BURHAN

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Entraînement	7

Exercice 1

Simplifier quatre nombres, puis les classer

On considère les nombres :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2^4 \times 3^3}{6^3}, \\ y &= (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) - 6, \\ z &= \frac{3}{5} - \frac{13}{4}, \\ w &= \sqrt{12} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

1.

Simplifier x et y.

INDICE

Outil : pour x, décompose 6 en facteurs premiers ; pour y, reconnais une identité remarquable.

CORRIGÉ

Calcul de x. $6 = 2 \times 3$; par la règle de la puissance d'un produit, $6^3 = 2^3 \times 3^3$. On simplifie par 3^3, puis on applique la règle du quotient de deux puissances de 2 :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2^4 \times 3^3}{2^3 \times 3^3} \\ &= 2^{4-3} = 2. \end{aligned}$$

Calcul de y. Par l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, avec $a = \sqrt{5}$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) &= 5 - 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Donc $y = 4 - 6 = -2$.

Conclusion. $x = 2$ et $y = -2$.

2.

Simplifier z et w.

INDICE

Outil : pour z, réduis au dénominateur 20 ; pour w, simplifie d'abord $\sqrt{12}$.

CORRIGÉ

Calcul de z. Le dénominateur commun est 20 : $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ et $\frac{13}{4} = \frac{65}{20}$. Donc $z = \frac{12}{20} - \frac{65}{20} = -\frac{53}{20}$.

Comme $20 \times 5 = 100$:

$$-\frac{53}{20} = -\frac{265}{100} = -2{,}65.$$

Calcul de w. $12 = 2^2 \times 3$; d'après la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour a et b positifs, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Ainsi :

$$w = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Conclusion. $z = -\frac{53}{20} = -2{,}65$ et $w = \sqrt{3}$.

3.

Donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui contient chacun des nombres x, y, z et w. Justifier.

INDICE

Outil : utilise les formes simplifiées des questions 1 et 2 ; pour w, pense aux racines carrées irrationnelles.

CORRIGÉ

On utilise les formes simplifiées des questions 1 et 2.

- $x = 2$ est un entier naturel : $x \in \mathbb{N}$.
- $y = -2$ est un entier négatif : $y \in \mathbb{Z}$, mais $y \notin \mathbb{N}$.
- $z = -\dfrac{265}{10^2}$ est décimal. Son écriture $-2{,}65$ porte des chiffres non nuls après la virgule, donc z n'est pas entier : $z \in \mathbb{D}$, mais $z \notin \mathbb{Z}$.
- $w = \sqrt{3}$, et 3 n'est pas un carré parfait. D'après la propriété admise du cours, w est irrationnel : $w \in \mathbb{R}$, mais $w \notin \mathbb{Q}$.

Conclusion. Les plus petits ensembles sont $\mathbb{N}$ pour x, $\mathbb{Z}$ pour y, $\mathbb{D}$ pour z et $\mathbb{R}$ pour w.

Exercice 2

La racine carrée de 3 est irrationnelle

On admet que tout entier naturel n s'écrit sous l'une des trois formes $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, avec $k \in \mathbb{N}$: c'est la division de n par 3, vue dans le chapitre sur $\mathbb{N}$.

1.

Soit n un entier naturel qui n'est pas un multiple de 3. Démontrer que n^2 n'est pas un multiple de 3.

INDICE

Outil : deux cas seulement, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Dans chaque cas, développe n^2 avec l'identité $(a+b)^2$ et mets 3 en facteur autant que possible.

CORRIGÉ

Comme n n'est pas un multiple de 3, il existe un entier naturel k tel que $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. On développe n^2 par l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Cas $n = 3k+1$.

$$\begin{aligned} n^2 &= 9k^2 + 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 + 2k) + 1. \end{aligned}$$

Cas $n = 3k+2$.

$$\begin{aligned} n^2 &= 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Reste égal à 1. Dans les deux cas, $n^2 = 3m + 1$ avec m entier naturel. Supposons que n^2 soit un multiple de 3, c'est-à-dire $n^2 = 3j$ avec j entier. Alors $3j = 3m + 1$, donc $3(j - m) = 1$: c'est impossible, car 1 n'est pas un multiple de 3.

