BURHAN

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Niveau examen	5

Exercice 1 7,5 pts

Puissances de 10 et ensembles de nombres

On considère les nombres :

$$A = \frac{6 \times 10^{4} \times 15 \times 10^{-7}}{9 \times 10^{-5}},$$
$$B = \frac{2^{-3} \times 5^{2}}{10^{-2}}.$$

1. 1 pts

Calculer d'abord $\frac{6 \times 15}{9}$, puis la puissance de 10 qui reste. En déduire la valeur de A et son écriture scientifique.

INDICE

Début : sépare les nombres et les puissances de 10. **Ensuite :** additionne et soustrais les exposants.

2. 1,5 pts

Écrire B sous forme de fraction irréductible. Vérifier ensuite que B est décimal et donner son écriture scientifique.

INDICE

Début : $2^{-3} = \frac{1}{2^{3}}$ et diviser par 10^{-2} revient à multiplier par 100. **Ensuite :** cherche un dénominateur égal à 10.

3. 1 pts

Calculer $\frac{A}{B}$ sous forme de fraction irréductible, puis donner son écriture décimale. Ce nombre est-il entier ?

INDICE

Début : diviser par $\frac{625}{2}$ revient à multiplier par $\frac{2}{625}$. **Ensuite :** simplifie par 125.

4. 3 pts

On pose $D = \frac{B}{175}$.

a) Vérifier que $D = \frac{25}{14}$.

b) Supposons que $D = \frac{a}{10^{n}}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire l'égalité entre entiers obtenue par produit en croix, puis expliquer pourquoi 7 devrait figurer dans la décomposition de 25×10^{n} en facteurs premiers.

c) En déduire que D n'est pas décimal.

INDICE

Début : $\frac{625}{2 \times 175} = \frac{625}{350}$, à simplifier par 25. **Ensuite :** $14 = 2 \times 7$; écris 25×10^{n} avec les seuls facteurs premiers 2 et 5.

5. 1 pts

Pour chacun des nombres A, B, $\dfrac{A}{B}$ et D, donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient.

INDICE

Début : reprends les conclusions des questions 1 à 4, sans refaire les calculs.

Exercice 2 6,5 pts

Deux nombres conjugués

On pose $a = 3 + \sqrt{5}$ et $b = 3 - \sqrt{5}$.

1. 1 pts

Calculer $a + b$, puis ab. À quel plus petit ensemble de nombres appartiennent ces deux résultats ?

INDICE

Début : pour le produit, reconnais l'identité $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

2. 1,5 pts

Développer a^2 et b^2, puis calculer $a^2 + b^2$. Contrôler le résultat avec l'égalité $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$.

INDICE

Début : utilise l'identité $(x+y)^2$ pour a^2 et $(x-y)^2$ pour b^2. **Ensuite :** reprends les résultats de la question 1.

3. 1,5 pts

Écrire $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$ sans racine carrée au dénominateur. En déduire $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ et son écriture décimale.

INDICE

Début : multiplie le numérateur et le dénominateur de $\dfrac{1}{a}$ par b ; la question 1 donne le dénominateur.

4. 1,5 pts

Supposons que a soit rationnel. Exprimer $\sqrt{5}$ comme la somme de a et d'un entier, puis utiliser la stabilité de $\mathbb{Q}$ par somme. Conclure sur la nature de a, puis donner le plus petit ensemble de nombres qui contient a.

INDICE

Début : $\sqrt{5} = a + (-3)$. **Ensuite :** que dit le cours de la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait ?

5. 1 pts

À l'aide de l'identité $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, calculer $a^3 + b^3$ sans développer a^3 ni b^3.

INDICE

Début : remplace x par a et y par b. **Ensuite :** les questions 1 et 2 donnent $a+b$, ab et a^2+b^2.

Exercice 3 — 6 pts

Développer, factoriser, choisir la bonne écriture

Pour tout réel x, on pose :

$$E = (2x - 1)^2 - (x + 3)^2.$$

1. — 1 pts

Développer $(2x - 1)^2$, puis $(x + 3)^2$. En déduire la forme développée et réduite de E.

INDICE

Début : les identités $(a - b)^2$ et $(a + b)^2$. **Ensuite :** attention au signe moins devant le second carré.

2. — 1 pts

Reconnaître dans l'écriture de départ une différence de deux carrés. En déduire une forme factorisée de E.

INDICE

Début : $E = A^2 - B^2$ avec $A = 2x - 1$ et $B = x + 3$. **Ensuite :** réduis chaque facteur.

3. — 1,5 pts

Calculer E lorsque $x = 0$, puis lorsque $x = 4$, puis lorsque $x = 0{,}5$, en justifiant à chaque fois le choix de l'écriture utilisée.

INDICE

Début : avec $x = 0$, la forme développée donne le résultat à vue. **Ensuite :** avec $x = 4$, un facteur s'annule.

4. — 1,5 pts

Écrire $64x^3$ comme un cube. En déduire une factorisation de $F = 1 - 64x^3$, puis la vérifier en développant.

INDICE

Début : $64 = 4^3$ et $1 = 1^3$. **Ensuite :** l'identité $a^3 - b^3$ avec $a = 1$ et $b = 4x$.

