BURHAN

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Niveau examen	5

Exercice 1 7,5 pts

Puissances de 10 et ensembles de nombres

On considère les nombres :

$$A = \frac{6 \times 10^{4} \times 15 \times 10^{-7}}{9 \times 10^{-5}},$$
$$B = \frac{2^{-3} \times 5^{2}}{10^{-2}}.$$

1. 1 pts

Calculer d'abord $\dfrac{6 \times 15}{9}$, puis la puissance de 10 qui reste. En déduire la valeur de A et son écriture scientifique.

INDICE

Début : sépare les nombres et les puissances de 10. **Ensuite :** additionne et soustrais les exposants.

CORRIGÉ

Nombres. $6 \times 15 = 90$, donc $\dfrac{6 \times 15}{9} = \dfrac{90}{9} = 10$.

Puissances de 10. Par les règles du produit et du quotient de puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned} \frac{10^{4} \times 10^{-7}}{10^{-5}} &= 10^{4-7+5} \\ &= 10^{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 10 \times 10^{2} = 10^{3} = 1000$, et son écriture scientifique est 1×10^{3}.

2. 1,5 pts

Écrire B sous forme de fraction irréductible. Vérifier ensuite que B est décimal et donner son écriture scientifique.

INDICE

Début : $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$ et diviser par 10^{-2} revient à multiplier par 100. **Ensuite :** cherche un dénominateur égal à 10.

CORRIGÉ

Fraction. $2^{-3} \times 5^2 = \dfrac{25}{2^3} = \dfrac{25}{8}$, et diviser par 10^{-2} revient à multiplier par $10^2 = 100$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{25}{8} \times 100 = \frac{2500}{8} \\ &= \frac{625}{2}, \end{aligned}$$

après simplification par 4. Les entiers $625 = 5^4$ et 2 n'ont aucun facteur premier commun : la fraction $\dfrac{625}{2}$ est irréductible.

Décimal. On multiplie le numérateur et le dénominateur par 5 :

$$\begin{aligned} \frac{625}{2} &= \frac{625 \times 5}{2 \times 5} \\ &= \frac{3125}{10^1} = 312{,}5. \end{aligned}$$

B s'écrit $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a = 3125$ et $n = 1$: B est décimal.

Écriture scientifique. La virgule recule de 2 rangs : $312{,}5 = 3{,}125 \times 10^2$.

Conclusion. $B = \dfrac{625}{2}$ sous forme irréductible ; $B = 312{,}5$ est décimal, et son écriture scientifique est $B = 3{,}125 \times 10^2$.

3. 1 pts

Calculer $\dfrac{A}{B}$ sous forme de fraction irréductible, puis donner son écriture décimale. Ce nombre est-il entier ?

INDICE

Début : diviser par $\dfrac{625}{2}$ revient à multiplier par $\dfrac{2}{625}$. **Ensuite :** simplifie par 125.

CORRIGÉ

Fraction. Diviser par $\dfrac{625}{2}$ revient à multiplier par son inverse $\dfrac{2}{625}$:

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= 1000 \times \frac{2}{625} \\ &= \frac{2000}{625} = \frac{16}{5},\end{aligned}$$

après simplification par 125, car $2000 = 125 \times 16$ et $625 = 125 \times 5$. Les entiers $16 = 2^4$ et 5 n'ont aucun facteur premier commun : la fraction est irréductible.

Écriture décimale. $\dfrac{16}{5} = \dfrac{32}{10} = 3{,}2$.

Conclusion. $\dfrac{A}{B} = \dfrac{16}{5}$, soit $3{,}2$. Cette écriture porte un chiffre non nul après la virgule : $\dfrac{A}{B}$ n'est pas entier.

4. 3 pts

On pose $D = \dfrac{B}{175}$.

a) Vérifier que $D = \dfrac{25}{14}$.

b) Supposons que $D = \dfrac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Écrire l'égalité entre entiers obtenue par produit en croix, puis expliquer pourquoi 7 devrait figurer dans la décomposition de 25×10^n en facteurs premiers.

c) En déduire que D n'est pas décimal.

INDICE

Début : $\dfrac{625}{2 \times 175} = \dfrac{625}{350}$, à simplifier par 25. **Ensuite :** $14 = 2 \times 7$; écris 25×10^n avec les seuls facteurs premiers 2 et 5.

