BURHAN

Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensembles-de-nombres/cours

Chapitre	Semestre
Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$	Semestre 1

Ce que la calculatrice ne dit pas

Sur ta calculatrice, tape $1 \div 4$, puis $1 \div 3$, puis $\sqrt{2}$. L'écran affiche $0{,}25$, puis $0{,}3333333333$, puis $1{,}414213562$.

Les deux derniers affichages remplissent tout l'écran. Mais que se passe-t-il au-delà ? Les chiffres s'arrêtent-ils un jour ?

Devine : Une prédiction

Parmi ces trois nombres, lesquels ont une écriture décimale qui s'arrête vraiment ?

A. Les trois : l'écran affiche un nombre fini de chiffres.
Faux.
L'écran a une place limitée : il coupe l'écriture, il ne la termine pas.

B. Seulement $\frac{1}{4}$.
Juste.
Juste : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, et l'écriture s'arrête après deux chiffres.

C. $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$, car ce sont des fractions.
Faux.
Une fraction n'a pas toujours une écriture qui s'arrête : ce chapitre le montre pour $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$ et $\sqrt{2}$.
Faux.
Ce chapitre démontre que $\sqrt{2}$ n'est même pas un quotient de deux entiers.

Correction
Seul $\frac{1}{4}$ convient : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$, exactement.
Pour $\frac{1}{3}$ et $\sqrt{2}$, l'écran n'affiche qu'une **valeur approchée**.
Dans ce chapitre, tu démontres que l'écriture de $\frac{1}{3}$ ne s'arrête jamais. Tu démontres aussi que $\sqrt{2}$ n'est pas un quotient de deux entiers.

Pour répondre sans calculatrice, il faut ranger les nombres en familles : entiers, décimaux, rationnels, réels. Chaque famille a son nom et son symbole.

Tu apprends aussi à calculer juste avec les puissances, les racines carrées et les identités remarquables. Ce sont des outils du collège : ici, tu les rends sûrs et tu les justifies.

Des entiers aux décimaux : les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$

Compter, puis descendre sous zéro

Vérifie : Un entier caché

Rappel du collège : $\sqrt{a}$ est le nombre positif ou nul dont le carré vaut a. Lequel de ces nombres est un entier positif ?

A. $-2{,}35$

Faux.
Ce nombre a des chiffres après la virgule, et il est négatif.

B. $\dfrac{1}{4}$

Faux.
$\dfrac{1}{4} = 0{,}25$: ce n'est pas un entier.

C. $\sqrt{4}$

Juste.
Juste : $\sqrt{4} = 2$, car $2^2 = 4$ et 2 est positif.

D. $\dfrac{12}{18}$

Faux.
En simplifiant par 6, $\dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$, qui n'est pas un entier.

Correction
Le nombre $\sqrt{4}$ est un entier déguisé : $\sqrt{4} = 2$, car $2 \times 2 = 4$ et 2 est positif.

Les trois autres nombres ne sont pas entiers. Avant de classer un nombre, écris-le donc sous sa forme la plus simple.

Rappel du collège. Les nombres 0, 1, 2, 3… servent à compter. En ajoutant leurs opposés -1, -2, -3…, on repère aussi des températures sous zéro ou des étages en sous-sol. Le lycée donne un nom et un symbole à chacune de ces familles.

Définition : Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. L'ensemble des **entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$: il est formé des entiers naturels et de leurs opposés, $\mathbb{Z} = \{\dots ; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.

On écrit $x \in \mathbb{Z}$ pour « x appartient à $\mathbb{Z}$ » et $x \notin \mathbb{N}$ pour « x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ». Par exemple, $-3 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \notin \mathbb{N}$.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Appartenir, ne pas appartenir

Vérifie : Le bon symbole

Laquelle de ces écritures est juste ?

A. $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$

Juste.
Juste : $\sqrt{4} = 2$, et 2 est un entier naturel.

B. $-2 \in \mathbb{N}$

Faux.
-2 est négatif : $-2 \in \mathbb{Z}$, mais $-2 \notin \mathbb{N}$.

C. $\dfrac{1}{4} \in \mathbb{Z}$

Faux.
$\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ n'est pas un entier : $\dfrac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$.

D. $0 \notin \mathbb{N}$

Faux.
0 est le premier entier naturel : $0 \in \mathbb{N}$, mais $0 \notin \mathbb{N}^*$.

Correction
Seule l'écriture $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$ est juste, car $\sqrt{4} = 2$.

Les trois autres se corrigent ainsi :

- $-2 \in \mathbb{Z}$, mais $-2 \notin \mathbb{N}$;
- $\dfrac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$;
- $0 \in \mathbb{N}$.

Retiens le piège : 0 appartient à $\mathbb{N}$, mais pas à $\mathbb{N}^*$.

En clair. Un prix ou une mesure s'écrit avec une virgule. Par exemple :

$$\begin{aligned} 2{,}35 &= 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} \\ &= \frac{235}{100}. \end{aligned}$$

Un nombre à virgule qui s'arrête est donc une fraction de dénominateur 10, 100, 1000… : une puissance de 10.

