 2(m - 3)$: cherche quand ce coefficient s'annule.
Indice 3
Point délicat : pour $m = 3$, regarde si le second membre est nul lui aussi.

Réponse
Inéquation. L'inéquation $|2x + 1| < 5$ équivaut à une double inégalité. On retranche 1, puis on divise par 2, qui est positif :

$$\begin{aligned} -5 < 2x + 1 < 5 \\ -6 < 2x < 4 \\ -3 < x < 2 \end{aligned}$$

Ainsi $S =]-3, 2[$.

Équation à paramètre. Ici $A = 2m - 6 = 2(m-3)$ et $B = m - 3$.

- Premier cas : $m \neq 3$. Alors $x = \dfrac{m-3}{2(m-3)} = \dfrac{1}{2}$, et $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
- Deuxième cas : $m = 3$. L'équation devient $0 \times x = 0$, et $S = \mathbb{R}$.

Conclusion. L'inéquation a pour ensemble de solutions $S =]-3, 2[$. L'équation a la seule solution $\dfrac{1}{2}$ si $m \neq 3$, et tout réel est solution si $m = 3$.

Équations du second degré sans discriminant

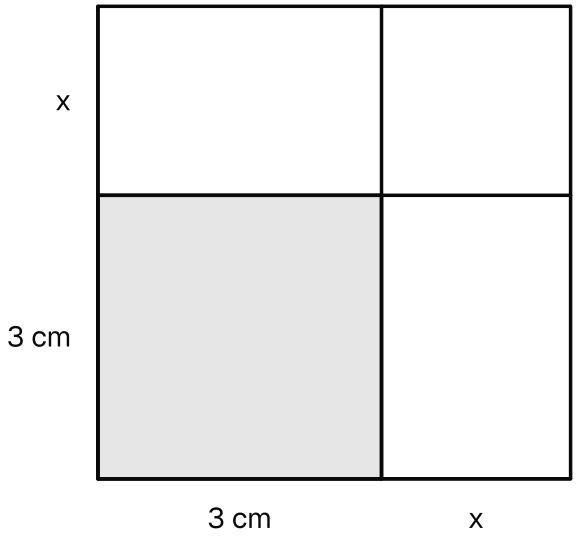
Un carré qu'on agrandit

En clair. Un carré a un côté de 3 cm. On allonge ce côté de x cm, et l'aire devient 49 cm².

L'aire du nouveau carré vaut $(3+x)^2$. On cherche donc x tel que $(3+x)^2 = 49$. En développant, on obtient $x^2 + 6x + 9 = 49$, soit :

$$x^2 + 6x - 40 = 0.$$

L'inconnue apparaît au carré.



Le carré de 3 cm de côté, allongé de x cm dans chaque direction : le grand carré se découpe en un carré de 3 sur 3, deux rectangles de 3 sur x et un petit carré de x sur x.

Devine : De combien allonger le côté ?

De combien de centimètres faut-il allonger le côté du carré ?

A. De 40 cm.
Faux.

40 cm² est l'aire ajoutée, pas la longueur ajoutée : $(3+40)^2$ dépasse largement 49.

B. De 4 cm.

Juste.

Juste : le côté devient 7 cm, et $7^2 = 49$.

C. De 7 cm.

Faux.

7 cm est le nouveau côté. On l'obtient en allongeant de $7 - 3 = 4$ cm.

D. De 4 cm ou de -10 cm.

Faux.

L'équation a bien deux solutions. Mais un allongement de -10 cm donnerait un côté de -7 cm.

Correction

Un carré vaut 49 quand le nombre élevé au carré vaut 7 ou -7. Donc $(3+x)^2 = 49$ équivaut à $3+x = 7$ ou $3+x = -7$, soit $x = 4$ ou $x = -10$.

Une longueur ajoutée est positive : on garde $x = 4$. Le côté passe de 3 cm à 7 cm.

Définition : Trinôme et équation du second degré

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$. L'expression $ax^2 + bx + c$, où x est un réel, s'appelle un **trinôme du second degré** ; a, b et c sont ses **coefficients**.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$, d'inconnue réelle x, est une **équation du second degré**. Un réel x_0 tel que $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ est une **solution** de cette équation ; on dit aussi que x_0 est une **racine** du trinôme.

Exemple : lire les coefficients

- $3x^2 - 5x + 2$ est un trinôme du second degré : $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$.
- $-x^2 + 7$ aussi : $a = -1$, $b = 0$, $c = 7$.
- L'équation $x(2x-1) = 4$ s'écrit $2x^2 - x - 4 = 0$: $a = 2$, $b = -1$, $c = -4$.
- $(x+1)^2 - x^2$ n'est pas un trinôme du second degré : il vaut $2x + 1$, sans terme en x^2.

Facteur commun et carrés

Méthode : facteur commun, carré isolé, identité

1. **Si** $c = 0$, factorise par x : $ax^2 + bx = x(ax + b)$. Un produit est nul quand l'un de ses facteurs l'est.

2. **Si** $b = 0$, isole x^2 pour obtenir $x^2 = k$. Trois cas : $k > 0$ donne $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$; $k = 0$ donne 0 ; $k < 0$ ne donne rien.
3. **Si tu reconnais une identité remarquable**, écris un carré ou une différence de deux carrés, puis factorise.

Exemple : quatre équations sans discriminant

- $3x^2 + 12x = 0$ s'écrit $3x(x + 4) = 0$. D'après la règle du produit nul, $x = 0$ ou $x = -4$: $S = \{-4, 0\}$.
- $2x^2 - 18 = 0$ s'écrit $x^2 = 9$. Donc $S = \{-3, 3\}$.
- $x^2 + 5 = 0$ s'écrit $x^2 = -5$. Un carré n'est jamais négatif : $S = \varnothing$.
- $4x^2 - 12x + 9 = 0$ s'écrit $(2x - 3)^2 = 0$. Donc $2x - 3 = 0$: $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Attention : ne divise pas par l'inconnue

✗ « $7x^2 = 2x$. Je divise par x : $7x = 2$, donc $x = \frac{2}{7}$. »

✓ La solution 0 a disparu : on ne savait pas si x était nul.

Passe tout dans un membre : $7x^2 - 2x = 0$, soit $x(7x - 2) = 0$. Ainsi $S = \left\{0, \frac{2}{7}\right\}$.

Une racine évidente

Méthode : racine évidente, puis factorisation

Rappel du chapitre « Les polynômes » : si un réel α annule un polynôme, ce polynôme se factorise par $x - \alpha$.

1. **Essaie** des valeurs simples, 1, -1, 2, -2 : tu cherches une valeur α qui annule le trinôme.
2. **Factorise** : $ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(ax + q)$. Trouve q en développant, ou par division par $x - \alpha$.
3. **Résous** l'équation produit nul obtenue, puis vérifie les solutions.

Exemple : factoriser grâce à une racine évidente

Résolvons $2x^2 + x - 3 = 0$.

Racine évidente. Pour $x = 1$: $2 + 1 - 3 = 0$. Donc 1 est une racine évidente, et $2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + q)$ pour un réel q à trouver.

Calcul de q. En développant, le terme constant vaut $-q$; il doit valoir -3, donc $q = 3$. Contrôle : $(x-1)(2x+3) = 2x^2 + x - 3$.

Conclusion. L'équation devient $(x-1)(2x+3) = 0$. D'après la règle du produit nul, $S = \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$.

Vérifie : Chercher la bonne valeur

Quelle valeur est une racine évidente du trinôme $3x^2 - 7x + 4$?

A. La valeur 0.

Faux.

Pour $x = 0$, le trinôme vaut 4, et non 0.

B. La valeur -1.

Faux.

Pour $x = -1$, il vaut $3 + 7 + 4 = 14$.

C. La valeur 2.

Faux.

Pour $x = 2$, il vaut $12 - 14 + 4 = 2$.

D. La valeur 1.

Juste.

Juste : $3 - 7 + 4 = 0$.

Correction

Pour $x = 1$, le trinôme vaut $3 - 7 + 4 = 0$: 1 est une racine évidente.

On factorise : $3x^2 - 7x + 4 = (x-1)(3x-4)$. L'équation $3x^2 - 7x + 4 = 0$ a donc pour ensemble de solutions $S = \left\{1, \frac{4}{3}\right\}$.

Changer d'inconnue, puis à toi

Méthode : changer d'inconnue

1. **Repère** une équation où x n'apparaît que par x^2 et x^4.
2. **Pose** $X = x^2$, et note que $X \geq 0$: un carré est positif ou nul.
3. **Résous** l'équation du second degré obtenue en X.
4. **Reviens** à x : écarte les valeurs $X < 0$, puis résous $x^2 = X$ pour chaque valeur gardée.

Exemple : deux équations de degré 4

Résolvons $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. On pose $X = x^2$, avec $X \geq 0$: l'équation devient $X^2 - 10X + 9 = 0$.

Ici 1 est une racine évidente, et $X^2 - 10X + 9 = (X-1)(X-9)$. Donc $X = 1$ ou $X = 9$, deux valeurs positives.

Alors $x^2 = 1$ ou $x^2 = 9$, et $S = \{-3, -1, 1, 3\}$.

Pour $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$, on trouve $(X-1)(X+4) = 0$. La valeur $X = -4$ est écartée, car $X \geq 0$. Il reste $x^2 = 1$: $S = \{-1, 1\}$.

À toi : Trois équations sans discriminant

Résous $5x^2 - 20x = 0$, puis $(3x+1)^2 = 16$, puis $x^2 - 6x + 5 = 0$. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour la première, cherche un facteur commun.
Indice 2
Pour la deuxième, cherche les nombres dont le carré vaut 16. Pour la troisième, essaie $x = 1$.
Indice 3
Point délicat : n'oublie pas le cas négatif dans la deuxième équation.

Réponse

- $5x^2 - 20x = 5x(x-4)$. D'après la règle du produit nul, $S = \{0, 4\}$.
- $(3x+1)^2 = 16$ équivaut à $3x+1 = 4$ ou $3x+1 = -4$. Donc $x = 1$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$, et $S = \left\{-\dfrac{5}{3}, 1\right\}$.
- Pour $x = 1$: $1 - 6 + 5 = 0$, donc 1 est une racine évidente. On factorise : $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$, et $S = \{1, 5\}$.

Forme canonique et discriminant

Compléter un carré

En clair. Dans $x^2 + 6x + 1$, le début $x^2 + 6x$ ressemble au développement de $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Il manque 9 pour avoir un carré complet.

On ajoute 9 et on le retire. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 1 &= (x+3)^2 - 9 + 1 \\ &= (x+3)^2 - 8 \end{aligned}$$

L'inconnue n'apparaît plus qu'une fois, dans un carré.

Devine : Le nombre qui complète

Quel nombre faut-il ajouter à $x^2 - 10x$ pour obtenir un carré ?

A. Le nombre 25.

Juste.
Juste : $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$.

B. Le nombre 10.

Faux.
Avec 10, on n'obtient pas un carré : $(x-5)^2$ a pour terme constant 25.

C. Le nombre 100.

Faux.
Le carré $(x-10)^2$ commence par $x^2 - 20x$, et non par $x^2 - 10x$.

D. Le nombre 5.

Faux.
5 est la moitié de 10. Il faut encore l'élever au carré.

Correction
La moitié de 10 est 5, et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. On ajoute donc 25.

Ainsi, pour tout réel x, $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$.

Peut-on faire de même avec n'importe quel trinôme $ax^2 + bx + c$? **Pourquoi est-ce vrai ?**

On met d'abord a en facteur, pour que x^2 ait le coefficient 1. Puis on complète le carré avec l'identité remarquable $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, comme ci-dessus.