CORRIGÉ

a) D'après la question 2, $B = \dfrac{625}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} D &= \frac{625}{2} \times \frac{1}{175} \\ &= \frac{625}{350} = \frac{25}{14}, \end{aligned}$$

après simplification par 25, car $625 = 25 \times 25$ et $350 = 25 \times 14$.

b) Les dénominateurs 14 et 10^n ne sont pas nuls. Le produit en croix appliqué à $\dfrac{25}{14} = \dfrac{a}{10^n}$ donne $14a = 25 \times 10^n$.

Le membre de droite est un entier naturel non nul et 14 est positif : a est un entier naturel non nul.

De plus, $14a = 7 \times (2a)$ est un multiple de 7 : le facteur premier 7 figure dans sa décomposition. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, 7 devrait figurer dans celle de 25×10^n.

c) Si $n = 0$, $25 \times 10^0 = 5^2$. Si $n \geq 1$, d'après les règles de calcul sur les puissances :

$$\begin{aligned} 25 \times 10^n &= 5^2 \times 2^n \times 5^n \\ &= 2^n \times 5^{n+2}. \end{aligned}$$

Le facteur premier 7 n'y figure jamais, ce qui contredit b) : la supposition est fausse.

Conclusion. $D = \dfrac{25}{14}$ ne s'écrit sous aucune forme $\dfrac{a}{10^n}$: $D \notin \mathbb{D}$.

5. 1 pts

Pour chacun des nombres A, B, $\dfrac{A}{B}$ et D, donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient.

INDICE

Début : reprends les conclusions des questions 1 à 4, sans refaire les calculs.

CORRIGÉ

On reprend les résultats des questions 1 à 4.

- $A = 1000$ est un entier naturel : $A \in \mathbb{N}$.
- $B = 312{,}5$ est décimal et n'est pas entier : son plus petit ensemble est $\mathbb{D}$.
- $\dfrac{A}{B} = 3{,}2$ est décimal et n'est pas entier : son plus petit ensemble est $\mathbb{D}$.
- $D = \dfrac{25}{14}$ est rationnel mais n'est pas décimal : son plus petit ensemble est $\mathbb{Q}$.

Conclusion. Les plus petits ensembles sont $\mathbb{N}$ pour A, $\mathbb{D}$ pour B et pour $\dfrac{A}{B}$, et $\mathbb{Q}$ pour D.

Exercice 2 6,5 pts

Deux nombres conjugués

On pose $a = 3 + \sqrt{5}$ et $b = 3 - \sqrt{5}$.

1. 1 pts

Calculer $a + b$, puis ab. À quel plus petit ensemble de nombres appartiennent ces deux résultats ?

INDICE

Début : pour le produit, reconnais l'identité $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.

CORRIGÉ

Somme.

$$\begin{aligned} a + b &= 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Produit. Par l'identité $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, avec $x = 3$ et $y = \sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} ab &= 3^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= 9 - 5 = 4. \end{aligned}$$

Conclusion. $a + b = 6$ et $ab = 4$ sont des entiers naturels : $a + b \in \mathbb{N}$ et $ab \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble qui contient chacun d'eux.

2. 1,5 pts

Développer a^2 et b^2, puis calculer a^2+b^2. Contrôler le résultat avec l'égalité $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

INDICE

Début : utilise l'identité $(x+y)^2$ pour a^2 et $(x-y)^2$ pour b^2. **Ensuite :** reprends les résultats de la question 1.

CORRIGÉ

Carré de a. Par l'identité $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, avec $x=3$ et $y=\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} a^2 &= 9+6\sqrt{5}+5 \\ &= 14+6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Carré de b. Par l'identité $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$:

$$\begin{aligned} b^2 &= 9-6\sqrt{5}+5 \\ &= 14-6\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Somme. Les termes en $\sqrt{5}$ s'éliminent :

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 14+14 \\ &= 28. \end{aligned}$$

Contrôle. Avec les résultats de la question 1 :

$$\begin{aligned} (a+b)^2-2ab &= 6^2-2\times 4 \\ &= 36-8=28. \end{aligned}$$

Conclusion. $a^2=14+6\sqrt{5}$, $b^2=14-6\sqrt{5}$ et $a^2+b^2=28$; le contrôle redonne la même valeur.