Conclusion. Si n n'est pas un multiple de 3, alors n^2 n'est pas un multiple de 3.

2.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit rationnel. On l'écrit sous forme irréductible $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que $p^2 = 3q^2$, puis que p est un multiple de 3.

INDICE

Outil : élève l'égalité au carré. Pour la suite, raisonne ainsi : si p n'était pas un multiple de 3, que dirait la question 1 de p^2 ?

CORRIGÉ

Carré. On élève au carré les deux membres de $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$:

$$3 = \frac{p^2}{q^2}.$$

En multipliant par q^2, qui n'est pas nul, on obtient $p^2 = 3q^2$. Comme q^2 est un entier, p^2 est un multiple de 3.

Multiple de 3. Si p n'était pas un multiple de 3, la question 1 dirait que p^2 n'en est pas un, ce qui contredit le paragraphe précédent.

Conclusion. $p^2 = 3q^2$, et p est un multiple de 3.

3.

On écrit $p = 3j$, avec $j \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que q est aussi un multiple de 3, puis conclure.

INDICE

Outil : remplace p par $3j$ dans $p^2 = 3q^2$ et divise par 3. Tu retrouves la situation de la question 2, avec q à la place de p.

CORRIGÉ

Remplacement. Avec $p = 3j$, on a $p^2 = 9j^2$. L'égalité $p^2 = 3q^2$ devient $9j^2 = 3q^2$; en divisant par 3 :

$$q^2 = 3j^2.$$

q multiple de 3. q^2 est donc un multiple de 3. Si q n'en était pas un, la question 1 dirait que q^2 n'en est pas un non plus : q est un multiple de 3.

Contradiction. p et q sont tous deux des multiples de 3 : la fraction $\dfrac{p}{q}$ se simplifie par 3, alors qu'elle était supposée irréductible.

Conclusion. La supposition « $\sqrt{3}$ est rationnel » est fausse : $\sqrt{3}$ est irrationnel, c'est-à-dire $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3

Une fraction qui n'est pas décimale

La calculatrice affiche $0{,}8333333333$ pour $\frac{5}{6}$. Ce n'est qu'une valeur approchée : $0{,}8333333333 \times 6 = 4{,}9999999998$, et non 5. L'écran ne permet donc pas de savoir si $\frac{5}{6}$ est décimal : il faut raisonner.

1.

Supposons que $\frac{5}{6} = \frac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $6a = 5 \times 10^n$, puis que 5×10^n est un multiple de 3.

INDICE

Outil : fais le produit en croix, puis écris $6 = 3 \times 2$.

CORRIGÉ

Produit en croix. Les dénominateurs 6 et 10^n ne sont pas nuls. De $\frac{5}{6} = \frac{a}{10^n}$, le produit en croix donne $6a = 5 \times 10^n$.

Nature de a. 5×10^n est un entier naturel non nul et 6 est positif : a est donc un entier naturel non nul.

Multiple de 3. $6a = 3 \times (2a)$, avec $2a$ entier naturel. Donc $6a$, c'est-à-dire 5×10^n, est un multiple de 3 .

Conclusion. $6a = 5 \times 10^n$, et 5×10^n est un multiple de 3.

2.

Écrire la décomposition de 5×10^n en produit de facteurs premiers. En déduire que $\frac{5}{6}$ n'est pas décimal.

INDICE

Outil : sépare les cas $n = 0$ et $n \geq 1$; $10 = 2 \times 5$. Puis utilise l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

CORRIGÉ

Décomposition. Si $n = 0$, $5 \times 10^0 = 5$, qui est premier. Si $n \geq 1$, la règle de la puissance d'un produit donne $10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$, puis :

$$5 \times 10^n = 2^n \times 5^{n+1}.$$

Contradiction. D'après la question 1, 5×10^n est un multiple de 3 : le facteur premier 3 figure dans sa décomposition. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, 3 devrait donc apparaître ci-dessus ; or seuls 2 et 5 y figurent.