La forme canonique

Propriété : Forme canonique d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$. Pour tout réel x,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Cette écriture s'appelle la **forme canonique** du trinôme.

Démonstration

Étape 1. Comme $a \neq 0$, on met a en facteur : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Étape 2. D'après l'identité remarquable $(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, avec $u = x$ et $v = \frac{b}{2a}$, on a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$. Donc $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.

Étape 3. On remplace dans l'étape 1, en écrivant $\frac{c}{a} = \frac{4ac}{4a^2}$: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

On multiplie par a : c'est l'égalité annoncée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste : **compléter un carré**. Après avoir mis a en facteur, on lit $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Ce carré contient en trop $\frac{b^2}{4a^2}$, qu'on retranche.

La condition $a \neq 0$ sert dès le départ, pour mettre a en facteur.

Vérifie : Le carré de la preuve

Dans la preuve, quel carré commence par $x^2 + \frac{b}{a}x$?

A. Le carré $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2$.

Faux.

Son double produit vaut $\frac{2b}{a}x$: c'est deux fois trop.

B. Le carré $(ax + b)^2$.

Faux.

Il commence par a^2x^2, et non par x^2.

C. Le carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Juste.

Juste : son double produit vaut $2 \times x \times \frac{b}{2a} = \frac{b}{a}x$.

D. Le carré $(x + b)^2$.

Faux.

Son double produit vaut $2bx$, et non $\frac{b}{a}x$.

Correction

D'après l'identité $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$, avec $u = x$ et $v = \frac{b}{2a}$, on a, pour tout réel x :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

C'est le carré cherché.

Exemple : une forme canonique

Écrivons la forme canonique de $2x^2 - 12x + 10$.

Mise en facteur. Pour tout réel x, $2x^2 - 12x + 10 = 2(x^2 - 6x + 5)$.

Carré complété. Comme $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$, on obtient :

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 12x + 10 \\ & = 2\left[(x-3)^2 - 9 + 5\right] \\ & = 2\left[(x-3)^2 - 4\right] \end{aligned}$$

Contrôle. Avec la forme canonique d'un trinôme, $\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-12}{4} = -3$ et $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \dfrac{144 - 80}{16} = 4$.

Dans ce calcul, le nombre $b^2 - 4ac$ revient toujours : on lui donne un nom.

Le discriminant, puis à toi

Définition : Discriminant d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$. Le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

s'appelle le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ (et de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$). Avec cette notation, la forme canonique s'écrit : pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Exemple : calculer des discriminants

On remplace a, b et c avec leurs signes, entre parenthèses si besoin.

- Pour $3x^2 + 2x - 1$: $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$.
- Pour $x^2 - 6x + 9$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$.
- Pour $-x^2 + 4x - 5$: $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 16 - 20 = -4$.

À toi : Deux formes canoniques

Écris la forme canonique de $x^2 + 8x + 7$, puis celle de $3x^2 + 6x - 9$. Calcule ensuite le discriminant de chacun. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Pour le premier, $x^2 + 8x$ est le début de $(x+4)^2$.
Indice 2
Pour le second, mets d'abord 3 en facteur : $3(x^2 + 2x - 3)$.
Indice 3
Point délicat : le nombre retranché se place dans le crochet, avant de multiplier par 3.

Réponse
Premier trinôme. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & x^2+8x+7 \\ & = (x+4)^2-16+7 \\ & = (x+4)^2-9 \end{aligned}$$

Son discriminant vaut $8^2-4\times 1\times 7=36$.

Second trinôme. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} & 3x^2+6x-9 \\ & = 3(x^2+2x-3) \\ & = 3\left[(x+1)^2-4\right] \end{aligned}$$

Son discriminant vaut $6^2-4\times 3\times(-9)=36+108=144$. Contrôle : $\dfrac{\Delta}{4a^2}=\dfrac{144}{36}=4$.

Résoudre et factoriser avec le discriminant

Un carré égal à un nombre

En clair. Prends $x^2-4x-5=0$. Sa forme canonique donne $(x-2)^2-9=0$, soit $(x-2)^2=9$.

Un carré vaut 9 quand le nombre vaut 3 ou -3. Donc $x-2=3$ ou $x-2=-3$: $x=5$ ou $x=-1$.

Pourquoi est-ce vrai en général ? La forme canonique isole toujours un carré, égal à $\dfrac{\Delta}{4a^2}$. Tout dépend alors du signe de Δ.

Devine : Un carré égal à un nombre négatif

L'équation $x^2+4x+7=0$ s'écrit $(x+2)^2=-3$. Combien a-t-elle de solutions ?

A. Deux solutions.

Faux.

Il faudrait un nombre dont le carré vaut -3. Or un carré est positif ou nul.

B. Aucune solution.

Juste.

Juste : un carré n'est jamais strictement négatif.

C. Une seule solution.

Faux.

Une seule solution correspond à un carré égal à 0, pas à -3.

Correction

Pour tout réel x, $(x+2)^2\geq 0$. Ce carré ne peut donc pas valoir -3.

L'équation n'a aucune solution : $S=\varnothing$. Son discriminant vaut $16-28=-12$, négatif.

La résolution

Théorème : Résolution de l'équation du second degré

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:

- n'a **aucune solution** si $\Delta < 0$;
- a une **seule solution** $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ (on dit que x_0 est une **racine double**) ;
- a **deux solutions distinctes** $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.

Démonstration

Étape 1. D'après la forme canonique, et comme $a \neq 0$, l'équation équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$, où $4a^2 > 0$. On distingue trois cas, selon le signe de Δ.

Étape 2. Si $\Delta < 0$, le second membre est strictement négatif. Or un carré est positif ou nul : aucun réel ne convient.

Étape 3. Si $\Delta = 0$, l'équation équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, c'est-à-dire à $x + \dfrac{b}{2a} = 0$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Étape 4. Si $\Delta > 0$, on a $\dfrac{\Delta}{4a^2} = d^2$ avec $d = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or $X^2 = d^2$ équivaut à $X = d$ ou $X = -d$. Donc $x = -\dfrac{b}{2a} - d = x_1$ ou $x = -\dfrac{b}{2a} + d = x_2$, deux solutions distinctes car $d \neq 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **isole un carré** : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$, avec $4a^2 > 0$. Puis elle annonce trois cas.

- Premier cas : $\Delta < 0$, aucun carré ne convient.
- Deuxième cas : $\Delta = 0$, le nombre élevé au carré est nul.
- Troisième cas : $\Delta > 0$, on écrit $\dfrac{\Delta}{4a^2} = d^2$, et $X^2 = d^2$ donne $X = d$ ou $X = -d$.

Vérifie : L'argument du premier cas

Dans la preuve, quel argument montre qu'il n'y a aucune solution lorsque $\Delta < 0$?

A. Un carré ne vaut jamais un nombre strictement négatif.
Juste.
Juste : le second membre $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ est strictement négatif.

B. On ne sait pas calculer la racine carrée $\sqrt{\Delta}$.
Faux.

C'est une conséquence, pas l'argument de la preuve : elle compare un carré à un nombre négatif.

C. Le coefficient a est non nul, on peut donc diviser par a.

Faux.

Cette hypothèse sert à diviser par a, pas à exclure les solutions.

D. Le nombre $4a^2$ est strictement négatif quand $\Delta < 0$.

Faux.

$4a^2$ est toujours strictement positif, car $a \neq 0$.

Correction

D'après la forme canonique, l'équation équivaut à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

Si $\Delta < 0$, le second membre est strictement négatif, car $4a^2 > 0$. Or un carré est positif ou nul : aucun réel ne convient.

Exemple : les trois cas

- $2x^2 - 5x - 3 = 0$: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$. Deux solutions : $x_1 = \dfrac{5-7}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{5+7}{4} = 3$. Donc $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 3\right\}$.
- $9x^2 - 12x + 4 = 0$: $\Delta = 144 - 144 = 0$. Une seule solution : $x_0 = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$.
- $-x^2 + 3x - 4 = 0$: $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$. Aucune solution : $S = \varnothing$.

Dans chaque cas, le signe de Δ choisit la conclusion de la résolution de l'équation du second degré.

La méthode et un piège

Méthode : résoudre avec le discriminant

1. **Ramène** l'équation à la forme $ax^2 + bx + c = 0$, puis lis a, b, c avec leurs signes.
2. **Calcule** $\Delta = b^2 - 4ac$, en mettant les nombres négatifs entre parenthèses.
3. **Annonce** le cas selon le signe de Δ, puis applique la formule qui convient.
4. **Écris** l'ensemble S, et vérifie une solution dans l'équation de départ.

Attention : les signes dans le discriminant

✗ « Pour $-x^2 - 2x + 8 = 0$: $\Delta = -2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = -4 + 32 = 28$. »

✓ Ici $b = -2$, donc $b^2 = (-2)^2 = 4$, et $\Delta = 4 + 32 = 36$.

Puis $x_1 = \dfrac{2-6}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{2+6}{-2} = -4$. La formule commence par $-b$, qui vaut 2. Avec $a < 0$, le dénominateur $2a$ est négatif.

Factoriser un trinôme

Les solutions de $x^2 - 4x - 5 = 0$ sont -1 et 5. Développe $(x+1)(x-5)$: tu retrouves $x^2 - 4x - 5$. Les racines donnent donc les facteurs.

Pourquoi est-ce vrai ? Quand $\Delta > 0$, la forme canonique est une différence de deux carrés. L'identité $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ la transforme en produit.

Propriété : Factorisation d'un trinôme

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Si $\Delta = 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne peut pas s'écrire comme le produit de deux facteurs du premier degré.

Démonstration

On distingue trois cas, selon le signe de Δ.

Étape 1. Si $\Delta > 0$, on pose $d = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, de sorte que $\dfrac{\Delta}{4a^2} = d^2$. La forme canonique et l'identité $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ donnent $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a} + d\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - d\right)$. D'après la résolution de l'équation du second degré, $-\dfrac{b}{2a} - d = x_1$ et $-\dfrac{b}{2a} + d = x_2$: c'est $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Étape 2. Si $\Delta = 0$, la forme canonique donne $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$.

Étape 3. Si $\Delta < 0$, supposons par l'absurde que $ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$ pour tout réel x, avec $p \neq 0$ et $r \neq 0$. Alors $-\dfrac{q}{p}$ annule le trinôme, ce qui contredit la résolution de l'équation du second degré : aucune solution quand $\Delta < 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour $\Delta > 0$, la preuve lit la forme canonique comme une **différence de deux carrés**, puis la factorise. Pour $\Delta < 0$, elle raisonne **par l'absurde** : un facteur $px + q$, avec $p \neq 0$, s'annulerait en $-\dfrac{q}{p}$. Ce serait une solution de l'équation, alors qu'il n'y en a aucune.

Vérifie : Aucun facteur possible

Le trinôme $2x^2 + x + 1$ a pour discriminant $1 - 8 = -7$. Quelle raison empêche de l'écrire $(px + q)(rx + s)$, avec $p \neq 0$ et $r \neq 0$?

A. Tous ses coefficients sont positifs.

Faux.
$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ a aussi des coefficients positifs, et il se factorise.

B. Son coefficient a vaut 2, et non 1.

Faux.
$2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$ se factorise, avec $a = 2$.

C. Un facteur $px + q$ fournirait une racine.

Juste.
Juste : $-\dfrac{q}{p}$ annulerait le trinôme, alors que l'équation n'a aucune solution.

D. Son terme constant vaut 1.

Faux.
$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ a aussi un terme constant égal à 1.