3. 1,5 pts

Écrire $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sans racine carrée au dénominateur. En déduire $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et son écriture décimale.

INDICE

Début : multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{a}$ par b ; la question 1 donne le dénominateur.

CORRIGÉ

Inverses. b n'est pas nul, puisque $ab=4$. On multiplie le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{a}$ par b, et l'on utilise $ab=4$ (question 1) :

$$\frac{1}{a}=\frac{b}{ab}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

De même, a n'est pas nul et :

$$\frac{1}{b}=\frac{a}{ab}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Somme.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=\frac{3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}}{4}\\&=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\&=\frac{15}{10}=1{,}5.\end{aligned}$$

Conclusion. $\frac{1}{a}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$, $\frac{1}{b}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$, et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

4. 1,5 pts

Supposons que a soit rationnel. Exprimer $\sqrt{5}$ comme la somme de a et d'un entier, puis utiliser la stabilité de $\mathbb{Q}$ par somme. Conclure sur la nature de a, puis donner le plus petit ensemble de nombres qui contient a.

INDICE

Début : $\sqrt{5}=a+(-3)$. **Ensuite :** que dit le cours de la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait ?

CORRIGÉ

Écriture de $\sqrt{5}$. Comme $a=3+\sqrt{5}$, on a $\sqrt{5}=a+(-3)$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons a rationnel. L'entier -3 est rationnel. Par stabilité de $\mathbb{Q}$ par somme, $\sqrt{5}=a+(-3)$ serait rationnel.

Contradiction. 5 n'est pas un carré parfait : d'après la propriété admise du cours, $\sqrt{5}$ est irrationnel. La supposition est donc fausse.

Conclusion. a est irrationnel : le plus petit ensemble de nombres qui contient a est $\mathbb{R}$.

5. 1 pts

À l'aide de l'identité $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, calculer $a^3 + b^3$ sans développer a^3 ni b^3.

INDICE

Début : remplace x par a et y par b. **Ensuite :** les questions 1 et 2 donnent $a+b$, ab et a^2+b^2.

CORRIGÉ

Par l'identité $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, avec $x = a$ et $y = b$:

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 \\ &= (a+b)(a^2 + b^2 - ab). \end{aligned}$$

D'après les questions 1 et 2, $a + b = 6$, $ab = 4$ et $a^2 + b^2 = 28$. Donc :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= 6 \times (28 - 4) \\ &= 6 \times 24 = 144. \end{aligned}$$

Conclusion. $a^3 + b^3 = 144$.

Exercice 3 — 6 pts

Développer, factoriser, choisir la bonne écriture

Pour tout réel x, on pose :

$$E = (2x-1)^2 - (x+3)^2.$$

1. — 1 pts

Développer $(2x-1)^2$, puis $(x+3)^2$. En déduire la forme développée et réduite de E.

INDICE

Début : les identités $(a-b)^2$ et $(a+b)^2$. **Ensuite :** attention au signe moins devant le second carré.

CORRIGÉ

Carrés. Par les identités remarquables du carré d'une différence et du carré d'une somme, pour tout réel x :

$$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1,$$
$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Réduction. Le signe moins placé devant le second carré change le signe de chacun de ses termes :

$$\begin{aligned} E &= 4x^2 - 4x + 1 \\ &\quad - x^2 - 6x - 9 \\ &= 3x^2 - 10x - 8. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $E = 3x^2 - 10x - 8$.

2. — 1 pts

Reconnaître dans l'écriture de départ une différence de deux carrés. En déduire une forme factorisée de E.

INDICE

Début : $E = A^2 - B^2$ avec $A = 2x-1$ et $B = x+3$. **Ensuite :** réduis chaque facteur.

CORRIGÉ

Différence de deux carrés. On écrit $E = A^2 - B^2$ avec $A = 2x-1$ et $B = x+3$. Par l'identité $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, $E = (A-B)(A+B)$.

Facteurs. On réduit chacun d'eux :

$$\begin{aligned} A - B &= 2x - 1 - x - 3 \\ &= x - 4, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} A + B &= 2x - 1 + x + 3 \\ &= 3x + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x :

$$E = (x-4)(3x+2).$$

3. 1,5 pts

Calculer E lorsque $x = 0$, puis lorsque $x = 4$, puis lorsque $x = 0{,}5$, en justifiant à chaque fois le choix de l'écriture utilisée.