Définition : Nombres décimaux

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Par exemple, $-2{,}35 = \frac{-235}{10^2}$, donc $-2{,}35 \in \mathbb{D}$. Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale ne comporte qu'un nombre fini de chiffres après la virgule.

Exemple : des décimaux écrits avec une puissance de 10

- $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{25}{10^2}$. Donc $\frac{1}{4} \in \mathbb{D}$.
- $0{,}00071 = \frac{71}{100\,000} = \frac{71}{10^5}$: cinq chiffres après la virgule donnent l'exposant 5.
- $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{10^0}$, car $10^0 = 1$ (rappel du collège, repris dans la section sur les puissances). Donc $\sqrt{4} \in \mathbb{D}$.

Montrer qu'une fraction est décimale

Méthode : montrer qu'une fraction est un nombre décimal

1. **Simplifie** la fraction, si c'est possible.
2. **Cherche** un entier qui, multiplié par le dénominateur, donne 10, 100, 1000…
3. **Multiplie** le numérateur et le dénominateur par cet entier.
4. **Conclus** : le nombre s'écrit $\frac{a}{10^n}$, il est décimal.

Exemple : une fraction qui réussit, une qui bloque

Pour $\frac{7}{20}$. Comme $20 \times 5 = 100$:

$$\begin{aligned}\frac{7}{20} &= \frac{7 \times 5}{20 \times 5} \\ &= \frac{35}{10^2} = 0{,}35.\end{aligned}$$

Donc $\frac{7}{20} \in \mathbb{D}$.

Pour $\frac{12}{18}$. On simplifie d'abord par 6 : $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. La méthode bloque : aucun entier multiplié par 3 ne donne 10, 100 ou 1000.

Mais essayer quelques puissances de 10 ne suffit pas pour conclure.

Le nombre un tiers

Pose la division de 1 par 3 : à chaque étape, le reste vaut 1. Tu écris $0{,}333\ldots$, et la division ne s'arrête jamais.

Mais personne ne peut poser une infinité de divisions : il faut une preuve.

Pourquoi est-ce vrai ? On suppose que $\frac{1}{3}$ est décimal, puis on aboutit à une impossibilité. C'est un **raisonnement par l'absurde**.

Propriété : Le nombre 1/3 n'est pas décimal

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Démonstration

Étape 1. Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ soit décimal. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$, c'est-à-dire $3a = 10^n$. Comme $10^n > 0$, l'entier a est un entier naturel non nul.

Étape 2. Si $n = 0$, l'égalité devient $3a = 1$, impossible car 1 n'est pas un multiple de 3. Si $n \geq 1$, la décomposition de 10^n en produit de facteurs premiers est $2^n \times 5^n$. Or $3a$ est un multiple de 3 : sa décomposition contient le facteur premier 3.

Étape 3. D'après l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, 3 devrait figurer dans celle de 10^n, ce qui est faux. Donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'un nombre n'est pas décimal, on transforme la question en une égalité entre entiers : ici, $3a = 10^n$.

Puis on compare les facteurs premiers des deux membres. Pour $n \geq 1$, le membre de gauche contient le facteur 3. Celui de droite, $10^n = 2^n \times 5^n$ (rappel du collège sur les puissances), ne contient que 2 et 5.

L'outil vient du chapitre sur $\mathbb{N}$: la décomposition en produit de facteurs premiers est **unique**.

Vérifie : L'outil de la preuve

Dans la preuve, pour $n \geq 1$, quel argument rend l'égalité $3a = 10^n$ impossible ?

A. 10^n est un nombre pair, alors que $3a$ est un nombre impair.
Faux.
Faux : $3a$ peut être pair, par exemple si $a = 2$. La parité ne conclut pas.

B. Le carré d'un entier impair est impair.
Faux.

Ce fait sert dans une autre preuve du chapitre ; ici, aucun carré n'apparaît.

C. La division de 1 par 3 ne s'arrête pas.

Faux.

C'est l'observation de départ, pas une preuve : on ne pose pas une infinité de divisions.

D. L'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Juste.

Juste : le facteur 3 devrait figurer dans la décomposition de 10^n, qui ne contient que 2 et 5.

Correction

La décomposition de 10^n est $2^n \times 5^n$. Celle de $3a$ contient le facteur premier 3.

Si $3a = 10^n$, un même entier aurait deux décompositions différentes. C'est impossible, d'après l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Un contre-exemple, puis à toi

Exemple : Contre-exemple : le même calcul avec un quart

Reprends la preuve avec $\frac{1}{4}$ à la place de $\frac{1}{3}$. L'égalité devient $4a = 10^n$, soit :

$$2^2 \times a = 2^n \times 5^n.$$

Cette fois, aucune contradiction : le facteur premier 2 figure des deux côtés. Pour $n = 2$, on trouve $a = 25$, et $\frac{1}{4} = \frac{25}{10^2}$.

La preuve marche pour 3 parce que 3 ne divise aucune puissance de 10.

À toi : Décimal ou non ?