Correction
Supposons que $2x^2 + x + 1 = (px + q)(rx + s)$ pour tout réel x. Alors le réel $-\dfrac{q}{p}$ annule le trinôme : ce serait une solution de $2x^2 + x + 1 = 0$.

Or $\Delta = -7 < 0$: l'équation n'a aucune solution. C'est impossible.

Exemple **: factoriser**

Deux racines. Pour $3x^2 + 5x - 2$: $\Delta = 25 + 24 = 49$, $x_1 = \dfrac{-5 - 7}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-5 + 7}{6} = \dfrac{1}{3}$.
D'après la factorisation d'un trinôme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ &= (x + 2)(3x - 1) \end{aligned}$$

Une racine double. Pour $4x^2 + 4x + 1$: $\Delta = 16 - 16 = 0$ et $x_0 = -\dfrac{1}{2}$. Donc, pour tout réel x, $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Choisir sa méthode, puis à toi

À retenir **: avec ou sans discriminant ?**

- **Pas de terme constant**, $c = 0$: facteur commun x.

- **Pas de terme en** x, $b = 0$: isoler x^2.
- **Une identité remarquable** se voit : l'écrire.
- **Une racine évidente** apparaît : factoriser par $x - \alpha$.
- **Sinon** : le discriminant, qui s'applique toujours.

À toi : Résoudre et factoriser

Résous $5x^2 + 2x - 7 = 0$, puis factorise $5x^2 + 2x - 7$. Résous ensuite $x^2 + x + 3 = 0$. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule le discriminant de chaque trinôme, en lisant a, b, c avec leurs signes.
Indice 2
Attention au signe de c dans $-4ac$.
Indice 3
Point délicat : la factorisation garde le coefficient $a = 5$ devant les facteurs.

Réponse
Première équation. $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 \times (-7) = 4 + 140 = 144$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-2 - 12}{10} = -\dfrac{7}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + 12}{10} = 1$. Ainsi $S = \left\{-\dfrac{7}{5}, 1\right\}$.

Factorisation. D'après la factorisation d'un trinôme, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &5x^2 + 2x - 7 \\ &= 5(x - 1)\left(x + \frac{7}{5}\right) \\ &= (x - 1)(5x + 7) \end{aligned}$$

Seconde équation. $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$: $S = \varnothing$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une résolution

En devoir, une résolution par le discriminant se rédige en trois phrases. Pour $2x^2 - 5x - 3 = 0$, écris : « Le discriminant vaut $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49$. Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions, $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 3$. Donc $S = \left\{-\dfrac{1}{2}, 3\right\}$. » Annonce toujours le signe de Δ avant d'appliquer une formule.

Signe d'un trinôme

Au-dessus ou au-dessous de l'axe

En clair. Dans un repère, place les points de coordonnées $(x, x^2 - 2x - 3)$ pour x allant de -2 à 4. Ils dessinent une courbe en forme de U : une **parabole**.

Le trinôme est positif quand le point est au-dessus de l'axe des abscisses, négatif quand il est au-dessous. Il s'annule là où la courbe coupe l'axe.

Devine : Où le trinôme est-il négatif ?

On a $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Pour quels réels x ce trinôme est-il strictement négatif ?

A. Pour $x < -1$ ou $x > 3$.

Faux.

Pour $x = 4$, le trinôme vaut 5, positif. C'est hors des racines qu'il est positif.

B. Pour $-1 < x < 3$.

Juste.

Juste : pour $x = 0$, il vaut -3. Entre les racines, il est négatif.

C. Pour $-1 \leq x \leq 3$.

Faux.

En -1 et en 3, le trinôme est nul, pas strictement négatif.

D. Pour $-3 < x < 1$.

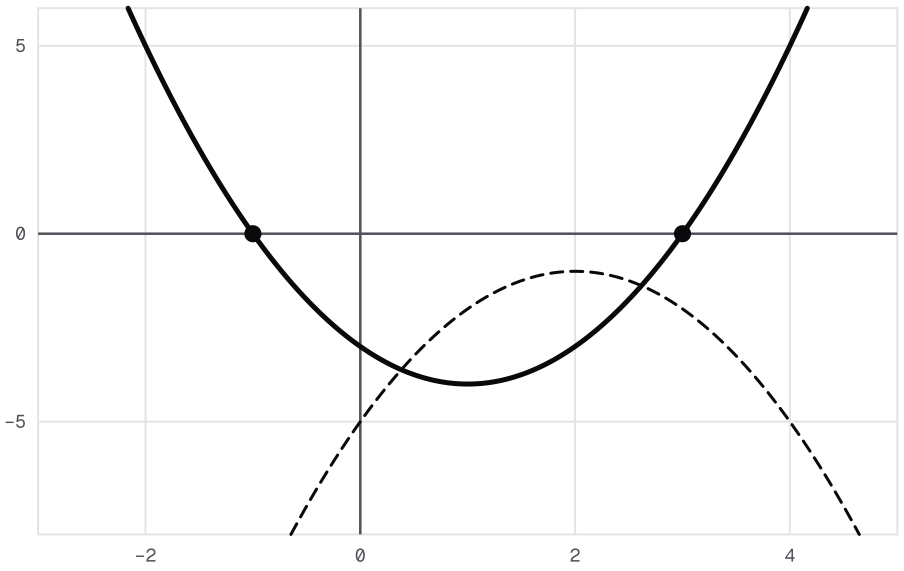
Faux.

Les racines sont -1 et 3. Pour $x = -2$, le trinôme vaut 5, positif.

Correction

Le produit $(x + 1)(x - 3)$ est négatif quand ses facteurs ont des signes contraires : $x + 1 > 0$ et $x - 3 < 0$, soit $-1 < x < 3$.

La parabole est alors au-dessous de l'axe.



La parabole en trait plein coupe l'axe des abscisses en −1 et en 3 : le trinôme x² − 2x − 3 est négatif entre ces deux nombres, positif ailleurs. La parabole en pointillés reste au-dessous de l'axe : le trinôme −x² + 4x − 5 est toujours négatif.

Le signe d'un trinôme se lit-il toujours ainsi ? **Pourquoi est-ce vrai ?**

- Si $\Delta > 0$, on factorise le trinôme et on étudie le signe d'un produit, comme ci-dessus.
- Si $\Delta = 0$, il vaut a fois un carré.
- Si $\Delta < 0$, la forme canonique montre que le crochet est toujours strictement positif. Le signe vient alors de a seul.

Le signe d'un trinôme

Théorème : Signe d'un trinôme du second degré

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c$ est strictement du **signe de** a.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et, pour tout réel $x \neq x_0$, il est strictement du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, on note α et β les deux racines, avec $\alpha < \beta$. Le trinôme s'annule en α et en β ; il est strictement du signe de a si $x < \alpha$ ou $x > \beta$, et strictement du **signe contraire** de a si $\alpha < x < \beta$.

En résumé : un trinôme est du signe de a, sauf entre ses racines.

Démonstration

On distingue trois cas, selon le signe de Δ.

Étape 1. Si $\Delta < 0$, d'après la forme canonique, $ax^2 + bx + c = a \times Q$ avec $Q = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Un carré est positif ou nul et $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc $Q > 0$ et le trinôme est strictement du signe de a.

Étape 2. Si $\Delta = 0$, d'après la factorisation d'un trinôme, $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$: il s'annule en x_0 , et $(x - x_0)^2 > 0$ pour $x \neq x_0$.

Étape 3. Si $\Delta > 0$, les racines $\alpha < \beta$ sont x_1 et x_2 rangées ; la factorisation d'un trinôme donne $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, nul en α et en β. Pour $x < \alpha$, les deux facteurs sont strictement négatifs ; pour $x > \beta$, strictement positifs : leur produit est strictement positif. Pour $\alpha < x < \beta$, on a $x - \alpha > 0$ et $x - \beta < 0$: leur produit est strictement négatif. On multiplie enfin par a.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve annonce trois cas, selon le signe de Δ.

- Pour $\Delta < 0$, la **forme canonique** donne a multiplié par un nombre strictement positif.
- Pour $\Delta = 0$, le carré $(x - x_0)^2$ est strictement positif hors de x_0.
- Pour $\Delta > 0$, elle **factorise** et étudie le signe de $(x - \alpha)(x - \beta)$: deux facteurs de même signe hors des racines, de signes contraires entre elles.

Retiens la règle : signe de a, sauf entre les racines.

Vérifie : Entre les racines

Dans la preuve, pour $\alpha < x < \beta$, quel est le signe de $(x - \alpha)(x - \beta)$?

A. Strictement négatif, car $x - \alpha > 0$ et $x - \beta < 0$.

Juste.
Juste : deux facteurs de signes contraires donnent un produit négatif.

B. Strictement positif, car $x - \alpha > 0$ et $x - \beta > 0$.

Faux.
Comme $x < \beta$, le facteur $x - \beta$ est strictement négatif.

C. Du signe de a, comme le trinôme hors des racines.

Faux.
Le produit $(x - \alpha)(x - \beta)$ ne contient pas a. C'est le trinôme entier qui vaut a fois ce produit.

D. Nul, car x est compris entre les deux racines.

Faux.
Le produit ne s'annule qu'en α et en β, pas entre les deux.

Correction

Si $\alpha < x < \beta$, alors $x - \alpha > 0$ et $x - \beta < 0$: le produit est strictement négatif.

Le trinôme $a(x-\alpha)(x-\beta)$ est donc du signe contraire de a.

Exemple : un tableau de signes

Étudions le signe de $2x^2 - 7x + 3$.

Racines. $\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$. Les racines sont $\alpha = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{7+5}{4} = 3$.

Signe. Ici $a = 2 > 0$. D'après le signe d'un trinôme du second degré, l'expression est strictement positive si $x < \dfrac{1}{2}$ ou $x > 3$. Elle est strictement négative si $\dfrac{1}{2} < x < 3$.

Le tableau ci-dessous résume ce signe.

Signe du trinôme 2x² − 7x + 3

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2 - 7x + 3$		+	0	−	0	+	

Méthode, piège, puis à toi

Méthode : le tableau de signes d'un trinôme

1. **Calcule** Δ, puis les racines s'il y en a.
2. **Place** les racines dans l'ordre croissant sur la ligne des x.
3. **Remplis** : signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles, 0 sous chaque racine. Sans racine, signe de a partout.
4. **Contrôle** avec $x = 0$: le trinôme vaut alors c.

Attention : le signe dépend de a

✗ « $-3x^2 + 6x + 9$ a pour racines -1 et 3. Il est donc positif à l'extérieur de ces racines. »

✓ Ici $a = -3 < 0$. Le trinôme est **négatif** à l'extérieur des racines, et positif entre elles.

Contrôle : pour $x = 0$, il vaut $9 > 0$, et 0 est bien entre -1 et 3.

Exemple : un coefficient a négatif

- Pour $-x^2+6x-9$: $\Delta = 36-36 = 0$ et $x_0 = 3$. Pour tout réel x, le trinôme vaut $-(x-3)^2$. Il est nul en 3, et strictement négatif pour tout réel $x \neq 3$.
- Pour $-2x^2+x-1$: $\Delta = 1-8 = -7 < 0$. La règle du signe d'un trinôme du second degré conclut, car $a = -2 < 0$: l'expression est strictement négative pour tout réel x.

À toi : Trois signes

Étudie le signe de x^2+x-6, celui de $4x^2-4x+1$, puis celui de $-x^2-x-1$. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par le discriminant de chaque trinôme.
Indice 2
Le deuxième a un discriminant nul.
Indice 3
Point délicat : le troisième n'a pas de racine, et son coefficient a vaut -1.