INDICE

Début : avec $x = 0$, la forme développée donne le résultat à vue. **Ensuite :** avec $x = 4$, un facteur s'annule.

CORRIGÉ

Pour $x = 0$. Dans la forme développée, les termes en x^2 et en x s'annulent : elle donne $E = -8$ à vue.

Pour $x = 4$. Dans la forme factorisée, le facteur $x - 4$ est nul ; un produit dont un facteur est nul vaut 0, donc $E = 0$ sans autre calcul.

Pour $x = 0{,}5$. Aucune forme ne donne le résultat à vue. La forme factorisée ne demande que deux sommes et un produit : $E = (0{,}5 - 4)(1{,}5 + 2) = -3{,}5 \times 3{,}5 = -12{,}25$.

Contrôle avec la forme développée : $3 \times 0{,}25 - 5 - 8 = -12{,}25$.

Conclusion. $E = -8$ pour $x = 0$, $E = 0$ pour $x = 4$ et $E = -12{,}25$ pour $x = 0{,}5$.

4. 1,5 pts

Écrire $64x^3$ comme un cube. En déduire une factorisation de $F = 1 - 64x^3$, puis la vérifier en développant.

INDICE

Début : $64 = 4^3$ et $1 = 1^3$. **Ensuite :** l'identité $a^3 - b^3$ avec $a = 1$ et $b = 4x$.

CORRIGÉ

Cube. $64 = 4^3$; par la règle de la puissance d'un produit, $64x^3 = 4^3 \times x^3 = (4x)^3$.

Factorisation. $F = 1^3 - (4x)^3$. Par l'identité $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, avec $a = 1$ et $b = 4x$, on obtient, pour tout réel x :

$$F = (1 - 4x)(1 + 4x + 16x^2).$$

Vérification. On développe par distributivité :

$$\begin{aligned}&(1 - 4x)(1 + 4x + 16x^2)\\ &= 1 + 4x + 16x^2\\ &\quad - 4x - 16x^2 - 64x^3\\ &= 1 - 64x^3.\end{aligned}$$

Conclusion. $64x^3 = (4x)^3$ et, pour tout réel x, $F = (1 - 4x)(1 + 4x + 16x^2)$; le développement redonne bien $1 - 64x^3$.

5. 1 pts

Calculer 99^2 en écrivant $99 = 100 - 1$. En déduire, sans calculatrice, la valeur de $99^3 + 1$.

INDICE

Début : l'identité $(a-b)^2$. **Ensuite :** $99^3 + 1 = 99^3 + 1^3$, et l'identité $a^3 + b^3$ fait apparaître le facteur $99 + 1$.

CORRIGÉ

Carré. $99 = 100 - 1$. Par l'identité du carré d'une différence :

$$\begin{aligned} 99^2 &= 100^2 - 2 \times 100 + 1 \\ &= 10\,000 - 200 + 1 \\ &= 9801. \end{aligned}$$

Somme de cubes. $99^3 + 1 = 99^3 + 1^3$. Par l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, avec $a = 99$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} &99^3 + 1 \\ &= (99 + 1)(99^2 - 99 + 1) \\ &= 100 \times (9801 - 98) \\ &= 100 \times 9703 = 970\,300. \end{aligned}$$

Conclusion. $99^2 = 9801$ et $99^3 + 1 = 970\,300$.

Exercice 4 6 pts

Des racines carrées de multiples de 7

On pose $a = \sqrt{28}$, $b = \sqrt{63}$ et $c = \sqrt{175}$.

1. 1 pts

Écrire a, b et c sous la forme $k\sqrt{7}$, avec k entier naturel.

INDICE

Début : écris 28, 63 et 175 comme le produit d'un carré parfait par 7. **Ensuite :** utilise $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.

CORRIGÉ

Décompositions. $28 = 2^2 \times 7$, $63 = 3^2 \times 7$ et $175 = 5^2 \times 7$.

Racines. D'après la propriété $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ pour x et y positifs, et $\sqrt{k^2} = k$ pour k positif :

$$\sqrt{28} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

De même pour b et c.

