BURHAN

Résumé : Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/resume

Chapitre	Semestre
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Semestre 1

Les cinq ensembles de nombres

> **À retenir : Cinq ensembles emboîtés**
>
> Tu connais depuis le collège les entiers, les décimaux, les fractions et les racines carrées. Ce chapitre leur donne un nom et un symbole : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.
>
> Chaque ensemble est contenu dans le suivant. La question centrale devient : à quel ensemble ce nombre appartient-il ?

Définition : Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. L'ensemble des **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$: il est formé des entiers naturels et de leurs opposés, $\mathbb{Z} = \{\dots ; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.

On écrit $x \in \mathbb{Z}$ pour « x appartient à $\mathbb{Z}$ » et $x \notin \mathbb{N}$ pour « x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ». Par exemple, $-3 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \notin \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Définition : Nombres décimaux

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Par exemple, $-2{,}35 = \dfrac{-235}{10^2}$, donc $-2{,}35 \in \mathbb{D}$. Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Définition : Nombres rationnels

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

En simplifiant par le plus grand diviseur commun du numérateur et du dénominateur, tout rationnel s'écrit sous **forme irréductible** $\dfrac{a}{b}$: le seul diviseur commun de a et b dans $\mathbb{N}^*$ est 1.

Méthode : prouver qu'une fraction est un décimal

1. **Simplifie** la fraction jusqu'à sa forme irréductible.
2. **Complète** le dénominateur pour atteindre $10, 100, 1000\ldots$: multiplie le haut et le bas par un même entier.
3. **Écris** le résultat $\frac{a}{10^n}$: le nombre est décimal, et tu lis son écriture à virgule.

Si aucun entier ne convient, le nombre n'est peut-être pas décimal : essaie alors le raisonnement par l'absurde de la section suivante.

Exemple

Premier nombre. Avec $8 \times 125 = 1000$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} &= \frac{1 \times 125}{8 \times 125} \\ &= \frac{125}{10^3} = 0{,}125.\end{aligned}$$

Ce nombre est décimal.

Second nombre. On simplifie d'abord par 3 : $\frac{27}{60} = \frac{9}{20}$. Puis :

$$\begin{aligned}\frac{9}{20} &= \frac{9 \times 5}{20 \times 5} \\ &= \frac{45}{10^2} = 0{,}45.\end{aligned}$$

Ce nombre est décimal lui aussi.

Nombres non décimaux, nombres irrationnels

Propriété : Le nombre 1/3 n'est pas décimal

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Définition : Nombres réels et nombres irrationnels

Les nombres qui repèrent les points d'une droite graduée forment l'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$: à chaque point de la droite correspond un unique réel, son abscisse, et à chaque réel un unique point.

Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.

Propriété : Irrationalité de √2

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Propriété : D'autres nombres irrationnels

Si n est un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel. Par exemple, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$ sont irrationnels.

Le nombre π est lui aussi irrationnel.

Méthode : prouver sur un exemple qu'un nombre n'est pas décimal ou pas rationnel

1. **Suppose** le contraire : le nombre s'écrit $\frac{a}{10^n}$, ou bien $\frac{p}{q}$ sous forme irréductible.
2. **Chasse** les dénominateurs : tu obtiens une égalité entre deux entiers.
3. **Compare** les deux membres avec un outil du chapitre sur $\mathbb{N}$: un facteur premier présent d'un seul côté, ou la parité.
4. **Conclus** : la supposition mène à une contradiction, elle est donc fausse.

Remarque : Racine d'un entier : entier ou irrationnel

La racine carrée d'un carré parfait est un entier : $\sqrt{49} = 7$ et $\sqrt{121} = 11$. Pour tout autre entier naturel n, $\sqrt{n}$ est irrationnel. Ce résultat est admis dans ce chapitre.

Attention : L'écran de la calculatrice ne prouve rien

Pour $\frac{5}{9}$, la calculatrice affiche $0{,}5555555556$. C'est une valeur approchée : le dernier chiffre est même arrondi. Un affichage fini ne prouve jamais qu'un nombre est décimal.

À l'inverse, simplifie toujours avant de conclure : $\frac{91}{13} = 7$ est un entier naturel.

