BURHAN

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$: exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Application	8

Exercice 1

Le plus petit ensemble de cinq nombres

On considère les cinq nombres suivants :

$$a = \frac{56}{8}, \qquad b = -\frac{45}{9},$$
$$c = \frac{9}{12}, \qquad d = \sqrt{7}, \qquad e = \pi.$$

1.

Simplifier les écritures de a, b et c.

INDICE

Outil : divise le numérateur et le dénominateur par leur plus grand diviseur commun, vu dans le chapitre sur $\mathbb{N}$.

CORRIGÉ

Pour simplifier une fraction, on divise son numérateur et son dénominateur par leur plus grand diviseur commun.

- $56 = 8 \times 7$, donc $a = 7$.
- $45 = 9 \times 5$, donc $b = -5$.
- Le plus grand diviseur commun de 9 et de 12 est 3 ; or $9 = 3 \times 3$ et $12 = 3 \times 4$, donc $c = \frac{3}{4}$.

Conclusion. $a = 7$, $b = -5$ et $c = \frac{3}{4}$.

2.

Pour chacun des cinq nombres, donner le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ qui le contient. Justifier.

INDICE

Outil : monte de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Pour c, cherche un dénominateur égal à 100 ; pour d et e, pense aux nombres irrationnels du cours.

CORRIGÉ

On parcourt les ensembles dans l'ordre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et l'on garde le premier qui contient le nombre.

Nombre a. $a = 7$ est un entier naturel : $a \in \mathbb{N}$.

Nombre b. $b = -5$ est un entier négatif : $b \in \mathbb{Z}$, mais $b \notin \mathbb{N}$.

Nombre c. On cherche un dénominateur égal à 100 :

$$\begin{aligned} c &= \frac{3}{4} = \frac{75}{100} \\ &= \frac{75}{10^2} = 0{,}75. \end{aligned}$$

Donc $c \in \mathbb{D}$. L'écriture $0{,}75$ porte des chiffres non nuls après la virgule : c n'est pas entier, $c \notin \mathbb{Z}$.

Nombre d. Les carrés parfaits sont 0, 1, 4, 9, 16… et 7 n'en fait pas partie. D'après la propriété admise du cours, la racine carrée d'un entier naturel qui n'est pas un carré parfait est irrationnelle : $d \in \mathbb{R}$, mais $d \notin \mathbb{Q}$.

Nombre e. Le cours admet que π est irrationnel : $e \in \mathbb{R}$, mais $e \notin \mathbb{Q}$.

Conclusion. Le plus petit ensemble qui contient a est $\mathbb{N}$; pour b, c'est $\mathbb{Z}$; pour c, c'est $\mathbb{D}$; pour d et pour e, c'est $\mathbb{R}$.

3.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse : $b \in \mathbb{N}$; $c \in \mathbb{Q}$; $d \in \mathbb{D}$; $a \in \mathbb{R}$.

INDICE

Outil : les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et les réponses de la question 2.

CORRIGÉ

On s'appuie sur la question 2 et sur la chaîne d'inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- $b \in \mathbb{N}$: **faux**, car $b = -5$ est négatif.
- $c \in \mathbb{Q}$: **vrai**, car $c \in \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
- $d \in \mathbb{D}$: **faux**. Un décimal est rationnel, puisque $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$; or d est irrationnel.
- $a \in \mathbb{R}$: **vrai**, car $a \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Conclusion. Les affirmations $c \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{R}$ sont vraies ; les affirmations $b \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{D}$ sont fausses.

Exercice 2

Appartenance ou inclusion

Dans les questions 1 et 2, recopier chaque ligne et la compléter par l'un des symboles $\in$, $\notin$ ou $\subset$.

1.

(a) $-12 \ \ldots \ \mathbb{N}$; (b) $0{,}6 \ \ldots \ \mathbb{D}$; (c) $\mathbb{Z} \ \ldots \ \mathbb{Q}$.

INDICE

Outil : entre un nombre et un ensemble, on écrit $\in$ ou $\notin$; entre deux ensembles, on écrit $\subset$.

CORRIGÉ

- (a) -12 est un entier négatif, donc $-12 \notin \mathbb{N}$.
- (b) $0{,}6 = \dfrac{6}{10^1}$, donc $0{,}6 \in \mathbb{D}$.
- (c) $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont deux ensembles. Tout entier relatif n s'écrit $\dfrac{n}{1}$, il est donc rationnel : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Conclusion. $-12 \notin \mathbb{N}$; $0{,}6 \in \mathbb{D}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.