Parmi $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{3}$, un seul nombre est décimal. Lequel ? Écris-le sous la forme $\frac{a}{10^n}$.

Pour l'autre, suis la preuve faite pour $\frac{1}{3}$: suppose $\frac{2}{3} = \frac{a}{10^n}$.

a) Quelle égalité entre entiers obtiens-tu ?

b) Si $n = 0$, pourquoi est-elle impossible ?

c) Si $n \geq 1$, quel facteur premier manque à droite ?

Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour $\frac{3}{8}$, cherche un entier qui, multiplié par 8, donne 1000.

Indice 2

Pour a), multiplie les deux membres par 3×10^n.

Indice 3

Point délicat : pour c), écris $2 \times 10^n = 2^{n+1} \times 5^n$, puis compare avec $3a$.

Réponse

Le nombre décimal. Comme $8 \times 125 = 1000$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= \frac{3 \times 125}{8 \times 125} \\ &= \frac{375}{10^3}. \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{3}{8}$ est décimal.

a) Avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on obtient $3a = 2 \times 10^n$. Ce produit est un entier naturel non nul, donc a aussi.

b) Si $n = 0$, on obtient $3a = 2$: impossible, car 2 n'est pas un multiple de 3.

c) Si $n \geq 1$, la décomposition de 2×10^n est $2^{n+1} \times 5^n$: le facteur 3 manque. Or $3a$ est un multiple de 3 : d'après l'unicité de la décomposition, c'est impossible.

Conclusion. $\dfrac{3}{8}$ est décimal, et $\dfrac{2}{3} \notin \mathbb{D}$.

Rationnels et irrationnels

Des quotients d'entiers

Devine : Une fraction à simplifier

La calculatrice affiche $0{,}6666666667$ pour $\dfrac{12}{18}$. Lequel de ces nombres est exactement égal à $\dfrac{12}{18}$?

A. $\dfrac{6}{12}$

Faux.

On a retiré 6 en haut et en bas : retrancher ne conserve pas une fraction. D'ailleurs $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

B. $\dfrac{2}{3}$

Juste.

Juste : on divise 12 et 18 par le même nombre, 6.

C. $0{,}6666666667$

Faux.

C'est une valeur approchée : l'écran a arrondi le dernier chiffre.

D. $\dfrac{4}{9}$

Faux.

On a divisé 12 par 3, mais 18 par 2 : il faut diviser par le même nombre.

Correction

Le plus grand diviseur commun de 12 et 18 est 6, car $12 = 6 \times 2$ et $18 = 6 \times 3$. Donc $\dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$.

> L'affichage $0{,}6666666667$ n'est qu'une valeur approchée : multiplié par 3, il ne donne pas 2.

En clair. Les nombres $\frac{12}{18}$, $\frac{1}{3}$ ou $-2{,}35 = \frac{-235}{100}$ sont des quotients de deux entiers. Certains sont décimaux, d'autres non.

Ensemble, ils forment une famille plus grande : les **rationnels**. Le chapitre sur $\mathbb{N}$ t'a appris à les simplifier avec le plus grand diviseur commun.

Définition : Nombres rationnels

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

En simplifiant par le plus grand diviseur commun du numérateur et du dénominateur, tout rationnel s'écrit sous **forme irréductible** $\frac{a}{b}$: le seul diviseur commun de a et b dans $\mathbb{N}^*$ est 1.

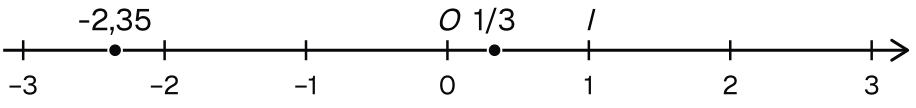
Exemple : des formes irréductibles

- $\frac{12}{18} = \frac{6 \times 2}{6 \times 3} = \frac{2}{3}$. Le seul diviseur commun de 2 et 3 dans $\mathbb{N}^*$ est 1 : la forme $\frac{2}{3}$ est irréductible.
- $-2{,}35 = \frac{-235}{100}$. Le plus grand diviseur commun de 235 et 100 est 5. Donc $-2{,}35 = \frac{-47}{20}$, sous forme irréductible.

La droite graduée et les réels

Rappel du collège. Une droite graduée porte une origine et une unité. Chaque point a une abscisse : on y place $\frac{1}{3}$ ou $-2{,}35$, et aussi des longueurs reportées au compas.

Fais ce schéma sur ton cahier. Les quotients d'entiers suffisent-ils pour repérer tous les points ? La suite de la section montre que non.



Une droite graduée d'origine O et d'unité OI, sur laquelle on place les points d'abscisses 1/3 et -2,35.

Définition : Nombres réels et nombres irrationnels

Les nombres qui repèrent les points d'une droite graduée forment l'ensemble des **nombres réels**, noté $\mathbb{R}$: à chaque point de la droite correspond un unique réel, son abscisse, et à chaque réel un unique point.

Un réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.