Conclusion. $a = 2\sqrt{7}$, $b = 3\sqrt{7}$ et $c = 5\sqrt{7}$.

2. 1 pts

En déduire $a + b - c$ et $a \times b$. Donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient chacun de ces deux résultats.

INDICE

Début : dans la somme, mets $\sqrt{7}$ en facteur. **Ensuite :** dans le produit, $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$.

CORRIGÉ

Somme. D'après la question 1, on met $\sqrt{7}$ en facteur :

$$\begin{aligned} &a + b - c \\ &= 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} \\ &= (2 + 3 - 5)\sqrt{7} = 0. \end{aligned}$$

Produit. On utilise $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$:

$$\begin{aligned} a \times b &= 2\sqrt{7} \times 3\sqrt{7} \\ &= 6 \times (\sqrt{7})^2 \\ &= 6 \times 7 = 42. \end{aligned}$$

Conclusion. $a + b - c = 0$ et $a \times b = 42$ sont des entiers naturels : le plus petit ensemble qui contient chacun d'eux est $\mathbb{N}$.

3. 1,5 pts

Calculer $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ et $a^2+b^2-c^2$. Pour chacun de ces trois nombres, donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient.

INDICE

Début : remplace a, b et c par leurs écritures de la question 1, puis simplifie par $\sqrt{7}$, qui n'est pas nul.

Ensuite : $a^2=28$, car $(\sqrt{x})^2=x$.

CORRIGÉ

Quotients. $\sqrt{7}$ n'est pas nul ; on simplifie par $\sqrt{7}$:

$$\begin{aligned}\frac{c}{a}&=\frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\frac{5}{2}\\&=\frac{25}{10}=2{,}5,\\\frac{b}{a}&=\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\frac{3}{2}\\&=\frac{15}{10}=1{,}5.\end{aligned}$$

Ce sont deux décimaux qui ne sont pas entiers : leur plus petit ensemble est $\mathbb{D}$.

Carrés. Pour tout réel positif x, $(\sqrt{x})^2=x$. Donc $a^2=28$, $b^2=63$ et $c^2=175$:

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-c^2\\&=28+63-175=-84.\end{aligned}$$

-84 est un entier négatif : son plus petit ensemble est $\mathbb{Z}$.

Conclusion. $\frac{c}{a}=2{,}5$ et $\frac{b}{a}=1{,}5$ ont pour plus petit ensemble $\mathbb{D}$; $a^2+b^2-c^2=-84$ a pour plus petit ensemble $\mathbb{Z}$.

4. 1,5 pts

Supposons que a soit rationnel. Écrire $\sqrt{7}$ comme le produit de a par un rationnel, puis utiliser la stabilité de $\mathbb{Q}$ par produit pour obtenir une contradiction. En déduire que a, b et c sont irrationnels.

INDICE

Début : $\sqrt{7} = a \times 2^{-1}$. **Ensuite :** 7 est-il un carré parfait ? Rappelle la propriété admise du cours sur la racine carrée d'un tel entier.

CORRIGÉ

Écriture de $\sqrt{7}$. D'après la question 1, $a = 2\sqrt{7}$, donc $\sqrt{7} = a \times 2^{-1}$.

Raisonnement par l'absurde. Supposons a rationnel. Le nombre $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ est rationnel. Par stabilité de $\mathbb{Q}$ par produit, $\sqrt{7}$ serait rationnel.

Contradiction. 7 n'est pas un carré parfait : d'après la propriété admise du cours, $\sqrt{7}$ est irrationnel. Donc a est irrationnel.

Cas de b et de c. De même, $\sqrt{7} = b \times 3^{-1} = c \times 5^{-1}$, où 3^{-1} et 5^{-1} sont rationnels : si b ou c était rationnel, $\sqrt{7}$ le serait aussi.

Conclusion. a, b et c sont irrationnels.

5. 1 pts

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en s'appuyant sur les questions 2 à 4 : (a) la somme de deux irrationnels est toujours irrationnelle ; (b) le quotient de deux irrationnels est toujours irrationnel.

INDICE

Début : $a + b = 5\sqrt{7} = c$, et la question 2 donne $(a + b) + (-c)$. **Ensuite :** un seul contre-exemple suffit.