(d) $\sqrt{16} \ \ldots \ \mathbb{N}$; (e) $-\dfrac{14}{7} \ \ldots \ \mathbb{Z}$; (f) $\pi \ \ldots \ \mathbb{Q}$.

INDICE

Outil : pour (d) et (e), simplifie d'abord l'écriture ; pour (f), pense aux nombres irrationnels du cours.

CORRIGÉ

- (d) 4 est positif et $4^2 = 16$, donc $\sqrt{16} = 4$, un entier naturel : $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$.
- (e) $14 = 7 \times 2$, donc $-\dfrac{14}{7} = -2$, un entier relatif : $-\dfrac{14}{7} \in \mathbb{Z}$.
- (f) Le cours admet que π est irrationnel : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Conclusion. $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$; $-\dfrac{14}{7} \in \mathbb{Z}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$.

3.

Donner un nombre qui appartient à $\mathbb{D}$ mais pas à $\mathbb{Z}$, puis un nombre qui appartient à $\mathbb{R}$ mais pas à $\mathbb{Q}$.

INDICE

Outil : un décimal avec un chiffre non nul après la virgule ; la racine carrée d'un entier qui n'est pas un carré parfait.

CORRIGÉ

Un décimal non entier. $0{,}6 = \dfrac{6}{10}$ est décimal. Son écriture à virgule porte un chiffre non nul après la virgule : ce n'est pas un entier. Donc $0{,}6 \in \mathbb{D}$ et $0{,}6 \notin \mathbb{Z}$.

Un réel non rationnel. 13 n'est pas un carré parfait. D'après la propriété admise du cours, $\sqrt{13}$ est donc irrationnel : $\sqrt{13} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$.

Conclusion. $0{,}6$ convient pour la première demande et $\sqrt{13}$ pour la seconde ; d'autres exemples sont possibles.

Exercice 3

Écrire un décimal avec une puissance de 10

1.

Écrire $3{,}07$ et $-0{,}046$ sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : n est le nombre de chiffres après la virgule.

CORRIGÉ

L'exposant n est le nombre de chiffres après la virgule.

- $3{,}07$ a deux chiffres après la virgule : $3{,}07 = \dfrac{307}{10^2}$.
- $-0{,}046$ en a trois : $-0{,}046 = \dfrac{-46}{10^3}$.

Conclusion. $3{,}07 = \dfrac{307}{10^2}$ et $-0{,}046 = \dfrac{-46}{10^3}$.

2.

Prouver que $\dfrac{9}{25}$ est un nombre décimal et donner son écriture à virgule.

INDICE

Outil : par quel entier multiplier 25 pour obtenir 100 ?

CORRIGÉ

On cherche un dénominateur qui soit une puissance de 10. Comme $25 \times 4 = 100$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par 4 :

$$\frac{9}{25} = \frac{9 \times 4}{25 \times 4} = \frac{36}{10^2}.$$

Conclusion. $\dfrac{9}{25}$ s'écrit $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a = 36$ et $n = 2$: c'est un nombre décimal, et $\dfrac{9}{25} = 0{,}36$.

3.

Simplifier $\dfrac{33}{60}$, puis prouver que ce nombre est décimal.

INDICE

Outil : simplifie d'abord par 3 ; complète ensuite le dénominateur obtenu jusqu'à 100.

CORRIGÉ

Simplification. $33 = 3 \times 11$ et $60 = 3 \times 20$, donc :

$$\frac{33}{60} = \frac{11}{20}.$$

Puissance de 10. Comme $20 \times 5 = 100$:

$$\frac{11}{20} = \frac{11 \times 5}{20 \times 5} = \frac{55}{10^2}.$$

Conclusion. $\dfrac{33}{60} = \dfrac{11}{20} = 0{,}55$: ce nombre est décimal.

Exercice 4

Quatre calculs de puissances

On pose :

$$A = 5^{3} \times 5^{-5},$$
$$B = \frac{(2^{3})^{4}}{2^{10}},$$
$$C = \frac{15^{4}}{3^{4} \times 5^{2}},$$
$$D = (-1)^{7} \times 2^{-3} \times 4^{2}.$$

1.

Écrire A et B sous la forme d'une puissance, puis sous la forme d'un nombre décimal.

INDICE

Outil : les règles de calcul sur les puissances : $a^{m} \times a^{n}$, $(a^{m})^{n}$, puis un quotient de puissances.