Exemple : des réels et leurs notations

- $\frac{1}{3}$, $-2{,}35$ et $\sqrt{4} = 2$ repèrent des points de la droite graduée : ce sont des réels.
- $-2{,}35 \in \mathbb{R}^-$ et $-2{,}35 \in \mathbb{R}^*$; de même, $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}^+$.
- 0 appartient à $\mathbb{R}^+$ et à $\mathbb{R}^-$, mais $0 \notin \mathbb{R}^*$.

La diagonale d'un carré

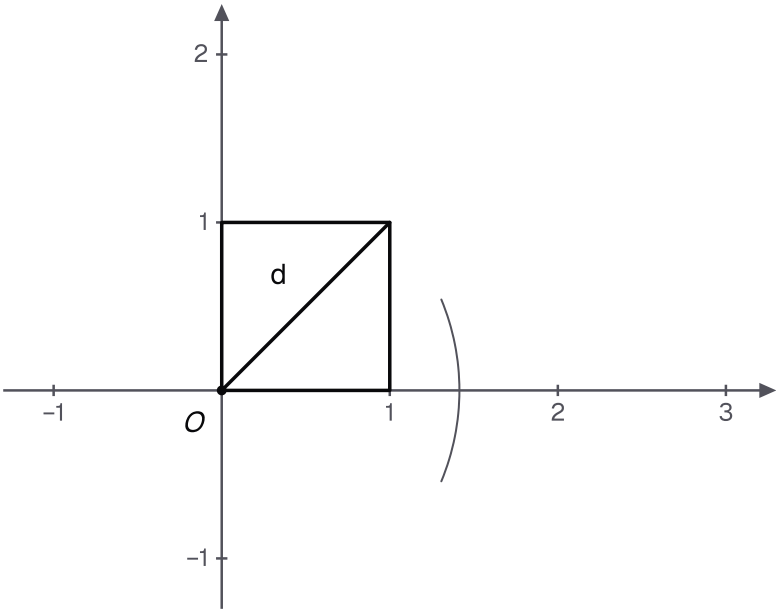
Trace un carré de côté 1 et sa diagonale d. D'après le théorème de Pythagore, vu au collège :

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

donc $d = \sqrt{2}$. Reporte d au compas sur la droite graduée, depuis l'origine : $\sqrt{2}$ est l'abscisse d'un point, c'est un réel.

La calculatrice affiche $1{,}414213562$, une valeur approchée. Ce réel est pourtant irrationnel.

Pourquoi est-ce vrai ? On raisonne encore par l'absurde, avec un outil du chapitre sur $\mathbb{N}$: la parité.



La diagonale d du carré de côté 1, reportée au compas depuis l'origine sur l'axe gradué : son extrémité tombe entre 1 et 2.

Propriété : Irrationalité de √2

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

Étape 1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel. Comme $\sqrt{2} > 0$, il s'écrit sous forme irréductible $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$. En élevant au carré, on obtient $p^2 = 2q^2$.

Étape 2. Donc p^2 est pair. Or le carré d'un entier impair est impair : p est donc pair, et $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair, donc q est pair, pour la même raison.

Étape 3. Les entiers p et q sont tous deux divisibles par 2, ce qui contredit le fait que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée : supposer $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ **sous forme irréductible**, puis élever au carré. On obtient l'égalité entre entiers $p^2 = 2q^2$.

La parité montre alors que p et q sont tous deux pairs. C'est impossible pour une fraction irréductible.

Sans la forme irréductible, il n'y aurait aucune contradiction.

Vérifie : Le fait sur la parité

À l'étape 2, quel fait permet de passer de « p^2 est pair » à « p est pair » ?

A. Le carré d'un entier pair est pair.

Faux.

Ce fait est vrai, mais il va dans l'autre sens : il part de p pair.

B. La somme de deux entiers pairs est paire.

Faux.

Aucune somme n'intervient à cette étape.

C. Le carré d'un entier impair est impair.

Juste.

Juste : si p était impair, p^2 serait impair ; or p^2 est pair.

D. Un entier pair est le double d'un entier.

Faux.

Ce fait est vrai et sert juste après, pour écrire $p = 2k$. Il ne dit pas pourquoi p est pair.

Correction

Si p était impair, son carré serait impair, d'après le chapitre sur $\mathbb{N}$. Or $p^2 = 2q^2$ est pair. Donc p n'est pas impair : il est pair. Le même fait sert ensuite pour q.

Où la preuve échoue, d'autres irrationnels

Exemple : Contre-exemple : la même preuve avec la racine de 4

Le nombre $\sqrt{4} = 2 = \dfrac{2}{1}$ est rationnel. Suis la même preuve : $\sqrt{4} = \dfrac{p}{q}$ donne $p^2 = 4q^2$.

Donc p est pair, $p = 2k$, et $4k^2 = 4q^2$, soit $q^2 = k^2$. Rien n'oblige q à être pair : la contradiction disparaît. Avec $p = 2$ et $q = 1$, tout est cohérent.

C'est le facteur 2 seul devant q^2 qui fait marcher la preuve pour $\sqrt{2}$.