Réponse

- x^2+x-6 : $\Delta = 1+24 = 25$, racines -3 et 2, et $a = 1 > 0$. Il est positif si $x < -3$ ou $x > 2$, négatif si $-3 < x < 2$, nul en -3 et en 2.
- $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$ et $\Delta = 0$. Il est nul en $\dfrac{1}{2}$, strictement positif ailleurs.
- $-x^2-x-1$: $\Delta = 1-4 = -3 < 0$. Il est strictement négatif pour tout réel x.

Inéquations du second degré

Une balle au-dessus d'une hauteur

En clair. Une balle est lancée verticalement depuis le sol. Au bout de t secondes, sa hauteur en mètres vaut $h(t) = -5t^2+20t$, pour t entre 0 et 4.

Quand est-elle à 15 m au moins ? On cherche les t tels que $-5t^2+20t \geq 15$. C'est une **inéquation du second degré**.

Devine : Combien de temps en hauteur ?

Pendant combien de temps la balle est-elle à 15 m au moins ?

A. Pendant 1 seconde.
Faux.
On a $h(1) = 15$ et $h(3) = 15$: la balle reste en hauteur de $t = 1$ à $t = 3$.

B. Pendant 3 secondes.
Faux.

À $t = 3$, la balle redescend sous 15 m. Elle n'y était montée qu'à $t = 1$.

C. Pendant 4 secondes.

Faux.

À $t = 0$ et à $t = 4$, la balle est au sol, à 0 m.

D. Pendant 2 secondes.

Juste.

Juste : de $t = 1$ à $t = 3$.

Correction

On passe tout dans un membre et on met -5 en facteur. Les inéquations suivantes sont équivalentes :

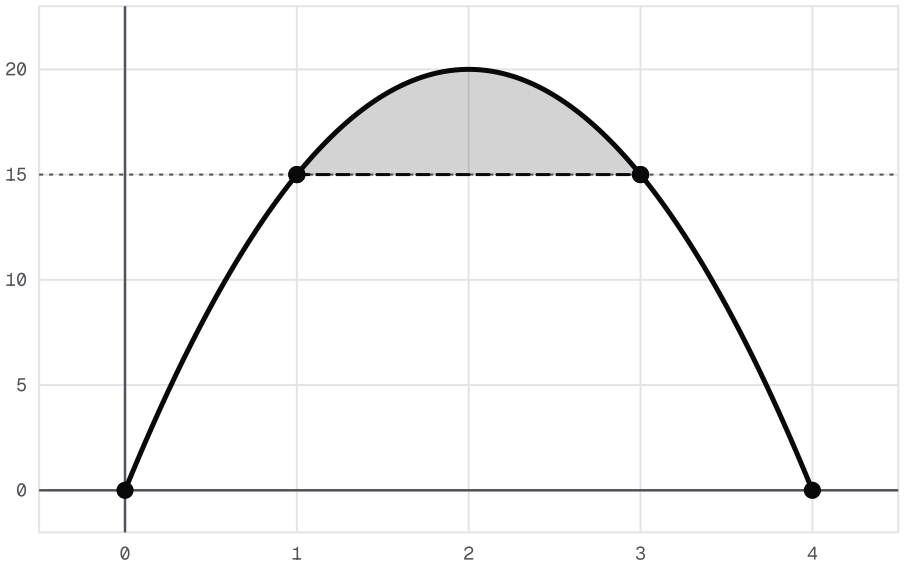
$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t &\geq 15 \\ -5t^2 + 20t - 15 &\geq 0 \\ -5(t^2 - 4t + 3) &\geq 0 \end{aligned}$$

Comme $-5 < 0$, diviser par -5 change le sens : cela revient à $t^2 - 4t + 3 \leq 0$, soit $(t - 1)(t - 3) \leq 0$.

Donc $1 \leq t \leq 3$: la balle est à 15 m au moins pendant 2 secondes.

Méthode : résoudre une inéquation du second degré

1. **Passe** tous les termes dans un même membre, pour comparer à 0.
2. **Étudie** le signe de l'expression obtenue, par un tableau de signes.
3. **Lis** les intervalles qui conviennent. Les racines en font partie pour $\geq$ ou $\leq$, jamais pour $>$ ou $<$.
4. **Pour un quotient**, exclus les valeurs qui annulent le dénominateur : elles sont interdites.



Retour sur la balle : la courbe de h passe au-dessus de la hauteur 15 m entre les instants t = 1 et t = 3, ce que l'inéquation -5t² + 20t ≥ 15 traduit.

Exemple : deux inéquations

Discriminant positif. Résolvons $3x^2 - x - 2 > 0$. Ici 1 est une racine évidente : $3x^2 - x - 2 = (x - 1)(3x + 2)$. Les racines sont $-\dfrac{2}{3}$ et 1, et $a = 3 > 0$.

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines :

$$S = \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \,]1, +\infty[\,.$$

Discriminant négatif. Résolvons $x^2 + x + 2 \leq 0$. Ici $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ et $a > 0$: le trinôme est strictement positif pour tout réel x. Donc $S = \varnothing$.

Produits et quotients

Exemple : une inéquation produit

Rappel du collège : un produit de nombres non nuls est négatif s'il a un nombre impair de facteurs négatifs, positif sinon.

Résolvons $(2 - x)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$. On factorise d'abord : $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$. L'expression s'annule en -1, 2 et 5.

Dans chaque intervalle, on compte les facteurs négatifs. Pour $x = 0$, par exemple : $2 - x > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 5 < 0$, donc le produit est négatif.

Le tableau ci-dessous donne le signe sur chaque intervalle. Ainsi $S =]-\infty, -1] \cup [2, 5]$.

Signe du produit (2 − x)(x² − 4x − 5)

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$(2-x)(x^2-4x-5)$		+	0	−	0	+	0	−	

Exemple : une inéquation quotient

Résolvons $\dfrac{x^2-4x+3}{x+2} \leq 0$. La valeur -2 annule le dénominateur : elle est **interdite**. Le numérateur vaut $(x-1)(x-3)$.

- Premier cas : $x < -2$. Numérateur positif, dénominateur négatif : quotient négatif.
- Deuxième cas : $-2 < x < 1$. Quotient positif.
- Troisième cas : $1 \leq x \leq 3$. Numérateur négatif ou nul : quotient négatif ou nul.
- Quatrième cas : $x > 3$. Quotient positif.

Ainsi $S =]-\infty, -2[\cup [1, 3]$.

Attention : ne multiplie pas par une expression de signe inconnu

✗ « $\dfrac{3x-1}{x+5} \geq 2$, donc $3x - 1 \geq 2(x+5)$, soit $x \geq 11$. »

✓ Si $x + 5 < 0$, multiplier change le sens de l'inégalité. Le réel -6 convient d'ailleurs : $\dfrac{-19}{-1} = 19 \geq 2$.

On écrit plutôt $\dfrac{3x-1}{x+5} - 2 \geq 0$, soit $\dfrac{x-11}{x+5} \geq 0$. Un tableau de signes donne $S =]-\infty, -5[\cup [11, +\infty[$.

Un problème, puis à toi

Exemple : un jardin assez grand

Un jardin rectangulaire a un périmètre de 20 m. Pour quelles dimensions son aire dépasse-t-elle 21 m² ?

Si un côté mesure x mètres, l'autre mesure $10 - x$, avec $0 < x < 10$. On veut $x(10-x) > 21$, soit $x^2 - 10x + 21 < 0$.

Or $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$, négatif entre ses racines. Donc $3 < x < 7$: chaque côté mesure strictement entre 3 m et 7 m.

Vérifie : Un carré au moins égal à 9

Quel est l'ensemble des solutions de $x^2 \geq 9$?

A. $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

Juste.

Juste : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ est positif ou nul hors de $]-3, 3[$.

B. $[3, +\infty[$

Faux.

Le réel -4 convient aussi : $(-4)^2 = 16 \geq 9$.

C. $[-3, 3]$

Faux.

Pour $x = 0$, on a $x^2 = 0$, qui n'est pas supérieur ou égal à 9.

D. $\{-3, 3\}$

Faux.

Ce sont les solutions de $x^2 = 9$. L'inéquation en a bien d'autres, par exemple 5.

Correction

$x^2 \geq 9$ équivaut à $x^2 - 9 \geq 0$, soit $(x-3)(x+3) \geq 0$.

Ce trinôme, de coefficient $a = 1 > 0$, est positif ou nul à l'extérieur de ses racines, racines comprises. Donc $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

À toi : Deux inéquations

Résous $-x^2 + 2x + 8 > 0$, puis $\dfrac{2x-1}{x+3} \geq 0$. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour la première, cherche les racines du trinôme et le signe de a.

Indice 2

Pour la seconde, le quotient s'annule en $\dfrac{1}{2}$, et -3 est une valeur interdite.

Indice 3

Point délicat : une valeur interdite est toujours exclue, même pour une inégalité large.

Réponse

Premier trinôme. $\Delta = 4 + 32 = 36$; les racines sont $\alpha = \dfrac{-2+6}{-2} = -2$ et $\beta = \dfrac{-2-6}{-2} = 4$.

Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est positif entre ses racines : $S =]-2, 4[$.

Quotient. Le numérateur $2x - 1$ s'annule en $\frac{1}{2}$; le dénominateur s'annule en -3, valeur interdite. D'après un tableau de signes, le quotient est positif ou nul si $x < -3$ ou $x \geq \frac{1}{2}$.

Donc $S =]-\infty, -3[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une inéquation

En devoir, annonce chaque étape. Pour $-5t^2 + 20t - 15 \geq 0$, écris : « Le trinôme a pour racines 1 et 3, et son coefficient $a = -5$ est négatif. D'après le signe d'un trinôme du second degré, l'expression est positive ou nulle entre ses racines. Donc $S = [1, 3]$. »

Les crochets suivent l'inégalité : fermés pour une inégalité large, ouverts pour une inégalité stricte.

Systèmes : la méthode du déterminant

Des cahiers et des stylos

Rappel du collège : un système de deux équations à deux inconnues se résout par substitution ou par combinaison.

Salma paie 26 dirhams pour 3 cahiers et 2 stylos. Yassine paie 32 dirhams pour 2 cahiers et 5 stylos. Tous les cahiers ont le même prix x, tous les stylos le même prix y. On obtient le système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 26 \\ 2x + 5y = 32 \end{cases}$$

Devine : Le prix d'un cahier

Essaie quelques valeurs : combien coûte un cahier ?

A. 4 dirhams.

Faux.

Avec $x = 4$, la première équation donne $y = 7$. Mais alors $2 \times 4 + 5 \times 7 = 43$, et non 32.

B. 5 dirhams.

Faux.

Avec $x = 5$, la première équation donne $y = \frac{11}{2}$. Mais alors $10 + \frac{55}{2} = \frac{75}{2}$, et non 32.

C. 6 dirhams.

Juste.

Juste : alors $2y = 8$, donc $y = 4$, et $2 \times 6 + 5 \times 4 = 32$.

D. 8 dirhams.

Faux.

Avec $x = 8$, la première équation donne $y = 1$. Mais alors $2 \times 8 + 5 \times 1 = 21$, et non 32.

Correction

Un cahier coûte 6 dirhams et un stylo 4 dirhams. Contrôle : $3 \times 6 + 2 \times 4 = 26$ et $2 \times 6 + 5 \times 4 = 32$.

Essayer des valeurs ne marche pas toujours : la suite donne une méthode sûre.