CORRIGÉ

(a) Fausse. D'après la question 1, $a + b = 5\sqrt{7} = c$, qui est irrationnel (question 4). Le nombre $-c$ est irrationnel lui aussi : sinon $c = (-1) \times (-c)$ serait rationnel, par stabilité de $\mathbb{Q}$ par produit. Pourtant, d'après la question 2, $(a + b) + (-c) = 0$: la somme des deux irrationnels $a + b$ et $-c$ est rationnelle.

(b) Fausse. c et a sont irrationnels (question 4), mais $\dfrac{c}{a} = 2{,}5$ est décimal, donc rationnel (question 3).

Conclusion. Les deux affirmations sont fausses. Contrairement à $\mathbb{Q}$, l'ensemble des irrationnels n'est stable ni par somme, ni par quotient ; il ne l'est pas non plus par produit, puisque $a \times b = 42$ (question 2).

Exercice 5 6,5 pts

Grands et petits nombres sans calculatrice

On pose $N = 2^{10} \times 5^{13}$ et $M = 8^{-2} \times 5^{-5}$.

1. 1 pts

Écrire N sous la forme $k \times 10^{10}$, avec k entier naturel. En déduire l'écriture scientifique de N et le nombre de chiffres de son écriture décimale.

INDICE

Début : $5^{13} = 5^{10} \times 5^3$ et $2^{10} \times 5^{10} = (2 \times 5)^{10}$. **Ensuite :** écris $k \times 10^{10}$ avec des zéros.

CORRIGÉ

Puissances. Par la règle du produit de puissances, $5^{13} = 5^{10} \times 5^3$; par celle de la puissance d'un produit, $2^{10} \times 5^{10} = (2 \times 5)^{10} = 10^{10}$. Donc :

$$\begin{aligned} N &= 2^{10} \times 5^{10} \times 5^3 \\ &= 10^{10} \times 125 \\ &= 125 \times 10^{10}. \end{aligned}$$

Écriture scientifique. $125 = 1{,}25 \times 10^2$, donc :

$$\begin{aligned} N &= 1{,}25 \times 10^2 \times 10^{10} \\ &= 1{,}25 \times 10^{12}. \end{aligned}$$

Chiffres. L'écriture décimale de N est 125 suivi de 10 zéros : elle compte $3 + 10 = 13$ chiffres.

Conclusion. $N = 125 \times 10^{10}$, son écriture scientifique est $1{,}25 \times 10^{12}$ et son écriture décimale compte 13 chiffres.

2. 1 pts

Écrire M comme le produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de 5. En déduire l'écriture scientifique de M, puis son écriture décimale.

INDICE

Début : $8 = 2^3$, donc $8^{-2} = (2^3)^{-2}$. **Ensuite :** $2^{-6} = 2^{-1} \times 2^{-5}$ et $2^{-1} = 0{,}5$.

CORRIGÉ

Puissances. $8 = 2^3$; par la règle de la puissance d'une puissance, $8^{-2} = (2^3)^{-2} = 2^{-6}$. Donc $M = 2^{-6} \times 5^{-5}$.

Écriture scientifique. $2^{-6} = 2^{-1} \times 2^{-5}$ et $2^{-5} \times 5^{-5} = (2 \times 5)^{-5} = 10^{-5}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M &= 2^{-1} \times 10^{-5} \\ &= 0{,}5 \times 10^{-5} \\ &= 5 \times 10^{-1} \times 10^{-5} \\ &= 5 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Écriture décimale. $M = 0{,}000005$.

Conclusion. $M = 2^{-6} \times 5^{-5}$; son écriture scientifique est 5×10^{-6} et son écriture décimale $0{,}000005$.

3. 1,5 pts

En déduire les écritures scientifiques de $N \times M$ et de $\dfrac{N}{M}$, puis l'écriture décimale de $N \times M$.

INDICE

Début : pour le produit, traite à part $1{,}25$ et 5 ; pour le quotient, reviens aux puissances de 2 et de 5 de N et de M. **Ensuite :** le nombre placé devant la puissance de 10 doit être au moins égal à 1 et plus petit que 10 ; sinon, corrige l'exposant.