Vérifie : Rationnel ou irrationnel ?

Lequel de ces nombres est irrationnel ?

A. $\sqrt{2}$

Juste.

Juste : c'est l'énoncé démontré plus haut.

B. $\sqrt{4}$

Faux.

$\sqrt{4} = 2 = \dfrac{2}{1}$ est rationnel.

C. $\dfrac{12}{18}$

Faux.
C'est un quotient de deux entiers : il est rationnel, même s'il n'est pas décimal.

D. $-2{,}35$

Faux.
$-2{,}35 = \dfrac{-235}{100}$ est rationnel.

Correction
Seul $\sqrt{2}$ est irrationnel, d'après l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Les trois autres sont des quotients d'entiers : $\sqrt{4} = \dfrac{2}{1}$, $\dfrac{12}{18}$ et $-2{,}35 = \dfrac{-235}{100}$. Ce sont des rationnels.

Propriété : D'autres nombres irrationnels

Si n est un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel. Par exemple, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$ sont irrationnels.

Le nombre π est lui aussi irrationnel.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Pour $\sqrt{3}$ ou $\sqrt{5}$, l'idée ressemble à celle de $\sqrt{2}$. Pour π, la preuve dépasse le niveau du lycée.

Attention à l'hypothèse : $9 = 3^2$ est un carré, et $\sqrt{9} = 3$ est rationnel.

Un piège, puis à toi

Attention : ce qu'affiche la calculatrice

✗ « La calculatrice affiche $1{,}414213562$ pour $\sqrt{2}$, donc $\sqrt{2}$ est décimal. »

✓ L'écran n'affiche qu'un nombre fini de chiffres : c'est une **valeur approchée**. D'ailleurs, le carré de $1{,}414213562$ ne vaut pas 2.

L'écran ne prouve rien : seule une preuve tranche. De même, $0{,}3333333333$ n'est pas égal à $\dfrac{1}{3}$.

À toi : Rationnel ou irrationnel ?

Dis si chacun des nombres $\sqrt{8}$, $\sqrt{4} + \dfrac{1}{3}$ et π est rationnel ou irrationnel. Justifie chaque réponse par un résultat du cours. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour une racine carrée, cherche si le nombre sous la racine est le carré d'un entier.

Indice 2

$\sqrt{4}+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}$: écris-le comme un quotient de deux entiers.

Indice 3

Point délicat : 8 n'est le carré d'aucun entier, car $2^2=4$ et $3^2=9$.

Réponse

- 8 n'est le carré d'aucun entier, car $2^2=4$ et $3^2=9$. D'après le résultat admis sur les racines carrées, $\sqrt{8}$ est irrationnel.
- $\sqrt{4}+\frac{1}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$: c'est un quotient de deux entiers, donc un rationnel.
- π est irrationnel, d'après le même résultat admis.

Inclusions des ensembles de nombres et opérations

Des ensembles emboîtés

Devine : Un entier est-il décimal ?

Le nombre -2 est un entier relatif. Est-il aussi un nombre décimal ?

A. Non : il s'écrit sans virgule.

Faux.

Un décimal peut n'avoir aucun chiffre après la virgule : la définition demande seulement l'écriture $\frac{a}{10^n}$.

B. Oui : $-2=\frac{-2}{10^0}$.

Juste.

Juste : $10^0=1$, et $-2\in\mathbb{Z}$.

C. Non : un décimal est toujours positif.

Faux.

$-2{,}35$ est un décimal négatif : le signe ne compte pas.

Correction

Oui. Comme $10^0=1$, on a $-2=\frac{-2}{10^0}$, avec $-2\in\mathbb{Z}$ et $0\in\mathbb{N}$.

C'est la forme demandée par la définition des décimaux. Le même calcul vaut pour tout entier relatif.

En clair. Range quelques nombres du chapitre dans un tableau, et reproduis-le sur ton cahier.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{4}$	oui	oui	oui	oui	oui

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-2{,}35$	non	non	oui	oui	oui
$\frac{1}{3}$	non	non	non	oui	oui
$\sqrt{2}$	non	non	non	non	oui

Sur chaque ligne, après le premier « oui », il n'y a que des « oui ». **Pourquoi est-ce vrai ?** Chaque ensemble contient le précédent. Les « non » difficiles viennent des deux preuves déjà lues.

Chaque ensemble contient le précédent

Propriété : Inclusions entre les ensembles de nombres

On écrit $E \subset F$ (« E est inclus dans F ») lorsque tout élément de l'ensemble E appartient à l'ensemble F. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

et chacune de ces inclusions est **stricte** : $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$ mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration

Étape 1. Un entier naturel est un entier relatif : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \frac{a}{10^0}$, donc $a \in \mathbb{D}$. Si $x = \frac{a}{10^n}$ est décimal, c'est le quotient d'un entier relatif par l'entier naturel non nul 10^n : $x \in \mathbb{Q}$. Enfin, un rationnel repère un point de la droite graduée : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

