BURHAN

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Entraînement	7

Exercice 1

Simplifier quatre nombres, puis les classer

On considère les nombres :

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2^4 \times 3^3}{6^3}, \\
y &= (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) - 6, \\
z &= \frac{3}{5} - \frac{13}{4}, \\
w &= \sqrt{12} - \sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

1.

Simplifier x et y.

INDICE

Outil : pour x, décompose 6 en facteurs premiers ; pour y, reconnais une identité remarquable.

2.

Simplifier z et w.

INDICE

Outil : pour z, réduis au dénominateur 20 ; pour w, simplifie d'abord $\sqrt{12}$.

3.

Donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient chacun des nombres x, y, z et w. Justifier.

INDICE

Outil : utilise les formes simplifiées des questions 1 et 2 ; pour w, pense aux racines carrées irrationnelles.

Exercice 2

La racine carrée de 3 est irrationnelle

On admet que tout entier naturel n s'écrit sous l'une des trois formes $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, avec $k \in \mathbb{N}$: c'est la division de n par 3, vue dans le chapitre sur $\mathbb{N}$.

1.

Soit n un entier naturel qui n'est pas un multiple de 3. Démontrer que n^2 n'est pas un multiple de 3.

INDICE

Outil : deux cas seulement, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Dans chaque cas, développe n^2 avec l'identité $(a+b)^2$ et mets 3 en facteur autant que possible.

2.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel. On l'écrit sous forme irréductible $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que $p^2 = 3q^2$, puis que p est un multiple de 3.

INDICE

Outil : élève l'égalité au carré. Pour la suite, raisonne ainsi : si p n'était pas un multiple de 3, que dirait la question 1 de p^2 ?

3.

On écrit $p = 3j$, avec $j \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que q est aussi un multiple de 3, puis conclure.

INDICE

Outil : remplace p par $3j$ dans $p^2 = 3q^2$ et divise par 3. Tu retrouves la situation de la question 2, avec q à la place de p.

Exercice 3

Une fraction qui n'est pas décimale

La calculatrice affiche $0{,}8333333333$ pour $\frac{5}{6}$. Ce n'est qu'une valeur approchée : $0{,}8333333333 \times 6 = 4{,}9999999998$, et non 5. L'écran ne permet donc pas de savoir si $\frac{5}{6}$ est décimal : il faut raisonner.

1.

Supposons que $\frac{5}{6} = \frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $6a = 5 \times 10^n$, puis que 5×10^n est un multiple de 3.

INDICE

Outil : fais le produit en croix, puis écris $6 = 3 \times 2$.

2.

Écrire la décomposition de 5×10^n en produit de facteurs premiers. En déduire que $\frac{5}{6}$ n'est pas décimal.

INDICE

Outil : sépare les cas $n = 0$ et $n \geq 1$; $10 = 2 \times 5$. Puis utilise l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

3.

En déduire que $\frac{5}{24}$ n'est pas décimal.

INDICE

Outil : multiplie $\frac{5}{24}$ par le décimal 4, et souviens-toi que le produit de deux décimaux est décimal.

Exercice 4

Réduire des expressions avec puissances et racines

On pose :

$$A = \frac{(-2)^6 \times 3^{-2}}{4^2 \times 3^{-4}},$$
$$B = 2\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{3},$$
$$C = (2\sqrt{5} - 1)^2,$$
$$D = \frac{10^{-3} \times 25^2}{5^3}.$$

1.

Calculer A.

INDICE

Outil : l'exposant 6 est pair ; écris 4^2 comme une puissance de 2, puis regroupe les puissances de 3.

2.

Écrire B sous la forme $k\sqrt{3}$, avec k entier.

INDICE

Outil : $27 = 9 \times 3$ et $48 = 16 \times 3$.

3.

Écrire C sous la forme $m + n\sqrt{5}$, avec m et n entiers.

INDICE

Outil : l'identité $(a-b)^2$, avec $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 1$; calcule $(2\sqrt{5})^2$ à part.

4.

Calculer D et donner son écriture scientifique.

INDICE

Outil : $25^2 = 5^4$; simplifie par 5^3 avant de t'occuper de 10^{-3}.

Exercice 5

Deux quotients conjugués

On pose $u = \dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ et $v = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

1.

Calculer $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

INDICE

Outil : l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2.

En déduire une écriture de u et de v sans racine carrée au dénominateur.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur de u par $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; fais de même pour v avec l'autre expression.

3.

Calculer $u+v$ et $u \times v$. Donner le plus petit ensemble de nombres qui contient chacun d'eux.

INDICE

Outil : pour la somme, utilise la question 2 ; pour le produit, l'écriture de départ et la question 1 suffisent.

Exercice 6

Factoriser avec une somme de cubes

Pour tout réel x, on pose :

$$E = 27x^3 + 1 \\ \quad - (3x+1)(2x+5).$$

1.

Écrire $27x^3$ comme le cube d'une expression, puis factoriser $27x^3 + 1$.

INDICE

Outil : $27 = 3^3$; utilise l'identité $a^3 + b^3$ avec $b = 1$.

2.

En déduire que $E = (3x+1)(9x^2 - 5x - 4)$.

INDICE

Outil : après la question 1, les deux termes de E ont un facteur commun.

3.

Développer $(9x+4)(x-1)$. En déduire une écriture de E comme produit de trois facteurs.

INDICE

Outil : développe par distributivité, puis compare au second facteur de la question 2.

4.

Calculer la valeur de E pour $x = 1$, d'abord avec l'écriture de départ, puis avec celle de la question 3.

INDICE

Outil : dans un produit, un facteur nul suffit.

Exercice 7

Écritures scientifiques : du virus à la Lune

On utilise les valeurs suivantes, données avec peu de chiffres :

- un cheveu a une épaisseur d'environ $0{,}00008$ m ;
- un virus de la grippe mesure environ $0{,}0000001$ m ;
- la distance de la Terre à la Lune vaut environ $384\,000$ km.

Les résultats obtenus avec ces valeurs sont donc des valeurs approchées.

1.

Donner l'écriture scientifique de chacune des trois longueurs, exprimée en mètres.

INDICE

Outil : pour la distance, écris d'abord 1 km $= 10^3$ m.

2.

Combien de virus faut-il aligner pour couvrir l'épaisseur d'un cheveu ? Donner le résultat avec une puissance de 10, puis en écriture décimale.

INDICE

Outil : divise l'épaisseur du cheveu par la taille du virus ; pour les puissances de 10, regarde la différence des exposants.

3.

Combien de cheveux faut-il placer côte à côte pour couvrir la distance de la Terre à la Lune ? Donner l'écriture scientifique du résultat.

INDICE

Outil : $\dfrac{3{,}84}{8} = 0{,}48$. Ce nombre n'a pas un chiffre non nul avant la virgule : écris-le à son tour avec une puissance de 10.