Définition : Système de deux équations à deux inconnues ; déterminant

Soit a, b, c, a', b', c' des réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Le système

$$(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

est un **système de deux équations du premier degré à deux inconnues** x et y. Une **solution** de (S) est un couple (x, y) de réels qui vérifie les deux équations à la fois.

Le **déterminant** du système (S) est le réel

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$$

Exemple : calculer un déterminant

Pour le système des cahiers :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 11.$$

Pour le système

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = 4 \end{cases}$$

on trouve $D = 1 \times 6 - (-3) \times (-2) = 6 - 6 = 0$.

On multiplie en croix : la diagonale descendante, moins la diagonale montante.

Un déterminant non nul

À quoi sert ce nombre ? **Pourquoi est-ce vrai ?**

On élimine y par combinaison, comme au collège. On multiplie la première équation par b', la seconde par b, puis on soustrait. Il reste $(ab' - a'b)x = cb' - c'b$: le coefficient de x est exactement D. S'il n'est pas nul, on peut diviser par lui.

Théorème : Système de déterminant non nul

Soit (S) le système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, de déterminant $D=ab'-a'b$. On pose

$$D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b \quad \text{et} \quad D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c.$$

Si $D\neq 0$, le système (S) a une **unique solution** : le couple $\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)$.

Démonstration

Étape 1. Soit (x,y) une solution de (S). On multiplie la première équation par b', la seconde par b, et on soustrait : $(ab'-a'b)x=cb'-c'b$, soit $Dx=D_x$. On multiplie la seconde équation par a, la première par a', et on soustrait : $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$, soit $Dy=D_y$.

Étape 2. Comme $D\neq 0$, on obtient $x=\dfrac{D_x}{D}$ et $y=\dfrac{D_y}{D}$: le système a au plus une solution.

Étape 3. Réciproquement, on calcule $aD_x+bD_y=a(cb'-c'b)+b(ac'-a'c)=c(ab'-a'b)=cD$, et de même $a'D_x+b'D_y=c'D$. En divisant par D, on obtient que le couple $\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)$ vérifie les deux équations : c'est l'unique solution.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **élimine une inconnue** par combinaison, puis l'autre. Elle obtient $Dx=D_x$ et $Dy=D_y$. Comme $D\neq 0$, on divise : il y a au plus une solution.

Puis elle **vérifie** que ce couple convient dans les deux équations. Les deux sens comptent : trouver le couple, puis contrôler qu'il est solution.

Vérifie : L'élimination de y

Pour faire disparaître y dans la preuve, par quoi multiplie-t-on les deux équations avant de les soustraire ?

A. La première par a', la seconde par a.

Faux.
Ce choix fait disparaître x, pas y : il sert à obtenir D_y.

B. La première par b', la seconde par b.

Juste.
Juste : les deux équations contiennent alors $bb'y$, qui disparaît par soustraction.

C. La première par b, la seconde par b'.

Faux.
On obtient b^2y et b'^2y : ces termes ne s'éliminent pas en général.

D. Les deux équations par le même nombre D.

Faux.
Multiplier les deux équations par un même nombre ne fait disparaître aucune inconnue.

Correction
On écrit $b'(ax+by)=b'c$ et $b(a'x+b'y)=bc'$. En soustrayant, le terme $bb'y$ disparaît : $(ab'-a'b)x=cb'-c'b$, soit $Dx=D_x$.

Exemple : le système des cahiers

Pour le système des cahiers, on a $D=11\neq 0$. Puis

$$D_x=\begin{vmatrix}26 & 2\\ 32 & 5\end{vmatrix}=130-64=66$$

et

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 26\\ 2 & 32\end{vmatrix}=96-52=44.$$

D'après le théorème du système de déterminant non nul, l'unique solution est $\left(\frac{66}{11},\frac{44}{11}\right)=(6,4)$.

Un cahier coûte 6 dirhams, un stylo 4 dirhams.

L'hypothèse $D\neq 0$ est nécessaire. Pour le système

$$\begin{cases}x+2y=3\\ 2x+4y=5\end{cases}$$

on a $D=0$: les quotients $\frac{D_x}{D}$ et $\frac{D_y}{D}$ n'existent pas. Ce système n'a aucune solution, car $2(x+2y)=6\neq 5$.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : la méthode du déterminant

1. **Range** les équations sous la forme $ax+by=c$, avec x puis y dans le même ordre.
2. **Calcule** $D=ab'-a'b$.
3. **Si** $D\neq 0$, calcule D_x et D_y. Dans D_x, les seconds membres remplacent les coefficients de x ; dans D_y, ceux de y.
4. **Conclus** : $x=\frac{D_x}{D}$ et $y=\frac{D_y}{D}$. Vérifie le couple dans les deux équations.

Attention : le calcul en croix

✗ Pour le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - y = 7 \end{cases}$$

« $D = 2 \times 3 - 4 \times (-1) = 10$. »

✓ On multiplie en croix : $D = 2 \times (-1) - 4 \times 3 = -14$. Puis $D_x = 7 \times (-1) - 7 \times 3 = -28$ et $D_y = 2 \times 7 - 4 \times 7 = -14$.

Donc $x = 2$ et $y = 1$. Contrôle : $4 + 3 = 7$ et $8 - 1 = 7$.

À toi : Résoudre par le déterminant

Résous le système

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

par la méthode du déterminant. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord $D = 5 \times 4 - 3 \times (-2)$.
Indice 2
Pour D_x, remplace les coefficients de x, 5 et 3, par les seconds membres 4 et 18.
Indice 3
Point délicat : le coefficient de y dans la première équation vaut -2, avec son signe.

Réponse
Déterminant. $D = 5 \times 4 - 3 \times (-2) = 26 \neq 0$.

Calculs. $D_x = 4 \times 4 - 18 \times (-2) = 52$ et $D_y = 5 \times 18 - 3 \times 4 = 78$. Donc $x = \dfrac{52}{26} = 2$ et $y = \dfrac{78}{26} = 3$.

Conclusion. Le système a pour unique solution le couple $(2, 3)$: $S = \{(2, 3)\}$. Contrôle : $10 - 6 = 4$ et $6 + 12 = 18$.

Systèmes et position de deux droites

Deux droites dans un repère

Rappel du chapitre « La droite dans le plan » : une équation $ax + by = c$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$, est celle d'une droite.

En clair. Le système

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

réunit deux droites, d'équations réduites $y = -x + 5$ et $y = 2x - 1$.

Le couple $(2, 3)$ vérifie les deux équations : le point $(2, 3)$ est sur les deux droites. C'est leur point d'intersection.

Devine : Des points communs ?

Le système

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

a-t-il des solutions ?

A. Une seule solution.

Faux.

Les deux droites ont le même coefficient directeur, $-\dfrac{1}{2}$: elles ne se coupent pas en un seul point.

B. Une infinité de solutions.

Faux.

Il faudrait des droites confondues. Or $(4, 0)$ est sur la première, pas sur la seconde.

C. Aucune solution.

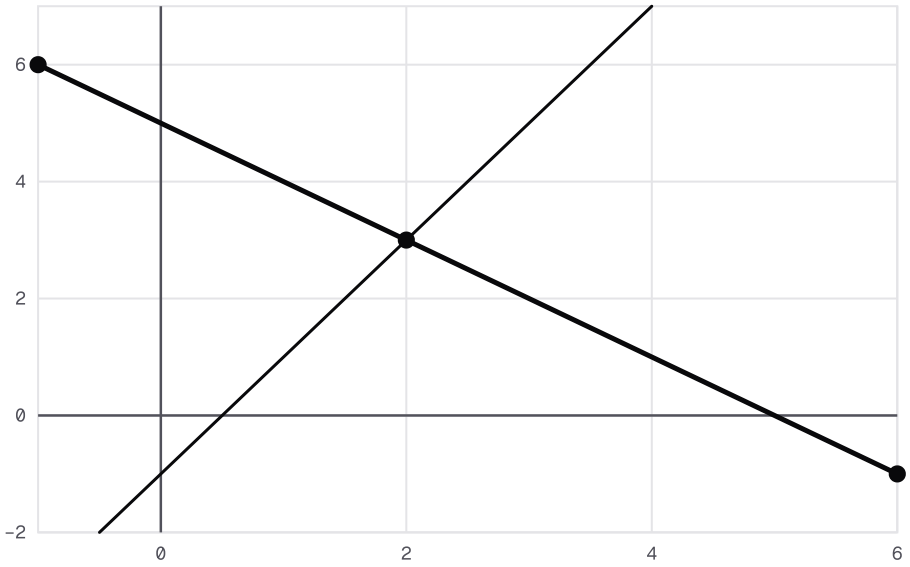
Juste.

Juste : les deux droites sont strictement parallèles.

Correction

La première droite a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$, la seconde $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}$.

Même coefficient directeur, ordonnées à l'origine différentes : les droites sont strictement parallèles. Aucun point n'est commun, donc $S = \varnothing$.



Les droites d'équations y = −x + 5 et y = 2x − 1 se coupent au point (2, 3) : le couple (2, 3) est l'unique solution du système.

Ce lien entre système et droites est-il général ? **Pourquoi est-ce vrai ?**

Un couple est solution d'une équation exactement quand son point est sur la droite correspondante. Ensuite, deux droites sont parallèles quand leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Le critère de colinéarité fait alors apparaître le déterminant D.

Le déterminant et les deux droites

Propriété : Système et position relative de deux droites

Le plan est rapporté à un repère. Soit (S) le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, de déterminant $D = ab' - a'b$, et $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ les droites d'équations cartésiennes $ax + by - c = 0$ et $a'x + b'y - c' = 0$. Les solutions de (S) sont les couples de coordonnées des points communs à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. De plus :

- si $D \neq 0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **sécantes**, et (S) a une unique solution ;
- si $D = 0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont **parallèles** : (S) n'a aucune solution si elles sont strictement parallèles, et une infinité de solutions si elles sont confondues.

Démonstration

Étape 1. Un couple (x, y) vérifie la première équation si et seulement si le point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{D}$; de même pour la seconde et $\mathcal{D}'$. Les solutions de (S) sont donc les coordonnées des points communs aux deux droites.

Étape 2. Les vecteurs $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u}\,'(-b', a')$ dirigent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. D'après le critère de colinéarité, ils sont colinéaires si et seulement si $(-b) \times a' - a \times (-b') = 0$, soit $D = 0$.

Étape 3. Si $D \neq 0$, d'après le théorème du système de déterminant non nul, (S) a une unique solution : les droites ont un seul point commun, elles sont sécantes. Si $D = 0$, elles sont parallèles : ou bien sans point commun, ou bien confondues, et leurs points, en nombre infini, sont tous communs.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve traduit le système en **géométrie** : une solution est un point commun. Puis elle compare les vecteurs directeurs $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u}\,'(-b', a')$.

D'après le critère de colinéarité, ils sont colinéaires exactement quand $ab' - a'b = 0$. Donc $D \neq 0$ donne des droites sécantes, et $D = 0$ des droites parallèles, strictement ou confondues.

Vérifie : Le vecteur directeur

Dans la preuve, quel vecteur dirige la droite d'équation $ax + by - c = 0$?

A. Le vecteur $\vec{u}(-b, a)$.

Juste.
Juste : c'est le vecteur directeur vu dans le chapitre « La droite dans le plan ».

B. Le vecteur $\vec{u}(a, b)$.

Faux.
Pour $x + y - 5 = 0$, il donnerait $(1, 1)$. Or les points $(5, 0)$ et $(0, 5)$ de la droite donnent la direction $(-5, 5)$, non colinéaire à $(1, 1)$.