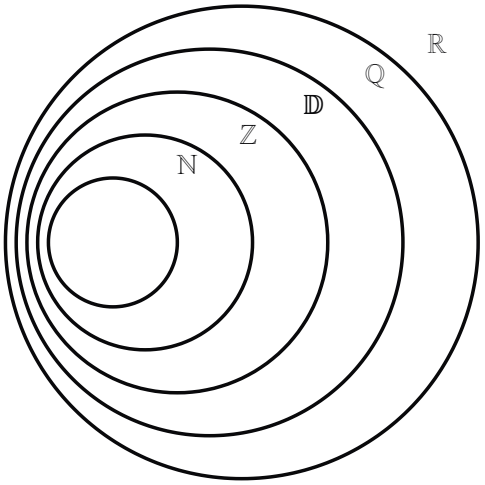
Étape 2. Les inclusions sont strictes. D'abord, $-1 \notin \mathbb{N}$. Ensuite, $\frac{1}{2} = \frac{5}{10^1}$ est décimal, mais il n'est pas entier, car $0 < \frac{1}{2} < 1$. Puis $\frac{1}{3}$ est rationnel mais n'est pas décimal, d'après la propriété « $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal ». Enfin, $\sqrt{2}$ est réel mais irrationnel, d'après l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour prouver une inclusion, on prend un élément quelconque du petit ensemble. Puis on l'écrit sous la forme qu'exige le grand ; pour $\mathbb{R}$, on le place sur la droite graduée.

Pour prouver qu'une inclusion est **stricte**, un seul exemple suffit : un élément du grand ensemble qui n'est pas dans le petit.

Les deux exemples difficiles, $\frac{1}{3}$ et $\sqrt{2}$, ont chacun demandé une preuve.



Les cinq ensembles emboîtés, du plus petit au plus grand : $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{D}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{R}$.

Vérifie : Quel exemple, pour quelle inclusion ?

Dans la preuve, quel nombre montre que $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas le même ensemble ?

A. -1

Faux.

-1 sépare $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{N}$: il est entier relatif, mais pas naturel.

B. $\frac{1}{2}$

Faux.

$\frac{1}{2}$ sépare $\mathbb{D}$ de $\mathbb{Z}$: il est décimal, mais pas entier.

C. $\sqrt{2}$

Faux.

$\sqrt{2}$ sépare $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$: il n'est même pas rationnel.

D. $\frac{1}{3}$

Juste.

Juste : $\frac{1}{3}$ est rationnel, mais pas décimal.

Correction

Il faut un rationnel qui ne soit pas décimal. C'est $\frac{1}{3}$, d'après la propriété « $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal ».

Chaque inclusion stricte a ainsi son exemple : -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, puis $\sqrt{2}$.

Exemple : un nombre dans plusieurs ensembles

- $\sqrt{4} = 2$ et $2 \in \mathbb{N}$. Grâce aux inclusions, $2 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{D}$, $2 \in \mathbb{Q}$ et $2 \in \mathbb{R}$.
- $\dfrac{7}{20} = 0{,}35$ est décimal, mais pas entier. Donc $\dfrac{7}{20} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{7}{20} \in \mathbb{R}$.
- Le **plus petit** ensemble qui contient un nombre est le plus à gauche dans la chaîne des inclusions : $\mathbb{N}$ pour $\sqrt{4}$, $\mathbb{D}$ pour $\dfrac{7}{20}$.

Rappel du collège : les règles de calcul

Propriété : Règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Pour tous réels a, b et c :

- $a + b = b + a$ et $ab = ba$ (commutativité) ;
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ et $(ab)c = a(bc)$ (associativité) ;
- $a(b + c) = ab + ac$ (distributivité) ;
- $a + 0 = a$, $a \times 1 = a$, $a + (-a) = 0$ et, si $a \neq 0$, $a \times \dfrac{1}{a} = 1$;
- $ab = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.

Pour tous réels a et c, et tous réels non nuls b et d : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$ et $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$; si de plus $c \neq 0$, $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Ce sont les règles de calcul du collège, rappelées ici pour tous les réels. Tu les emploies dans chaque calcul de ce chapitre.

Exemple : calculer avec des fractions

D'après les règles de calcul sur les quotients :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} + \frac{2}{3} &= \frac{1 \times 3 + 4 \times 2}{4 \times 3} \\ &= \frac{11}{12},\end{aligned}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Pour diviser, on multiplie par l'inverse :

$$\begin{aligned}\frac{7}{20} \div \frac{1}{4} &= \frac{7}{20} \times \frac{4}{1} \\ &= \frac{28}{20} = \frac{7}{5}.\end{aligned}$$

Somme et produit restent dans la famille

En clair. Additionne à la main $0{,}35$ et $0{,}375$: tu trouves $0{,}725$, encore un décimal. Multiplie $\frac{1}{4}$ par $\frac{2}{3}$: tu trouves $\frac{2}{12}$, encore un rationnel.

Pourquoi est-ce vrai ? Les règles de calcul sur les quotients fabriquent un nouveau quotient. Il reste à vérifier que son numérateur et son dénominateur sont du bon type.