5. — 1 pts

Calculer 99^2 en écrivant $99 = 100 - 1$. En déduire, sans calculatrice, la valeur de $99^3 + 1$.

INDICE

Début : l'identité $(a - b)^2$. **Ensuite :** $99^3 + 1 = 99^3 + 1^3$, et l'identité $a^3 + b^3$ fait apparaître le facteur $99 + 1$.

Exercice 4 6 pts

Des racines carrées de multiples de 7

On pose $a = \sqrt{28}$, $b = \sqrt{63}$ et $c = \sqrt{175}$.

1. 1 pts

Écrire a, b et c sous la forme $k\sqrt{7}$, avec k entier naturel.

INDICE

Début : écris 28, 63 et 175 comme le produit d'un carré parfait par 7. **Ensuite :** utilise $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

2. 1 pts

En déduire $a + b - c$ et $a \times b$. Donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient chacun de ces deux résultats.

INDICE

Début : dans la somme, mets $\sqrt{7}$ en facteur. **Ensuite :** dans le produit, $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$.

3. 1,5 pts

Calculer $\dfrac{c}{a}$, $\dfrac{b}{a}$ et $a^2 + b^2 - c^2$. Pour chacun de ces trois nombres, donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient.

INDICE

Début : remplace a, b et c par leurs écritures de la question 1, puis simplifie par $\sqrt{7}$, qui n'est pas nul. **Ensuite :** $a^2 = 28$, car $(\sqrt{x})^2 = x$.

4. 1,5 pts

Supposons que a soit rationnel. Écrire $\sqrt{7}$ comme le produit de a par un rationnel, puis utiliser la stabilité de $\mathbb{Q}$ par produit pour obtenir une contradiction. En déduire que a, b et c sont irrationnels.

INDICE

Début : $\sqrt{7} = a \times 2^{-1}$. **Ensuite :** 7 est-il un carré parfait ? Rappelle la propriété admise du cours sur la racine carrée d'un tel entier.

5. 1 pts

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en s'appuyant sur les questions 2 à 4 : (a) la somme de deux irrationnels est toujours irrationnelle ; (b) le quotient de deux irrationnels est toujours irrationnel.

INDICE

Début : $a + b = 5\sqrt{7} = c$, et la question 2 donne $(a + b) + (-c)$. **Ensuite :** un seul contre-exemple suffit.

Exercice 5 6,5 pts

Grands et petits nombres sans calculatrice

On pose $N = 2^{10} \times 5^{13}$ et $M = 8^{-2} \times 5^{-5}$.

1. 1 pts

Écrire N sous la forme $k \times 10^{10}$, avec k entier naturel. En déduire l'écriture scientifique de N et le nombre de chiffres de son écriture décimale.

INDICE

Début : $5^{13} = 5^{10} \times 5^{3}$ et $2^{10} \times 5^{10} = (2 \times 5)^{10}$. **Ensuite :** écris $k \times 10^{10}$ avec des zéros.

2. 1 pts

Écrire M comme le produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5. En déduire l'écriture scientifique de M, puis son écriture décimale.

INDICE

Début : $8 = 2^{3}$, donc $8^{-2} = (2^{3})^{-2}$. **Ensuite :** $2^{-6} = 2^{-1} \times 2^{-5}$ et $2^{-1} = 0{,}5$.

3. 1,5 pts

En déduire les écritures scientifiques de $N \times M$ et de $\dfrac{N}{M}$, puis l'écriture décimale de $N \times M$.

INDICE

Début : pour le produit, traite à part $1{,}25$ et 5 ; pour le quotient, reviens aux puissances de 2 et de 5 de N et de M. **Ensuite :** le nombre placé devant la puissance de 10 doit être au moins égal à 1 et plus petit que 10 ; sinon, corrige l'exposant.

4. 1,5 pts

On note E l'ensemble des nombres qui s'écrivent $2^{m} \times 5^{n}$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$; ainsi $N \in E$ et $M \in E$. Donner l'écriture décimale de 2^{-1} et de 5^{-1}. En déduire, à l'aide de la stabilité de $\mathbb{D}$ par produit, que tout élément de E est décimal, c'est-à-dire que $E \subset \mathbb{D}$.

INDICE

Début : $2^{-1} = \dfrac{5}{10}$ et $5^{-1} = \dfrac{2}{10}$. **Ensuite :** si $m \geq 1$, écris 2^{m} comme $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (m facteurs) ; si $m \leq -1$, utilise de même 2^{-1} répété $-m$ fois (idem pour 5^{n}).

5. 1,5 pts

L'inclusion $\mathbb{D} \subset E$ est-elle vraie ? Pour répondre, supposer que $3 = 2^{m} \times 5^{n}$, avec m et n dans $\mathbb{Z}$, puis multiplier les deux membres par 10^{k}, où k est un entier naturel tel que $m + k$ et $n + k$ soient des entiers naturels. Conclure avec la décomposition en facteurs premiers.

INDICE

Début : $10^{k} = 2^{k} \times 5^{k}$, donc $2^{m} \times 5^{n} \times 10^{k} = 2^{m+k} \times 5^{n+k}$. **Ensuite :** compare les facteurs premiers des deux membres de l'égalité entre entiers obtenue.