Conclusion. Aucune écriture $\frac{a}{10^n}$ ne convient : $\frac{5}{6}$ n'est pas décimal, $\frac{5}{6} \notin \mathbb{D}$.

3.

En déduire que $\frac{5}{24}$ n'est pas décimal.

INDICE

Outil : multiplie $\frac{5}{24}$ par le décimal 4, et souviens-toi que le produit de deux décimaux est décimal.

CORRIGÉ

Raisonnons par l'absurde : supposons que $\frac{5}{24}$ soit décimal.

Le nombre 4 est décimal. Par stabilité de $\mathbb{D}$ par produit, $4 \times \frac{5}{24}$ serait décimal. Or, après simplification par 4 :

$$4 \times \frac{5}{24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}.$$

Ainsi $\frac{5}{6}$ serait décimal, ce qui contredit la question 2.

Conclusion. $\frac{5}{24}$ n'est pas décimal : $\frac{5}{24} \notin \mathbb{D}$.

Exercice 4

Réduire des expressions avec puissances et racines

On pose :

$$A = \frac{(-2)^6 \times 3^{-2}}{4^2 \times 3^{-4}},$$
$$B = 2\sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{3},$$
$$C = (2\sqrt{5} - 1)^2,$$
$$D = \frac{10^{-3} \times 25^2}{5^3}.$$

1.

Calculer A.

INDICE

Outil : l'exposant 6 est pair ; écris 4^2 comme une puissance de 2, puis regroupe les puissances de 3.

CORRIGÉ

Signe. L'exposant 6 est pair, donc $(-2)^6 = 2^6$.

Puissance de 2. Par la règle de la puissance d'une puissance, $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$.

Calcul. Par la règle du quotient de deux puissances d'un même nombre, appliquée à 2 puis à 3 :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^6}{2^4} \times \frac{3^{-2}}{3^{-4}} \\ &= 2^{6-4} \times 3^{-2-(-4)} \\ &= 2^2 \times 3^2 = 36. \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 36$.

2.

Écrire B sous la forme $k\sqrt{3}$, avec k entier.

INDICE

Outil : $27 = 9 \times 3$ et $48 = 16 \times 3$.

CORRIGÉ

Racines. $27 = 3^2 \times 3$ et $48 = 4^2 \times 3$. D'après la propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour a et b positifs, $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ et $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Somme. On met $\sqrt{3}$ en facteur :

$$\begin{aligned} B &= 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= (6 - 4 + 1)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $B = 3\sqrt{3}$, de la forme $k\sqrt{3}$ avec $k = 3$.

3.

Écrire C sous la forme $m + n\sqrt{5}$, avec m et n entiers.

INDICE

Outil : l'identité $(a-b)^2$, avec $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 1$; calcule $(2\sqrt{5})^2$ à part.

CORRIGÉ

On calcule d'abord $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times (\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$.

Par l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, avec $a = 2\sqrt{5}$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} C &= 20 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 1 + 1 \\ &= 21 - 4\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $C = 21 - 4\sqrt{5}$, de la forme $m + n\sqrt{5}$ avec $m = 21$ et $n = -4$.

4.

Calculer D et donner son écriture scientifique.

INDICE

Outil : $25^2 = 5^4$; simplifie par 5^3 avant de t'occuper de 10^{-3}.

CORRIGÉ

Quotient. Par la règle de la puissance d'une puissance, $25^2 = (5^2)^2 = 5^4$. Par la règle du quotient :

$$\frac{25^2}{5^3} = \frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5.$$

Valeur. Donc $D = 5 \times 10^{-3} = 0{,}005$.