Inclusions et opérations

Propriété : Inclusions entre les ensembles de nombres

On écrit $E \subset F$ (« E est inclus dans F ») lorsque tout élément de l'ensemble E appartient à l'ensemble F. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

et chacune de ces inclusions est **stricte** :

- $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$;
- $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$;
- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$;
- $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

À retenir : Le schéma des ensembles emboîtés

Dessine sur ton cahier cinq ovales emboîtés, du plus petit au plus grand : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Place un nombre dans la zone la plus petite qui le contient. Par exemple, -6 va dans $\mathbb{Z}$ hors de $\mathbb{N}$, et $0{,}9$ dans $\mathbb{D}$ hors de $\mathbb{Z}$.

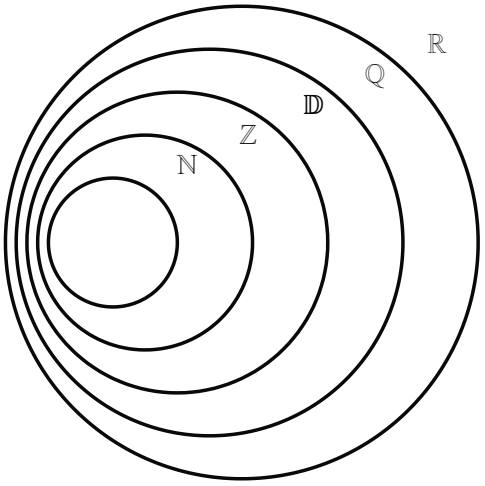


Schéma des ensembles de nombres : chaque ensemble est contenu dans le suivant, de $\mathbb{N}$ jusqu'à $\mathbb{R}$.

Propriété : Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Pour tous réels a, b et c :

- $a + b = b + a$ et $ab = ba$ (commutativité) ;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(ab)c = a(bc)$ (associativité) ;
- $a(b + c) = ab + ac$ (distributivité) ;
- $a + 0 = a$, $a \times 1 = a$, $a + (-a) = 0$ et, si $a \neq 0$, $a \times \frac{1}{a} = 1$;
- $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Pour tous réels a et c, et tous réels non nuls b et d :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Si de plus $c\neq 0$:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

Propriété : Somme et produit de décimaux, de rationnels

La somme et le produit de deux nombres décimaux sont des nombres décimaux.

La somme et le produit de deux nombres rationnels sont des nombres rationnels.

Méthode : trouver le plus petit ensemble d'un nombre

1. **Réduis** l'écriture : fraction irréductible, racine simplifiée, puissances calculées.
2. **Monte** les ensembles un par un, de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, et arrête-toi au premier qui convient.
3. **Justifie** chaque « non » par une propriété du cours, jamais par l'écran de la calculatrice.
4. **Écris** la conclusion avec $\in$ et $\notin$.

Exemple

Entier relatif. $-\dfrac{20}{5}=-4$, donc $-\dfrac{20}{5}\in\mathbb{Z}$ et $-\dfrac{20}{5}\notin\mathbb{N}$.

Décimal. $0{,}7$ est positif et $0{,}7^2=0{,}49$, donc $\sqrt{0{,}49}=0{,}7$. Ainsi $\sqrt{0{,}49}\in\mathbb{D}$, mais ce n'est pas un entier.

Réel. 45 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{45}$ est irrationnel : $\sqrt{45}\in\mathbb{R}$ et $\sqrt{45}\notin\mathbb{Q}$.

Exemple

Énoncé. Le rationnel $\dfrac{4}{3}$ est-il décimal ?

Raisonnement. Supposons que $\dfrac{4}{3}$ soit décimal. Le nombre -1 est décimal. D'après la stabilité de $\mathbb{D}$ par somme, $\dfrac{4}{3}+(-1)$ serait décimal. Or ce nombre vaut $\dfrac{1}{3}$, qui n'est pas décimal.

Conclusion. $\dfrac{4}{3}\in\mathbb{Q}$ et $\dfrac{4}{3}\notin\mathbb{D}$.

Puissances et écriture scientifique

Définition : Puissance d'exposant entier

Soit a un réel et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Si $a \neq 0$, on pose de plus $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. L'entier relatif placé en haut à droite est l'**exposant**.

Par exemple, $10^3 = 1000$, $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ et $(-2)^3 = -8$.