C. Le vecteur $\vec{u}(b, a)$.

Faux.
Pour $x + 2y - 4 = 0$, il donnerait $(2, 1)$. Or les points $(4, 0)$ et $(0, 2)$ de la droite donnent la direction $(-4, 2)$.

D. Le vecteur $\vec{u}(a, -c)$.

Faux.
Le nombre c ne fixe pas la direction : il déplace la droite parallèlement à elle-même.

Correction
Une droite d'équation $ax + by - c = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b, a)$. La preuve compare $\vec{u}(-b, a)$ et $\vec{u}\,'(-b', a')$: ils sont colinéaires si et seulement si $(-b) \times a' - a \times (-b') = 0$, soit $D = 0$.

Exemple : deux droites sécantes

Soit le système

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Ici $D = 3 \times 2 - 1 \times (-1) = 7 \neq 0$. La propriété « Système et position relative de deux droites » s'applique : les droites sont sécantes.

Puis $D_x = 2 \times 2 - 3 \times (-1) = 7$ et $D_y = 3 \times 3 - 1 \times 2 = 7$. Le point d'intersection est $(1, 1)$. Contrôle : $3 - 1 = 2$ et $1 + 2 = 3$.

Exemple : un déterminant nul

Droites confondues. Pour le système

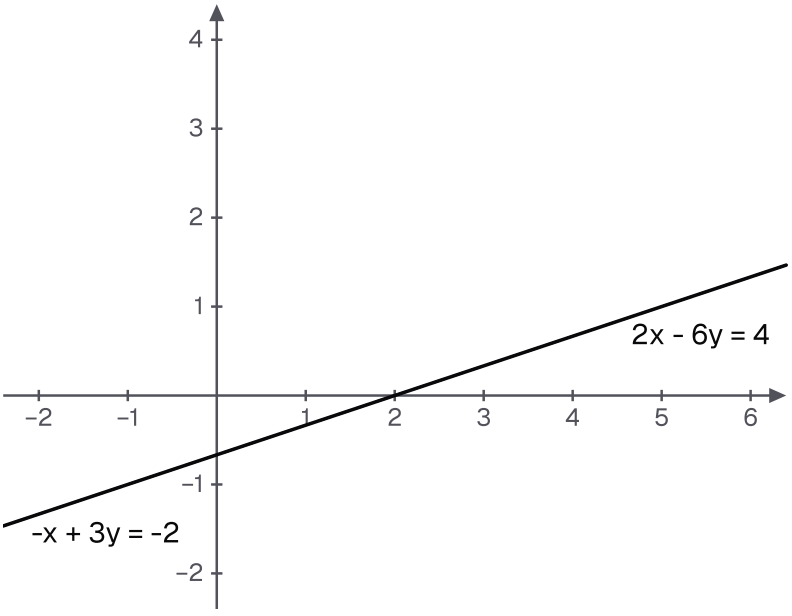
$$\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$$

on a $D = 2 \times 3 - (-1) \times (-6) = 0$. Le point $(2, 0)$ est sur la première droite. Il est aussi sur la seconde : $-2 + 0 = -2$. Les droites sont confondues, et le système a une infinité de solutions.

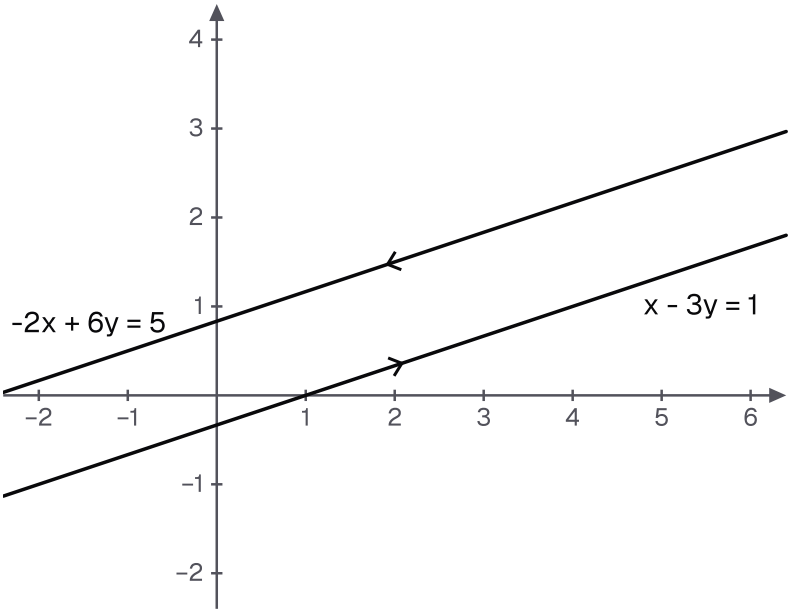
Droites strictement parallèles. Pour le système

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = 5 \end{cases}$$

on a $D = 6 - 6 = 0$. Le point $(1, 0)$ est sur la première droite, mais $-2 + 0 \neq 5$. Les droites sont strictement parallèles : $S = \varnothing$.



Les équations 2x - 6y = 4 et -x + 3y = -2 décrivent une seule et même droite, qui passe par le point (2, 0) : tous ses points sont solutions du système.



Les droites d'équations x - 3y = 1 et -2x + 6y = 5 ont la même direction sans se toucher : le système n'a aucune solution.

Méthode, problème, puis à toi

Méthode : interpréter un système

1. **Calcule** le déterminant D.
2. **Premier cas** : $D \neq 0$. Les droites sont sécantes ; leur point commun a pour coordonnées l'unique solution.
3. **Deuxième cas** : $D = 0$. Les droites sont parallèles. Choisis un point de la première, et teste-le dans la seconde.
4. **Conclus** : si ce point est sur les deux droites, elles sont confondues, avec une infinité de solutions ; sinon, aucune solution.

Exemple : un ruban coupé en deux

Un ruban de 23 m est coupé en deux morceaux. Le premier morceau dépasse de 2 m le double du second. On note x et y leurs longueurs, en mètres :

$$\begin{cases} x + y = 23 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

Ici $D = 1 \times (-2) - 1 \times 1 = -3$, $D_x = 23 \times (-2) - 2 \times 1 = -48$ et $D_y = 1 \times 2 - 1 \times 23 = -21$.

Donc $x = 16$ et $y = 7$: les morceaux mesurent 16 m et 7 m.

À toi : Deux systèmes, deux positions

Pour chaque système, donne la position des deux droites et l'ensemble des solutions :

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par le déterminant de chaque système.
Indice 2
Pour le premier, $D = 4 \times 3 - (-6) \times (-2)$; teste ensuite le point $(0, -3)$.
Indice 3
Point délicat : un déterminant nul ne suffit pas à conclure, il faut le point test.

Réponse
Premier système. $D = 12 - 12 = 0$: les droites sont parallèles. Le point $(0, -3)$ est sur la première, car $0 + 6 = 6$. Il est sur la seconde, car $0 - 9 = -9$. Les droites sont confondues : les solutions sont donc en nombre infini.

Second système. $D = 1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0$: les droites sont sécantes. Puis $D_x = 7 \times (-1) - 0 \times 3 = -7$ et $D_y = 1 \times 0 - 2 \times 7 = -14$. Donc $(x, y) = (1, 2)$, et $S = \{(1, 2)\}$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une position relative

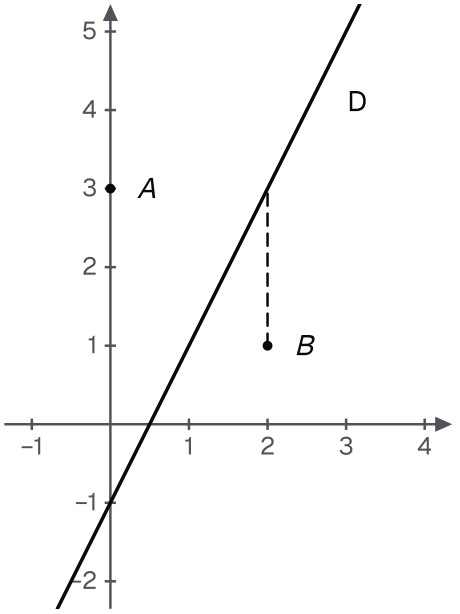
En devoir, la conclusion cite le déterminant et la propriété. Pour le premier système de l'activité, écris : « Le déterminant vaut $D = 0$, donc les droites sont parallèles. Le point $(0, -3)$ appartient aux deux droites. Elles sont donc confondues, et le système a une infinité de solutions. » Un dessin aide à vérifier, mais il ne remplace pas ce calcul.

Inéquations à deux inconnues et régionnement

D'un côté ou de l'autre de la droite

En clair. Trace la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$. Le point $A(0, 3)$ est au-dessus : son ordonnée 3 dépasse $2 \times 0 - 1 = -1$. Le point $B(2, 1)$ est au-dessous, car $1 < 2 \times 2 - 1 = 3$.

Les points au-dessus de $\mathcal{D}$ vérifient $y > 2x - 1$, ceux au-dessous $y < 2x - 1$. Une inégalité décrit donc un côté de la droite.



Le point A(0, 3) est au-dessus de la droite D d'équation y = 2x - 1, le point B(2, 1) au-dessous : on compare chaque ordonnée à celle du point de D de même abscisse.

Devine : Un côté de la droite

Le point $C(3,4)$ vérifie-t-il $y > 2x - 1$?

A. Non, il est au-dessous de $\mathcal{D}$.

Juste.

Juste : $2 \times 3 - 1 = 5$ et $4 < 5$.

B. Oui, il est au-dessus de $\mathcal{D}$.

Faux.

Pour $x = 3$, la droite passe par l'ordonnée 5. Or $4 < 5$.

C. Non, il est sur la droite $\mathcal{D}$.

Faux.

Un point de $\mathcal{D}$ vérifierait $y = 2x - 1$, soit ici $4 = 5$: c'est faux.

Correction

Pour $x = 3$, la droite a pour ordonnée $2 \times 3 - 1 = 5$. Le point C a pour ordonnée $4 < 5$: il est au-dessous de $\mathcal{D}$, et ne vérifie pas $y > 2x - 1$.

Demi-plans

Définition : Inéquation du premier degré à deux inconnues

Soit a, b, c trois réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Une inéquation de la forme $ax + by + c > 0$ (ou $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$) est une **inéquation du premier degré à deux inconnues** x et y. Une **solution** est un couple (x, y) de réels qui la vérifie.

Le plan étant rapporté à un repère, **résoudre graphiquement** une inéquation (ou un système d'inéquations) à deux inconnues, c'est représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ dont le couple de coordonnées est solution.

Toute inéquation $ax + by + c > 0$ décrit-elle un côté d'une droite ? **Pourquoi est-ce vrai ?**

Si $b \neq 0$, on isole y en divisant par b. Le sens de l'inégalité dépend du signe de b. Trois cas sont donc à annoncer : $b > 0$, $b < 0$ et $b = 0$.

Propriété : Régionnement du plan par une droite

Le plan est rapporté à un repère. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. La droite $\mathcal{D}$ partage le plan en deux **demi-plans ouverts** de frontière $\mathcal{D}$:

- si $b \neq 0$ et si $y = mx + p$ est l'équation réduite de $\mathcal{D}$, ce sont l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y > mx + p$ (au-dessus de $\mathcal{D}$) et l'ensemble des points tels que $y < mx + p$ (au-dessous de $\mathcal{D}$) ;
- si $b = 0$, la droite $\mathcal{D}$ a une équation de la forme $x = k$, et ce sont l'ensemble des points tels que $x > k$ et l'ensemble des points tels que $x < k$.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $ax + by + c > 0$ est l'un de ces deux demi-plans, et l'ensemble des points tels que $ax + by + c < 0$ est l'autre.