Écriture scientifique. Dans 5×10^{-3}, le nombre 5 a un seul chiffre, non nul, avant la virgule.

Conclusion. $D = 0{,}005$, et son écriture scientifique est 5×10^{-3}.

Exercice 5

Deux quotients conjugués

On pose $u = \dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ et $v = \dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

1.

Calculer $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

INDICE

Outil : l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

CORRIGÉ

Par l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, avec $a = \sqrt{7}$ et $b = \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}&(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})\\ &= (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2\\ &= 7 - 3 = 4.\end{aligned}$$

Conclusion. $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = 4$.

2.

En déduire une écriture de u et de v sans racine carrée au dénominateur.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur de u par $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; fais de même pour v avec l'autre expression.

CORRIGÉ

Pour u. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; la question 1 donne le nouveau dénominateur :

$$\begin{aligned}u &= \frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}\\ &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Pour v. De même, avec $\sqrt{7}+\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}v &= \frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}\\ &= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $u = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ et $v = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$.

3.

Calculer $u+v$ et $u\times v$. Donner le plus petit ensemble de nombres qui contient chacun d'eux.

INDICE

Outil : pour la somme, utilise la question 2 ; pour le produit, l'écriture de départ et la question 1 suffisent.

CORRIGÉ

Somme. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} u+v &= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Or 7 n'est pas un carré parfait : d'après la propriété admise du cours, $\sqrt{7}$ est irrationnel.

Produit. On part des écritures de départ et l'on utilise la question 1 :

$$\begin{aligned} & u\times v \\ &= \frac{2\times 2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Conclusion. $u+v=\sqrt{7}$ est irrationnel : son plus petit ensemble est $\mathbb{R}$. $u\times v=1$ est un entier naturel : son plus petit ensemble est $\mathbb{N}$.

Exercice 6

Factoriser avec une somme de cubes

Pour tout réel x, on pose :

$$E = 27x^3 + 1 \\ - (3x+1)(2x+5).$$

1.

Écrire $27x^3$ comme le cube d'une expression, puis factoriser $27x^3 + 1$.

INDICE

Outil : $27 = 3^3$; utilise l'identité $a^3 + b^3$ avec $b = 1$.

CORRIGÉ

Cube. $27 = 3^3$; par la règle de la puissance d'un produit, $27x^3 = 3^3 \times x^3 = (3x)^3$.

Factorisation. Par l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, avec $a = 3x$ et $b = 1$, on obtient, pour tout réel x :

$$27x^3 + 1 = (3x)^3 + 1^3 \\ = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1).$$

Conclusion. Pour tout réel x, $27x^3 = (3x)^3$ et $27x^3 + 1 = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$.

2.

En déduire que $E = (3x+1)(9x^2 - 5x - 4)$.

INDICE

Outil : après la question 1, les deux termes de E ont un facteur commun.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout réel x :

$$E = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1) \\ - (3x+1)(2x+5).$$

Les deux termes ont le facteur commun $3x + 1$. On le met en facteur par distributivité ; le second facteur se réduit :

$$9x^2 - 3x + 1 - (2x+5) \\ = 9x^2 - 5x - 4.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $E = (3x+1)(9x^2 - 5x - 4)$.

3.

Développer $(9x+4)(x-1)$. En déduire une écriture de E comme produit de trois facteurs.

INDICE

Outil : développe par distributivité, puis compare au second facteur de la question 2.

CORRIGÉ

Développement. Par distributivité, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(9x+4)(x-1)\\&=9x^2-9x+4x-4\\&=9x^2-5x-4.\end{aligned}$$

Produit de trois facteurs. On reconnaît le second facteur de la question 2, que l'on remplace par $(9x+4)(x-1)$.

Conclusion. Pour tout réel x, $E=(3x+1)(9x+4)(x-1)$.

4.

Calculer la valeur de E pour $x=1$, d'abord avec l'écriture de départ, puis avec celle de la question 3.