Propriété : Somme et produit de décimaux, de rationnels

La somme et le produit de deux nombres décimaux sont des nombres décimaux.

La somme et le produit de deux nombres rationnels sont des nombres rationnels.

Démonstration

Étape 1. Soit $x = \frac{a}{10^n}$ et $y = \frac{b}{10^m}$ deux décimaux, avec a et b dans $\mathbb{Z}$, n et m dans $\mathbb{N}$. D'après les règles de calcul sur les quotients, et puisque $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$ (puissances de 10, rappel du collège), $x + y = \frac{a \times 10^m + b \times 10^n}{10^{n+m}}$ et $xy = \frac{ab}{10^{n+m}}$. Les numérateurs sont des entiers relatifs : $x + y$ et xy sont décimaux.

Étape 2. Soit $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux rationnels, avec a et c dans $\mathbb{Z}$, b et d dans $\mathbb{N}^*$. De même, $x + y = \frac{ad + bc}{bd}$ et $xy = \frac{ac}{bd}$. Or $ad + bc$ et ac sont des entiers relatifs, et $bd \in \mathbb{N}^*$: $x + y$ et xy sont rationnels.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit chaque nombre sous la forme qu'exige sa définition, puis on calcule avec les règles sur les quotients.

- Pour des décimaux, le dénominateur obtenu est $10^n \times 10^m = 10^{n+m}$, encore une puissance de 10.
- Pour des rationnels, c'est bd, encore un entier naturel non nul.

Enfin, une somme ou un produit d'entiers relatifs est un entier relatif : le numérateur reste du bon type.

Vérifie : Le dénominateur de la preuve

À l'étape 2, pourquoi le dénominateur bd convient-il pour un rationnel ?

A. Parce que bd est une puissance de 10.
Faux.
Ce n'est pas exigé pour un rationnel ; c'est d'ailleurs faux en général, par exemple pour $b = 3$.

B. Parce que b et d n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Faux.

La preuve n'exige rien de tel : les fractions ne sont pas supposées irréductibles.

C. Parce qu'un produit d'entiers naturels non nuls est un entier naturel non nul.

Juste.

Juste : b et d sont dans $\mathbb{N}^*$, donc bd aussi.

D. Parce que $bd = b + d$.

Faux.

C'est faux : pour $b = 4$ et $d = 3$, $bd = 12$ et $b + d = 7$.

Correction

Un rationnel s'écrit $\dfrac{a}{b}$ avec $b \in \mathbb{N}^*$. Comme b et d sont des entiers naturels non nuls, leur produit bd l'est aussi. Le dénominateur de $x + y$ et de xy a donc la forme demandée.

Trouver le plus petit ensemble

Exemple : Exemple, puis une limite de la propriété

Un produit de décimaux. On a $\dfrac{7}{20} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{80}$. Ce produit de deux décimaux est décimal :

$$\frac{7}{80} = \frac{7 \times 125}{80 \times 125} = \frac{875}{10^4}.$$

Une limite de la propriété. Elle ne dit rien des irrationnels. Par exemple, $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ est rationnel. Un produit d'irrationnels peut donc être rationnel.

Méthode : trouver le plus petit ensemble qui contient un nombre

1. **Simplifie** l'écriture du nombre : fraction irréductible, racine carrée, puissance.
2. **Teste** les ensembles dans l'ordre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$: entier naturel ? entier relatif ? forme $\dfrac{a}{10^n}$? forme $\dfrac{a}{b}$?
3. **Justifie** chaque « non » par un résultat du cours.
4. **Conclus** avec les symboles $\in$ et $\notin$.

Exemple : trois nombres à classer

- $\dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$. Si $\dfrac{2}{3}$ était décimal, $\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} \times 0{,}5$ le serait aussi, comme produit de deux décimaux. C'est faux : donc $\dfrac{12}{18} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{12}{18} \notin \mathbb{D}$.
- $-2{,}35 = \dfrac{-235}{10^2}$ n'est pas entier : $-2{,}35 \in \mathbb{D}$ et $-2{,}35 \notin \mathbb{Z}$.

- 72 n'est le carré d'aucun entier, car $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$. Donc $\sqrt{72}$ est irrationnel : $\sqrt{72} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{72} \notin \mathbb{Q}$.

À toi : Le plus petit ensemble

Trouve le plus petit ensemble qui contient chacun des nombres $\frac{1}{4} + \frac{3}{8}$, $\sqrt{4} - \frac{2}{3}$ et π. Justifie chaque réponse. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Commence par simplifier chaque nombre : réduis au même dénominateur.
Indice 2
Tu dois trouver $\frac{5}{8}$ et $\frac{4}{3}$. Pour $\frac{5}{8}$, cherche un entier qui, multiplié par 8, donne 1000.
Indice 3
Point délicat : pour $\frac{4}{3}$, multiplie-le par le décimal $0{,}25$. Que trouves-tu ?