Démonstration

On distingue trois cas, selon le signe de b. Si $b \neq 0$, l'équation réduite de $\mathcal{D}$ est $y = mx + p$, avec $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$, et $ax + by + c > 0$ équivaut à $by > -ax - c$.

Étape 1. Cas $b > 0$. Diviser par $b > 0$ conserve le sens d'une inégalité : $ax + by + c > 0$ équivaut à $y > mx + p$, et $ax + by + c < 0$ à $y < mx + p$.

Étape 2. Cas $b < 0$. Diviser par $b < 0$ change le sens : $ax + by + c > 0$ équivaut à $y < mx + p$, et $ax + by + c < 0$ à $y > mx + p$.

Étape 3. Cas $b = 0$. Alors $a \neq 0$ et $\mathcal{D}$ a pour équation $x = k$, avec $k = -\dfrac{c}{a}$. Si $a > 0$, $ax + c > 0$ équivaut à $x > k$; si $a < 0$, à $x < k$. L'inégalité $ax + c < 0$ donne l'autre demi-plan.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve distingue trois cas selon le signe de b ; pour $b \neq 0$, elle **isole** y.

- Premier cas : $b > 0$, diviser par b garde le sens de l'inégalité.
- Deuxième cas : $b < 0$, diviser par b le change.
- Troisième cas : $b = 0$, la droite a une équation $x = k$, et le signe de a dit s'il faut $x > k$ ou $x < k$.

Dans les trois cas, on obtient un demi-plan.

Vérifie : Diviser par un nombre négatif

On résout $2x - 3y + 6 > 0$ en isolant y. Quelle inéquation obtient-on ?

A. $y > \frac{2}{3}x + 2$

Faux.

On a divisé par -3 sans changer le sens de l'inégalité.

B. $y < -\frac{2}{3}x - 2$

Faux.

Les signes du second membre sont faux : $-2x - 6$ divisé par -3 donne $\frac{2}{3}x + 2$.

C. $y < \frac{2}{3}x + 2$

Juste.

Juste : diviser par $-3 < 0$ change le sens de l'inégalité.

D. On ne peut pas isoler y.

Faux.

On peut toujours isoler y quand son coefficient n'est pas nul, ici -3.

Correction

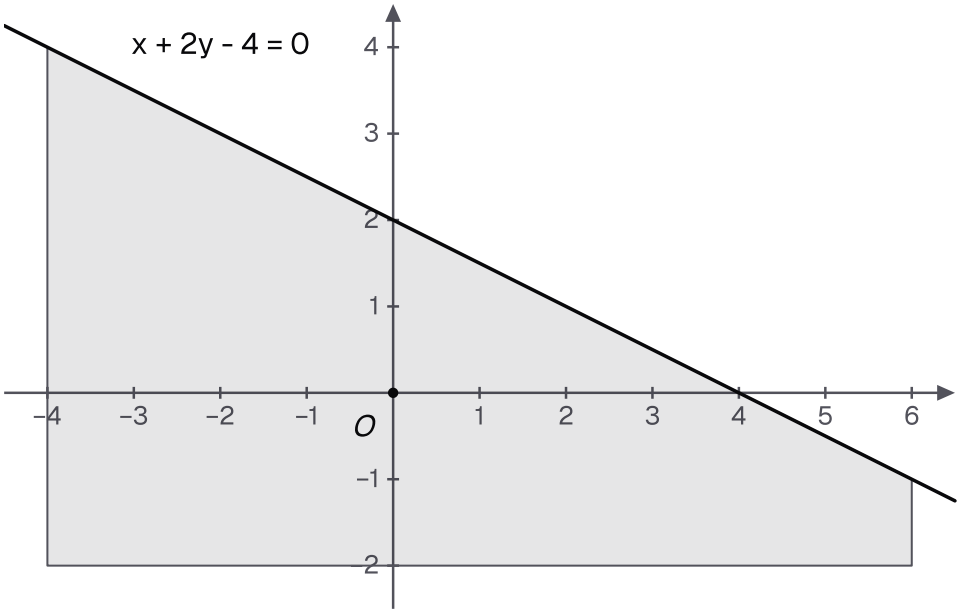
$2x - 3y + 6 > 0$ équivaut à $-3y > -2x - 6$. On divise par -3, qui est négatif : le sens change. On obtient $y < \frac{2}{3}x + 2$.

Les solutions sont les points situés au-dessous de la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$.

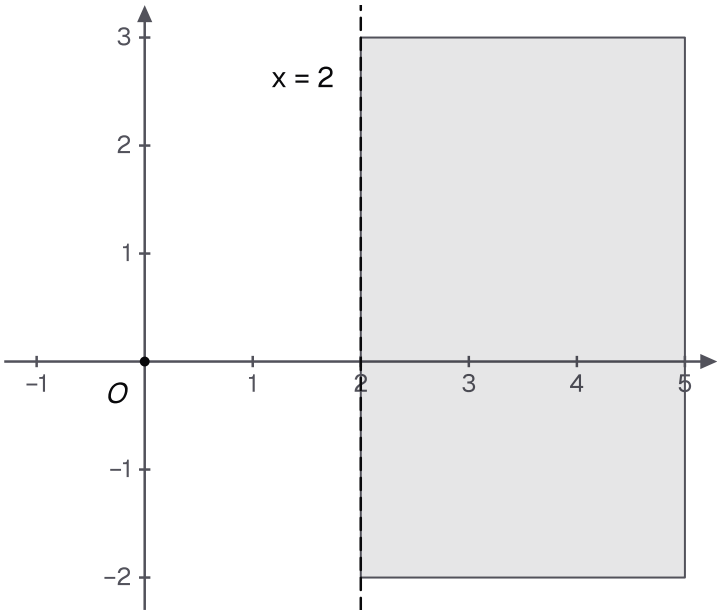
Résoudre graphiquement

Exemple : deux demi-plans

- Résolvons graphiquement $x + 2y - 4 \leq 0$. La droite frontière $x + 2y - 4 = 0$ passe par $(0, 2)$ et $(4, 0)$. Le point $O(0, 0)$ n'est pas sur elle, et $0 + 0 - 4 = -4 \leq 0$. D'après le régionnement du plan par une droite, on garde le demi-plan qui contient O, droite comprise.
- Pour $3x - 6 > 0$, soit $x > 2$, les solutions sont les points situés à droite de la droite d'équation $x = 2$, droite exclue.



La droite x + 2y - 4 = 0, en trait plein, coupe le plan en deux ; la partie teintée, du côté de O et droite comprise, réunit les solutions de x + 2y - 4 ≤ 0.

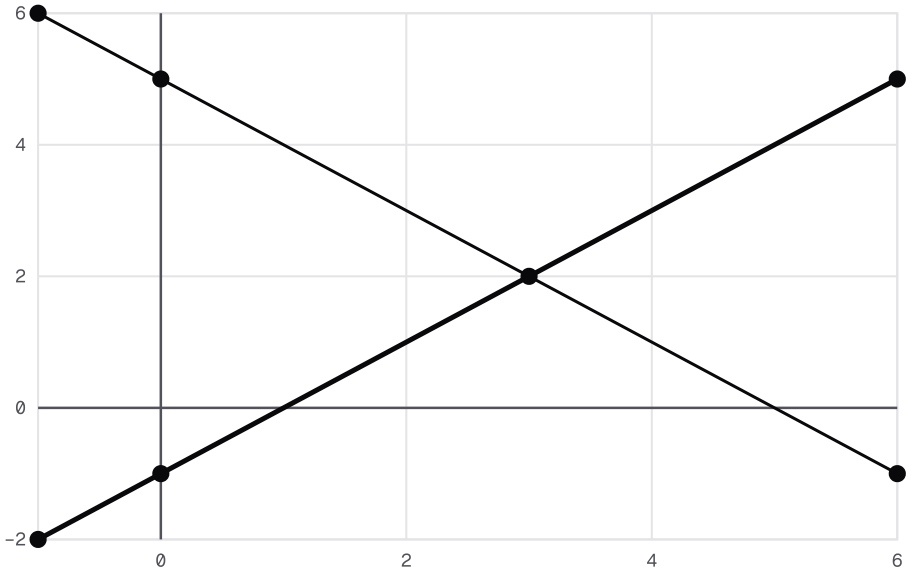


La droite x = 2 est tracée en pointillés, car l'inégalité x > 2 est stricte ; les solutions forment la partie teintée, à sa droite.

Méthode : résoudre graphiquement

1. **Trace** chaque droite frontière : en trait plein si l'inégalité est large, en pointillés si elle est stricte.
2. **Teste** un point hors de la droite, par exemple $O(0, 0)$. S'il vérifie l'inéquation, son demi-plan convient ; sinon, c'est l'autre.
3. **Hachure** la partie du plan qui ne convient pas.

4. **Pour un système**, fais de même pour chaque inéquation. Les points jamais hachurés forment l'ensemble des solutions.



$y = x - 1$ $y = -x + 5$ Point plein $(0, -1)$ Point plein $(3, 2)$ Point plein $(0, 5)$ Point du graphe

Les droites d'équations y = x – 1 et y = –x + 5 bordent, avec l'axe des ordonnées, un triangle de sommets (0, –1), (3, 2) et (0, 5). Ce triangle, côtés compris, est l'ensemble des solutions du système de l'exemple qui suit. Fais la figure sur ton cahier et hachure la partie qui ne convient pas.

Un système d'inéquations, puis à toi

Exemple : un système de trois inéquations

Résolvons graphiquement le système

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x - 1 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

L'inéquation $x \geq 0$ donne les points à droite de l'axe des ordonnées, axe compris.

Pour les deux autres, on teste $O(0, 0)$, qui n'est sur aucune des deux droites frontières : $0 \geq -1$ et $0 \leq 5$ sont vraies.

Les solutions forment le triangle de sommets $(0, -1)$, $(3, 2)$ et $(0, 5)$, côtés compris. Le sommet $(3, 2)$ est le point commun des droites $y = x - 1$ et $x + y = 5$.

Attention : un point test hors de la droite

✗ « Pour $y \geq 3x$, je teste $O(0,0)$: $0 \geq 0$ est vrai, donc le demi-plan qui contient O convient. »

✓ Le point O est sur la droite $y = 3x$: il n'apprend rien.

Teste plutôt $(1,0)$: $0 \geq 3$ est faux. Les solutions sont de l'autre côté, au-dessus de la droite, droite comprise.

À toi : Une région à décrire

Résous graphiquement le système

$$\begin{cases} 2x + y - 6 \leq 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$$

Décris la région obtenue, puis fais la figure sur ton cahier. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les droites frontières ont pour équations $y = -2x + 6$ et $y = x$.
Indice 2
La seconde droite passe par O : teste plutôt le point $(0,1)$.
Indice 3
Point délicat : la frontière de $x - y < 0$ se trace en pointillés, car l'inégalité est stricte.

Réponse

- Pour $2x + y - 6 \leq 0$, le point O donne $-6 \leq 0$, vrai. Les solutions sont du côté de O, sous la droite $y = -2x + 6$, droite comprise.
- $x - y < 0$ équivaut à $y > x$: les points au-dessus de la droite $y = x$, droite exclue. Contrôle avec $(0,1)$: $0 - 1 < 0$.

Les deux droites se coupent au point $(2,2)$, qui est exclu. La région est un angle de sommet $(2,2)$, ouvert vers la gauche, entre les deux droites.