Propriété : Règles de calcul sur les puissances

Soit a et b deux réels non nuls, et m et n deux entiers relatifs. Alors :

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= a^{m+n}, \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^n &= a^n b^n, \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}. \end{aligned}$$

Méthode : réduire un calcul de puissances

1. **Décompose** chaque base en facteurs premiers : $6 = 2 \times 3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \times 5$.
2. **Rassemble** les puissances d'un même nombre premier.
3. **Calcule** les nouveaux exposants : somme, différence ou produit selon le cas, d'après les règles de calcul sur les puissances.
4. **Présente** le résultat sous la forme demandée.

Exemple

Énoncé. Calcule $P = \dfrac{6^3 \times 2^{-4}}{9^2}$.

Décomposition. $6^3 = 2^3 \times 3^3$ et $9^2 = 3^4$.

Règles. D'après les règles de calcul sur les puissances :

$$\begin{aligned} P &= 2^{3-4} \times 3^{3-4} \\ &= 2^{-1} \times 3^{-1}. \end{aligned}$$

Résultat. $P = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Attention : Somme de puissances et signe moins

Une somme de puissances ne se réduit pas en ajoutant les exposants : $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36$, alors que $3^5 = 243$.

Regarde aussi les parenthèses : $-5^2 = -25$, mais $(-5)^2 = 25$.

Propriété : Écriture scientifique d'un nombre décimal

Tout nombre décimal x strictement positif s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = a \times 10^p,$$

où $a \in \mathbb{D}$, $1 \leq a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$. Cette écriture est l'**écriture scientifique** de x.

Si x est un décimal strictement négatif, son écriture scientifique est $x = -a \times 10^p$, où $a \times 10^p$ est l'écriture scientifique de $-x$.

Par exemple, $43\,200 = 4{,}32 \times 10^4$ et $0{,}00071 = 7{,}1 \times 10^{-4}$.

Méthode : écrire un décimal en notation scientifique

1. **Repère** le premier chiffre non nul et place la virgule juste après lui : c'est le nombre a.
2. **Compte** les rangs parcourus par la virgule. Vers la gauche, l'exposant p est positif ; vers la droite, il est négatif.
3. **Contrôle** en recalculant $a \times 10^p$: tu dois retrouver le nombre de départ.

Exemple

Grand nombre. Dans $64\,000$, la virgule recule de 4 rangs : $64\,000 = 6{,}4 \times 10^4$. Contrôle : $6{,}4 \times 10\,000 = 64\,000$.

Petit nombre. Dans $0{,}0058$, la virgule avance de 3 rangs : $0{,}0058 = 5{,}8 \times 10^{-3}$. Contrôle : $5{,}8 \div 1000 = 0{,}0058$.

Racines carrées

Propriété : Propriétés des racines carrées

Pour tout réel $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut a.

Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$(\sqrt{a})^2 = a,$$
$$\sqrt{a^2} = a,$$
$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Si de plus $b > 0$:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Méthode : simplifier une racine carrée

1. **Écris** le nombre sous la racine comme produit d'un carré parfait, le plus grand possible, par un entier.
2. **Sépare** grâce à $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, puis remplace la racine du carré par l'entier.
3. **Réduis** une somme : additionne seulement les termes qui ont la même racine. Ainsi $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ ne se réduit pas.

Exemple

Simplification. $45 = 9 \times 5$, donc $\sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

Somme. De même, $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$. Ainsi :

$$\sqrt{45} - \sqrt{20} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}.$$

Attention : Pas de racine d'une somme terme à terme

La racine carrée ne se distribue pas sur une somme. Par exemple, $\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$, alors que $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$. Seuls le produit et le quotient se séparent.

Méthode : supprimer la racine du dénominateur

Le dénominateur est supposé non nul, avec $b \geq 0$.

1. **Si le dénominateur est** $\sqrt{b}$, avec $b \neq 0$, multiplie le haut et le bas par $\sqrt{b}$.
2. **S'il est** $\sqrt{b} + c$ ou $\sqrt{b} - c$, avec $b \neq c^2$, multiplie le haut et le bas par l'autre expression : c'est l'expression conjuguée. Ici, c est un entier ou une racine carrée.
3. **Calcule** le nouveau dénominateur. Rappel du collège : $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. Donc $(\sqrt{b} + c)(\sqrt{b} - c) = b - c^2$, sans racine de b. Simplifie ensuite.

Exemple

Racine seule. $\dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Expression conjuguée. On multiplie le haut et le bas par $\sqrt{11} + 3$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{11} - 3} &= \frac{2(\sqrt{11} + 3)}{(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)} \\ &= \frac{2(\sqrt{11} + 3)}{11 - 9}. \end{aligned}$$

Le dénominateur vaut 2 : le quotient est égal à $\sqrt{11} + 3$.