CORRIGÉ

Calcul de A. Par la règle du produit de deux puissances d'un même nombre, $a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$:

$$\begin{aligned} A &= 5^{3+(-5)} = 5^{-2} \\ &= \frac{1}{25} = \frac{4}{100} \\ &= 0{,}04. \end{aligned}$$

Calcul de B. Par la règle de la puissance d'une puissance, $(2^{3})^{4} = 2^{3\times 4} = 2^{12}$. Par la règle du quotient de deux puissances d'un même nombre :

$$B = \frac{2^{12}}{2^{10}} = 2^{12-10} = 2^{2}.$$

Conclusion. $A = 5^{-2} = 0{,}04$ et $B = 2^{2} = 4$.

2.

Calculer C.

INDICE

Outil : décompose 15 en facteurs premiers, puis utilise $(ab)^{n} = a^{n}b^{n}$.

CORRIGÉ

Puissance d'un produit. $15 = 3 \times 5$. Par la règle $(ab)^{n} = a^{n} \times b^{n}$:

$$15^{4} = 3^{4} \times 5^{4}.$$

Quotient. On simplifie par 3^{4}, puis on applique la règle du quotient de deux puissances de 5 :

$$\begin{aligned} C &= \frac{3^{4} \times 5^{4}}{3^{4} \times 5^{2}} \\ &= 5^{4-2} = 5^{2} = 25. \end{aligned}$$

Conclusion. $C = 25$.

3.

Calculer D.

INDICE

Outil : une puissance impaire de -1 vaut -1 ; écris 4^2 comme une puissance de 2.

CORRIGÉ

Signe. L'exposant 7 est impair, donc $(-1)^7 = -1$.

Puissance de 2. $4 = 2^2$; par la règle de la puissance d'une puissance, $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$.

Calcul. Par la règle du produit de deux puissances de 2 :

$$\begin{aligned} D &= -1 \times 2^{-3} \times 2^4 \\ &= -2^{-3+4} = -2. \end{aligned}$$

Conclusion. $D = -2$.

Exercice 5

Des écritures scientifiques

1.

Donner l'écriture scientifique de $7\,250\,000$ et de $0{,}000084$.

INDICE

Outil : repère le premier chiffre non nul, mets la virgule à sa droite, puis compte les rangs.

CORRIGÉ

Dans une écriture scientifique $a \times 10^{p}$, le nombre a a un seul chiffre avant la virgule, et ce chiffre n'est pas nul.

- Pour $7\,250\,000$, on place la virgule juste après le 7 : elle recule de 6 rangs. Donc $7\,250\,000 = 7{,}25 \times 10^{6}$.
- Pour $0{,}000084$, on la place juste après le 8 : elle avance de 5 rangs. Donc $0{,}000084 = 8{,}4 \times 10^{-5}$.

Conclusion. Les écritures scientifiques sont $7{,}25 \times 10^{6}$ et $8{,}4 \times 10^{-5}$.

2.

Donner l'écriture scientifique de $-0{,}0302$.

INDICE

Outil : écris d'abord celle de $0{,}0302$, puis ajoute le signe moins.

CORRIGÉ

Pour $0{,}0302$, la virgule avance de 2 rangs pour se placer après le 3 : $0{,}0302 = 3{,}02 \times 10^{-2}$.

On ajoute ensuite le signe moins : $-0{,}0302 = -3{,}02 \times 10^{-2}$.

Conclusion. L'écriture scientifique de $-0{,}0302$ est $-3{,}02 \times 10^{-2}$.

3.

Les nombres 48×10^{5} et $0{,}6 \times 10^{-3}$ ne sont pas en écriture scientifique. Les y mettre.

INDICE

Outil : écris 48 et $0{,}6$ en écriture scientifique, puis regroupe les puissances de 10.

CORRIGÉ

Premier nombre. $48 = 4{,}8 \times 10^{1}$. Par la règle du produit de deux puissances de 10 :

$$\begin{aligned} 48 \times 10^{5} &= 4{,}8 \times 10^{1+5} \\ &= 4{,}8 \times 10^{6}. \end{aligned}$$

Second nombre. $0{,}6 = 6 \times 10^{-1}$, donc, par la même règle :

$$\begin{aligned} 0{,}6 \times 10^{-3} &= 6 \times 10^{-1-3} \\ &= 6 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Conclusion. En écriture scientifique, $48 \times 10^{5} = 4{,}8 \times 10^{6}$ et $0{,}6 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-4}$.

Exercice 6

Simplifier des racines carrées

1.

Écrire $\sqrt{50}$, $\sqrt{75}$ et $\sqrt{98}$ sous la forme $k\sqrt{m}$, avec k et m entiers naturels et m le plus petit possible.