CORRIGÉ

Produit. D'après les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned} & N \times M \\ &= (1{,}25 \times 5) \times 10^{12+(-6)} \\ &= 6{,}25 \times 10^{6}. \end{aligned}$$

Comme $6{,}25$ a un seul chiffre, non nul, avant la virgule, c'est l'écriture scientifique. Son écriture décimale est $6\,250\,000$.

Quotient. Par la règle du quotient de deux puissances d'un même nombre :

$$\begin{aligned} \frac{N}{M} &= 2^{10-(-6)} \times 5^{13-(-5)} \\ &= 2^{16} \times 5^{18} \\ &= (2 \times 5)^{16} \times 5^{2} \\ &= 25 \times 10^{16}. \end{aligned}$$

Or $25 = 2{,}5 \times 10^{1}$, d'où $\dfrac{N}{M} = 2{,}5 \times 10^{17}$.

Conclusion. $N \times M = 6{,}25 \times 10^{6}$, d'écriture décimale $6\,250\,000$, et $\dfrac{N}{M} = 2{,}5 \times 10^{17}$.

4. 1,5 pts

On note E l'ensemble des nombres qui s'écrivent $2^m \times 5^n$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$; ainsi $N \in E$ et $M \in E$. Donner l'écriture décimale de 2^{-1} et de 5^{-1}. En déduire, à l'aide de la stabilité de $\mathbb{D}$ par produit, que tout élément de E est décimal, c'est-à-dire que $E \subset \mathbb{D}$.

INDICE

Début : $2^{-1} = \dfrac{5}{10}$ et $5^{-1} = \dfrac{2}{10}$. **Ensuite :** si $m \geq 1$, écris 2^m comme $2 \times 2 \times \cdots \times 2$ (m facteurs) ; si $m \leq -1$, utilise de même 2^{-1} répété $-m$ fois (idem pour 5^n).

CORRIGÉ

Inverses. $2^{-1} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$ et $5^{-1} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$: ce sont deux décimaux.

Puissances de 2. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

- Si $m \geq 1$, 2^m est le produit de m facteurs égaux à 2.
- Si $m = 0$, $2^m = 1$.
- Si $m \leq -1$, $2^m = (2^{-1})^{-m}$ est le produit de $-m$ facteurs égaux à $0{,}5$.

Dans chaque cas, d'après la stabilité de $\mathbb{D}$ par produit, 2^m est décimal. De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 5^n est décimal.

Produit. Tout élément de E s'écrit $2^m \times 5^n$, produit de deux décimaux : par la même stabilité, il est décimal.

Conclusion. $2^{-1} = 0{,}5$, $5^{-1} = 0{,}2$, et tout élément de E est décimal : $E \subset \mathbb{D}$.

5. 1,5 pts

L'inclusion $\mathbb{D} \subset E$ est-elle vraie ? Pour répondre, supposer que $3 = 2^m \times 5^n$, avec m et n dans $\mathbb{Z}$, puis multiplier les deux membres par 10^k, où k est un entier naturel tel que $m + k$ et $n + k$ soient des entiers naturels. Conclure avec la décomposition en facteurs premiers.

INDICE

Début : $10^k = 2^k \times 5^k$, donc $2^m \times 5^n \times 10^k = 2^{m+k} \times 5^{n+k}$. **Ensuite :** compare les facteurs premiers des deux membres de l'égalité entre entiers obtenue.

CORRIGÉ

Supposition. Supposons $3 \in E$: il existe m et n dans $\mathbb{Z}$ tels que $3 = 2^m \times 5^n$. Soit k un entier naturel tel que $m + k$ et $n + k$ soient des entiers naturels.

Égalité entre entiers. On multiplie les deux membres par $10^k = 2^k \times 5^k$:

$$3 \times 10^k = 2^{m+k} \times 5^{n+k}.$$

Les deux membres sont des entiers naturels.

Contradiction. Le membre de gauche est un multiple de 3 : le facteur premier 3 figure dans sa décomposition. Dans celui de droite, les seuls facteurs premiers possibles sont 2 et 5. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, c'est impossible : $3 \notin E$.

Conclusion. $3 = \dfrac{3}{10^0}$ est décimal, mais $3 \notin E$: l'inclusion $\mathbb{D} \subset E$ est fausse. Seule l'inclusion $E \subset \mathbb{D}$ est vraie.