Identités remarquables

Propriété : Identités remarquables du second degré

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2,\\ (a-b)(a+b) &= a^2-b^2.\end{aligned}$$

Attention : N'oublie pas le double produit

Le carré d'une somme a trois termes : $(x+5)^2 = x^2+10x+25$. Écrire x^2+25 oublie le double produit $10x$.

Teste avec $x=1$: $6^2=36$, alors que $1+25=26$.

Propriété : Identités remarquables du troisième degré

Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2),\\ a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2).\end{aligned}$$

Méthode : factoriser par une identité

1. **Regarde** le nombre de termes et les exposants : deux carrés, trois termes avec un double produit, ou deux cubes.
2. **Nomme** a et b : chaque terme doit apparaître sous la forme d'un carré ou d'un cube.
3. **Remplace** dans l'identité choisie.
4. **Développe** le résultat pour le vérifier.

Exemple

Énoncé. Factorise y^3-8, pour tout réel y.

Forme. $8=2^3$, donc $y^3-8=y^3-2^3$, avec $a=y$ et $b=2$.

Factorisation. D'après l'identité a^3-b^3 :

$$y^3-8=(y-2)(y^2+2y+4).$$

Vérification. On développe :

$$\begin{aligned}(y-2)(y^2+2y+4)&=y^3+2y^2+4y\\&\quad-2y^2-4y-8\\&=y^3-8.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Écris 1001 comme un produit de deux entiers, sans poser de division.

Calcul. $1001 = 10^3 + 1^3$. D'après l'identité a^3+b^3, avec $a=10$ et $b=1$:

$$\begin{aligned}1001&=(10+1)(100-10+1)\\&=11\times 91.\end{aligned}$$

Pour aller plus loin. $91 = 7\times 13$, donc la décomposition en facteurs premiers est $1001 = 7\times 11\times 13$.

Attention : Le signe du terme du milieu

On a $t^3+27=(t+3)(t^2-3t+9)$: le terme $-3t$ porte le signe moins. Avec $+3t$, le produit serait faux.

Contrôle avec $t=1$: $1+27=28$ et $4\times 7=28$, mais $4\times 13=52$.

À retenir : Choisir l'écriture convenable

Une même expression a plusieurs écritures.

- La forme factorisée est commode pour un produit nul ou une valeur particulière : avec $y=2$, $(y-2)(y^2+2y+4)$ vaut 0 sans calcul.
- La forme développée est commode pour additionner ou réduire deux expressions.

Choisis l'écriture selon la question posée.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Classer un nombre** : simplifie, puis monte de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
- **Prouver qu'il est décimal** : un dénominateur puissance de 10.
- **Prouver qu'il n'est pas décimal ou pas rationnel** : l'absurde, avec un facteur premier ou la parité.
- **Calculer avec des puissances** : les facteurs premiers et les règles sur les exposants.
- **Écrire un grand ou un petit nombre** : l'écriture scientifique.
- **Simplifier une racine** : le plus grand carré parfait.
- **Supprimer une racine au dénominateur** : l'expression conjuguée.

- **Factoriser** : une identité remarquable, puis un développement de contrôle.

Décimal

$$x = \frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$$

Rationnel

$$x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*$$

Inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Produit et quotient de puissances

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a \neq 0,\ m, n \in \mathbb{Z})$$

Puissance de puissance, exposant négatif

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

Écriture scientifique

$$x = a \times 10^p,\ p \in \mathbb{Z}$$
$$a \in \mathbb{D},\ 1 \leq a < 10$$
$$(x \in \mathbb{D},\ x > 0)$$

Racines carrées

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad (\sqrt{a})^2 = a$$
$$(a \geq 0,\ b \geq 0)$$

Expression conjuguée

$$(\sqrt{b} + c)(\sqrt{b} - c) = b - c^2 \quad (b \geq 0)$$

Carré d'une somme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Différence de deux carrés

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Différence de deux cubes

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Somme de deux cubes

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, nomme la règle à chaque ligne : « d'après les règles de calcul sur les puissances », « par l'identité $a^3 - b^3$ ».

Une valeur lue sur la calculatrice est seulement approchée : écris-le. Pour un raisonnement par l'absurde, annonce la supposition et la contradiction.

Termine par une phrase de conclusion.