Programmation linéaire simple

Un atelier de menuiserie

Un atelier de menuiserie fabrique chaque jour x tables et y chaises. Une table demande 2 h d'assemblage et 1 h de vernissage. Une chaise demande 1 h d'assemblage et 2 h de vernissage.

L'atelier dispose au plus de 16 h d'assemblage et de 14 h de vernissage par jour. Il gagne 200 dirhams par table et 150 dirhams par chaise.

Que fabriquer pour gagner le plus ?

Devine : Le meilleur choix

Parmi ces productions, laquelle rapporte le plus en respectant les heures disponibles ?

A. 8 tables, aucune chaise.

Faux.

Elle respecte les heures, mais rapporte seulement 1600 dirhams.

B. Aucune table, 7 chaises.

Faux.

Elle respecte les heures, mais rapporte seulement 1050 dirhams.

C. 4 tables et 5 chaises.

Faux.

Elle respecte les heures, car $13 \leq 16$ et $14 \leq 14$. Mais elle rapporte 1550 dirhams.

D. 6 tables et 4 chaises.

Juste.

Juste : elle utilise toutes les heures et rapporte 1800 dirhams.

Correction

Pour 6 tables et 4 chaises : $2 \times 6 + 4 = 16$ h d'assemblage, et $6 + 2 \times 4 = 14$ h de vernissage. Le gain vaut $200 \times 6 + 150 \times 4 = 1800$ dirhams.

La suite permet de vérifier, avec la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet », qu'aucune autre production ne fait mieux.

Méthode : un problème de programmation linéaire

1. **Nomme** les inconnues, puis traduis chaque contrainte par une inéquation. N'oublie pas $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
2. **Représente** la région des solutions, puis calcule ses sommets en résolvant des systèmes.
3. **Écris** la quantité à rendre la plus grande, ou la plus petite, sous la forme $\lambda x + \mu y$, où λ et μ sont deux nombres donnés (ici 200 et 150).
4. **Calcule** sa valeur en chaque sommet, puis conclus dans le langage de la situation.

La région des productions possibles

Exemple : mettre l'atelier en inéquations

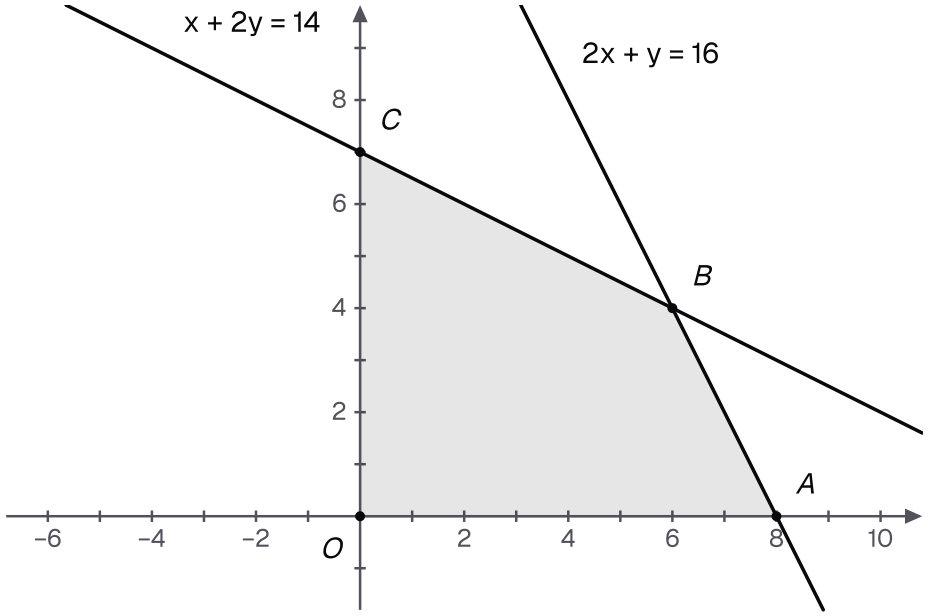
Les heures disponibles donnent le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 14 \end{cases}$$

Sa région est un quadrilatère de sommets $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(6,4)$ et $C(0,7)$.

Le sommet B est le point commun des droites $2x+y=16$ et $x+2y=14$: $D=3$, $D_x=18$ et $D_y=12$, donc $B(6,4)$.

Le gain vaut $200x+150y$ dirhams.



La région des productions possibles de l'atelier est le quadrilatère teinté OABC, limité par les axes et par les droites 2x + y = 16 et x + 2y = 14.

Propriété : Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet

Le plan est rapporté à un repère. Soit $\mathcal{P}$ une région du plan non vide, formée des points $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient un système d'inéquations **larges** ($\leq$ ou $\geq$) du premier degré à deux inconnues, et limitée par un polygone, côtés compris. Soit λ et μ deux réels.

Parmi les points $M(x,y)$ de $\mathcal{P}$, l'expression $\lambda x+\mu y$ prend sa **plus grande valeur** et sa **plus petite valeur** en des **sommets** du polygone.

Remarque

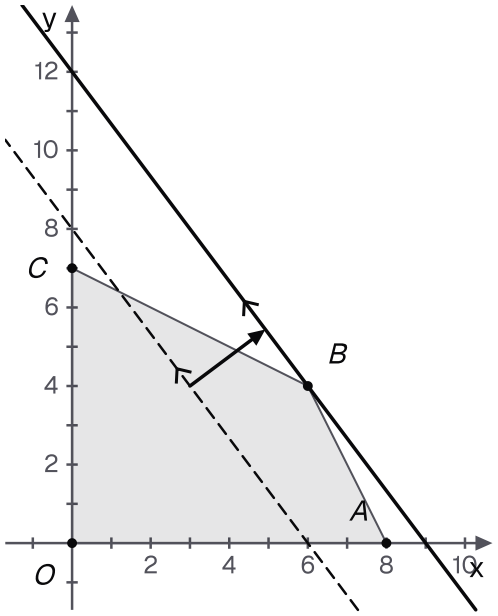
Ce résultat est admis. Sa démonstration demande des outils qui dépassent ce chapitre ; la suite l'illustre sur l'atelier.

Les valeurs aux sommets

En clair. Fixe un gain, par exemple 1200 dirhams. Les productions qui le donnent vérifient $200x+150y=1200$: c'est une droite, qui passe par $(6,0)$ et $(0,8)$.

Pour un gain plus grand, la droite $200x + 150y = k$ glisse parallèlement à elle-même, en s'éloignant de O. Pour l'atelier, la dernière de ces droites qui touche encore la région passe par le sommet $B(6, 4)$.

Cette observation illustre la propriété précédente ; elle ne la démontre pas.



Deux droites de gain parallèles : celle de 1200 dirhams, en pointillés, traverse la région, celle de 1800 dirhams ne la touche plus qu'au sommet B ; la flèche montre le sens où le gain augmente.

Exemple : comparer les sommets

On calcule le gain $200x + 150y$ en chaque sommet :

- en $O(0, 0)$: 0 ;
- en $A(8, 0)$: 1600 ;
- en $B(6, 4)$: $1200 + 600 = 1800$;
- en $C(0, 7)$: 1050.

Le plus grand gain est donc atteint en B, comme l'annonce la propriété « Programmation linéaire : valeur extrême en un sommet ». L'atelier fabrique 6 tables et 4 chaises par jour, pour 1800 dirhams.

Avec une contrainte « au moins 3 meubles », soit $x + y \geq 3$, le point O ne convient plus : $0 \geq 3$ est faux. On garde le demi-plan opposé à O. Les sommets sont alors $(3, 0)$, A, B, C et $(0, 3)$.

Pour la plus petite valeur, on garde le sommet où la valeur est la plus petite : 450 dirhams en $(0, 3)$.

Attention : tous les sommets, toutes les contraintes

X « On compare $A(8, 0)$ et $C(0, 7)$: le meilleur gain vaut 1600 dirhams. »

✓ Le sommet B, point commun de deux contraintes, a été oublié. Liste tous les sommets de la région, y compris ceux des axes.

N'oublie pas non plus $x \geq 0$ et $y \geq 0$: un nombre de tables n'est jamais négatif.

Un autre gain, puis à toi

Vérifie : Si le gain change

Le gain par table passe à 400 dirhams, celui par chaise reste 150 dirhams. Les heures disponibles ne changent pas. Quel sommet donne le plus grand gain ?

A. Le sommet $A(8, 0)$.

Juste.

Juste : $400 \times 8 = 3200$ dépasse les autres valeurs.

B. Le sommet $B(6, 4)$.

Faux.

En B, le gain vaut $2400 + 600 = 3000$, moins qu'en A.

C. Le sommet $C(0, 7)$.

Faux.

En C, le gain vaut seulement 1050.

D. Le sommet $O(0, 0)$.

Faux.

En O, l'atelier ne fabrique rien : le gain est nul.

Correction

On calcule $400x + 150y$ aux sommets : 0 en O, 3200 en A, 3000 en B, 1050 en C. Le plus grand gain est en A : 8 tables, aucune chaise.

La région ne change pas, mais le meilleur sommet change avec le gain.

À toi : Une semaine plus calme

Une autre semaine, l'atelier dispose au plus de 10 h d'assemblage et de 8 h de vernissage par jour. Les gains restent 200 dirhams par table et 150 dirhams par chaise. Trouve la production qui rapporte le plus. Écris ta réponse sur ton cahier avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le système devient $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \leq 10$ et $x + 2y \leq 8$.

Indice 2

Les sommets sur les axes se lisent avec $x = 0$ puis $y = 0$; cherche le quatrième par un déterminant.

Indice 3

Point délicat : compare les gains en tous les sommets, O compris.

Réponse
Sommets. La région a pour sommets $O(0,0)$, $(5,0)$, $(0,4)$ et un quatrième sommet, solution du système

$$\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=8 \end{cases}$$

Ici $D=3$, $D_x=12$ et $D_y=6$, donc c'est $(4,2)$.

Valeurs. Les gains valent 0 en O, 1000 en $(5,0)$, 1100 en $(4,2)$ et 600 en $(0,4)$.

Conclusion. L'atelier fabrique 4 tables et 2 chaises par jour, pour 1100 dirhams.

Remarque : Coin devoir : rédiger la conclusion

En devoir, la conclusion revient à la situation. Pour l'atelier, écris : « La région des solutions a pour sommets $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(6,4)$ et $C(0,7)$. Le gain y vaut 0, 1600, 1800 et 1050 dirhams. Le plus grand gain est atteint en B : l'atelier doit fabriquer 6 tables et 4 chaises par jour. » Donne toujours les sommets, les valeurs, puis la réponse en mots.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quelle méthode pour quelle question

- **Valeur absolue** : penser distance, ou annoncer les cas $A=c$ et $A=-c$.
- **Paramètre** : distinguer le cas où le coefficient de x est nul.
- **Second degré** : sans discriminant si une forme simple se voit ; sinon $\Delta=b^2-4ac$.
- **Signe d'un trinôme** : signe de a, sauf entre les racines.
- **Inéquation** : tout dans un membre, tableau de signes, valeurs interdites exclues.
- **Système** : déterminant D, puis D_x et D_y ; droites sécantes si $D\neq 0$.
- **Régionnement** : droite frontière et point test. **Programmation linéaire** : valeur en chaque sommet.

Le mot du prof. Avant chaque calcul, regarde la forme de ton équation ou de ton inéquation. Annonce tes cas, puis vérifie tes solutions dans l'énoncé. Ces outils reviennent dans le chapitre « Généralités sur les fonctions », pour lire des courbes et les comparer.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Équations, inéquations et systèmes » (tc · sciences · mathematiques)