INDICE

Outil : cherche le plus grand carré parfait qui divise 50, 75 ou 98, puis applique $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

CORRIGÉ

On utilise la propriété des racines carrées : pour tous réels positifs a et b, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

- $50 = 25 \times 2$, donc $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
- $75 = 25 \times 3$, donc $\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.
- $98 = 49 \times 2$, donc $\sqrt{98} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

Les entiers 2 et 3 restés sous la racine n'ont plus de facteur carré autre que 1.

Conclusion. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ et $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.

2.

Calculer $\sqrt{50} + \sqrt{98}$.

INDICE

Outil : les deux termes contiennent la même racine après simplification.

CORRIGÉ

D'après la question 1, les deux termes s'écrivent avec $\sqrt{2}$, que l'on met en facteur :

$$\begin{aligned}\sqrt{50} + \sqrt{98} &= 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} \\ &= (5+7)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sqrt{50} + \sqrt{98} = 12\sqrt{2}$.

3.

Calculer $\sqrt{75} \times \sqrt{3}$.

INDICE

Outil : le produit de deux racines est la racine du produit.

CORRIGÉ

Par la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, valable pour tous réels positifs a et b :

$$\sqrt{75} \times \sqrt{3} = \sqrt{225}.$$

Or 15 est positif et $15^2 = 225$, donc $\sqrt{225} = 15$.

Conclusion. $\sqrt{75} \times \sqrt{3} = 15$.

Exercice 7

Un dénominateur sans racine

1.

Écrire $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ sans racine carrée au dénominateur, puis simplifier.

INDICE

Outil : multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$.

CORRIGÉ

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$, et l'on utilise $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$:

$$\begin{aligned}\frac{10}{\sqrt{5}} &= \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}\\ &= \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

2.

Même travail pour $\dfrac{1}{\sqrt{17}+4}$.

INDICE

Outil : l'expression conjuguée de $\sqrt{17}+4$ est $\sqrt{17}-4$.

CORRIGÉ

Produit des deux conjugués. Par l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, avec $a=\sqrt{17}$ et $b=4$: $(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)=17-16=1$.

Écriture sans racine. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{17}-4$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{17}+4}\\ &= \frac{\sqrt{17}-4}{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)}\\ &= \frac{\sqrt{17}-4}{1} = \sqrt{17}-4.\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{1}{\sqrt{17}+4} = \sqrt{17}-4$.

3.

Même travail pour $\dfrac{6}{4-\sqrt{10}}$.

INDICE

Outil : même méthode qu'à la question 2. Quelle est l'expression conjuguée de $4-\sqrt{10}$?

CORRIGÉ

Produit des deux conjugués. L'expression conjuguée de $4-\sqrt{10}$ est $4+\sqrt{10}$. Par la même identité remarquable : $(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10}) = 16-10 = 6$.

Écriture sans racine. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $4+\sqrt{10}$:

$$\begin{aligned}\frac{6}{4-\sqrt{10}} &= \frac{6(4+\sqrt{10})}{6} \\ &= 4+\sqrt{10}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{6}{4-\sqrt{10}} = 4+\sqrt{10}$.

Exercice 8

Trois identités remarquables

Dans tout l'exercice, x et a désignent des réels.

1.

Développer $(2x-5)^2$.

INDICE

Outil : l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, ici avec $2x$ et 5.

CORRIGÉ

On applique l'identité remarquable du carré d'une différence, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, aux nombres $2x$ et 5. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(2x-5)^2\\&= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2\\&= 4x^2 - 20x + 25.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel x, $(2x-5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$.

2.

Factoriser $9x^2 - 49$.

INDICE

Outil : écris chacun des deux termes sous la forme d'un carré.

CORRIGÉ

On écrit chaque terme comme un carré : $9x^2 = (3x)^2$ et $49 = 7^2$.

Par l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, appliquée à $3x$ et 7, on obtient, pour tout réel x :

$$9x^2 - 49 = (3x-7)(3x+7).$$

Conclusion. Pour tout réel x, $9x^2 - 49 = (3x-7)(3x+7)$.

3.

Factoriser $a^3 - 125$, puis vérifier le résultat en développant.

INDICE

Outil : écris 125 comme le cube d'un entier.

CORRIGÉ

Factorisation. $125 = 5^3$. Par l'identité $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, avec $b = 5$: $a^3 - 125 = (a-5)(a^2+5a+25)$.

Vérification. On développe par distributivité :

$$\begin{aligned}&(a-5)(a^2+5a+25)\\&= a^3 + 5a^2 + 25a\\&\quad - 5a^2 - 25a - 125\\&= a^3 - 125.\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout réel a, $a^3 - 125 = (a-5)(a^2+5a+25)$, et le développement redonne bien $a^3 - 125$.