INDICE

Outil : dans un produit, un facteur nul suffit.

CORRIGÉ

Écriture de départ. Pour $x=1$, $27x^3+1=28$ et $(3x+1)(2x+5)=4\times 7=28$, donc $E=28-28=0$.

Écriture factorisée. Pour $x=1$, le facteur $x-1$ est nul. Un produit dont un facteur est nul vaut 0 : $E=0$ sans autre calcul.

Conclusion. Pour $x=1$, les deux écritures donnent $E=0$; la forme factorisée y conduit le plus vite.

Exercice 7

Écritures scientifiques : du virus à la Lune

On utilise les valeurs suivantes, données avec peu de chiffres :

- un cheveu a une épaisseur d'environ $0{,}00008$ m ;
- un virus de la grippe mesure environ $0{,}0000001$ m ;
- la distance de la Terre à la Lune vaut environ $384\,000$ km.

Les résultats obtenus avec ces valeurs sont donc des valeurs approchées.

1.

Donner l'écriture scientifique de chacune des trois longueurs, exprimée en mètres.

INDICE

Outil : pour la distance, écris d'abord 1 km $= 10^3$ m.

CORRIGÉ

Cheveu. Dans $0{,}00008$, la virgule avance de 5 rangs pour se placer après le 8 : l'épaisseur du cheveu vaut 8×10^{-5} m.

Virus. Dans $0{,}0000001$, elle avance de 7 rangs : le virus mesure 1×10^{-7} m.

Distance. $384\,000 = 3{,}84 \times 10^5$ et 1 km $= 10^3$ m. Par la règle du produit de deux puissances de 10, la distance en mètres vaut :

$$\begin{aligned} &3{,}84 \times 10^5 \times 10^3 \\ &= 3{,}84 \times 10^8. \end{aligned}$$

Conclusion. En mètres, les trois longueurs valent 8×10^{-5} m, 1×10^{-7} m et $3{,}84 \times 10^8$ m.

2.

Combien de virus faut-il aligner pour couvrir l'épaisseur d'un cheveu ? Donner le résultat avec une puissance de 10, puis en écriture décimale.

INDICE

Outil : divise l'épaisseur du cheveu par la taille du virus ; pour les puissances de 10, regarde la différence des exposants.

CORRIGÉ

On divise l'épaisseur du cheveu par la taille du virus. Par la règle du quotient de deux puissances de 10 :

$$\begin{aligned} \frac{8 \times 10^{-5}}{1 \times 10^{-7}} &= 8 \times 10^{-5-(-7)} \\ &= 8 \times 10^2 = 800. \end{aligned}$$

Conclusion. Il faut aligner environ 8×10^2, soit 800 virus.

3.

Combien de cheveux faut-il placer côte à côte pour couvrir la distance de la Terre à la Lune ? Donner l'écriture scientifique du résultat.

INDICE

Outil : $\dfrac{3{,}84}{8} = 0{,}48$. Ce nombre n'a pas un chiffre non nul avant la virgule : écris-le à son tour avec une puissance de 10.

CORRIGÉ

Quotient. On divise la distance par l'épaisseur d'un cheveu ; par la règle du quotient de deux puissances de 10 :

$$\begin{aligned}&\frac{3{,}84 \times 10^{8}}{8 \times 10^{-5}}\\ &= \frac{3{,}84}{8} \times 10^{8-(-5)}\\ &= 0{,}48 \times 10^{13}.\end{aligned}$$

Écriture scientifique. $0{,}48$ n'a pas un chiffre non nul avant la virgule. On l'écrit $0{,}48 = 4{,}8 \times 10^{-1}$, puis :

$$\begin{aligned}&4{,}8 \times 10^{-1} \times 10^{13}\\ &= 4{,}8 \times 10^{-1+13}\\ &= 4{,}8 \times 10^{12}.\end{aligned}$$

Conclusion. Il faut environ $4{,}8 \times 10^{12}$ cheveux placés côte à côte.