Réponse
- $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = \frac{625}{10^3}$, qui n'est pas entier. Le plus petit ensemble est $\mathbb{D}$.
- $\sqrt{4} - \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Si $\frac{4}{3}$ était décimal, $\frac{4}{3} \times 0{,}25 = \frac{1}{3}$ le serait aussi, comme produit de deux décimaux. C'est faux : le plus petit ensemble est $\mathbb{Q}$.
- π est irrationnel, d'après le résultat admis : le plus petit ensemble est $\mathbb{R}$.

Puissances et écriture scientifique

Des exposants négatifs

Devine : Continuer le motif

Rappel du collège : $10^3 = 1000$, $10^2 = 100$ et $10^1 = 10$. Chaque fois que l'exposant baisse de 1, on divise par 10. En continuant ce motif, que vaut 10^{-1} ?

A. -10
Faux.
Un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif : on a encore divisé par 10.

B. 0
Faux.
Diviser par 10 ne donne jamais 0 : après $10^0 = 1$, on trouve $\frac{1}{10}$.

C. $0{,}1$
Juste.
Juste : $10^0 = 10 \div 10 = 1$, puis $10^{-1} = 1 \div 10 = 0{,}1$.

D. -1

Faux.
On a retiré 1 au lieu de diviser par 10.

Correction
On continue à diviser par 10 : $10^0 = 1$, puis $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$, et $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$. La définition qui suit prolonge ce motif à tout réel non nul.

Définition : Puissance d'exposant entier

Soit a un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Si $a \neq 0$, on pose de plus $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. L'entier relatif placé en haut à droite est l'**exposant**.

Par exemple, $10^3 = 1000$, $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ et $(-2)^3 = -8$.

Vérifie : Un exposant négatif

D'après la définition, combien vaut 2^{-2} ?

A. -4
Faux.
Ici, 2^{-2} est l'inverse de 2^2, pas son opposé.

B. $\dfrac{1}{4}$
Juste.
Juste : $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

C. $-\dfrac{1}{4}$
Faux.
Le signe moins de l'exposant donne un inverse ; il ne rend pas le nombre négatif.

D. 4
Faux.
$4 = 2^2$: l'exposant -2 a été lu comme 2.

Correction
Par définition, $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$. Un exposant négatif donne l'**inverse** d'une puissance, pas son opposé.

Compter les facteurs

En clair. Écris $2^3 \times 2^4$ en entier :

$$(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2).$$

Tu comptes sept facteurs égaux à 2, donc $2^3 \times 2^4 = 2^7$: les exposants s'ajoutent.

Pourquoi est-ce vrai ? Pour des exposants entiers naturels non nuls, il suffit de compter les facteurs. Les autres cas se ramènent à celui-là.

Propriété : Règles de calcul sur les puissances

Soit a et b deux réels non nuls, et m et n deux entiers relatifs. Alors

$$a^m \times a^n = a^{m+n}, \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Démonstration

Idée de la preuve. Pour des exposants m et n dans $\mathbb{N}^*$, on compte les facteurs : $a^m \times a^n$ est un produit de m facteurs égaux à a, suivis de n autres, soit $m+n$ facteurs ; $(a^m)^n$ est un produit de n blocs de m facteurs, soit mn facteurs. Par commutativité et associativité, $(ab)^n$ se réordonne en $a^n b^n$. Les cas où un exposant est nul ou négatif se ramènent à ceux-là grâce à $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, et les deux règles de quotient s'obtiennent en écrivant $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$ et $\dfrac{a}{b} = a \times b^{-1}$: ces vérifications, cas par cas, sont omises.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une puissance d'exposant entier naturel non nul est un produit de facteurs égaux : les règles de produit se lisent en **comptant ces facteurs**.

Les cas d'un exposant nul ou négatif se déduisent des définitions $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Les règles de quotient s'y ramènent, car diviser par a^n revient à multiplier par a^{-n}, et diviser par b à multiplier par b^{-1}.

Ces vérifications ne sont pas écrites : c'est une idée de preuve, pas une preuve complète.

Vérifie : Ajouter ou multiplier les exposants ?

D'après l'idée de la preuve, combien de facteurs égaux à a contient $(a^3)^2$?

A. 5

Faux.
On a ajouté les exposants : c'est la règle d'un produit $a^3 \times a^2$.

B. 9

Faux.

$3^2 = 9$: on a élevé l'exposant au carré.

C. 8

Faux.

$2^3 = 8$: on a échangé les rôles des deux exposants.

D. 6

Juste.

Juste : deux blocs de trois facteurs, soit $2 \times 3 = 6$.

Correction

$(a^3)^2 = a^3 \times a^3$: deux blocs de trois facteurs. On compte $3 \times 2 = 6$ facteurs, donc $(a^3)^2 = a^6$. C'est la règle $(a^m)^n = a^{mn}$.

Calculer avec les règles

Exemple : les règles en action

D'après les règles de calcul sur les puissances :

$$\frac{2^3 \times 2^4}{2^5} = 2^{3+4-5} = 2^2 = 4,$$

$$\begin{aligned}(2 \times 5)^3 &= 2^3 \times 5^3 \\ &= 8 \times 125 = 1000.\end{aligned}$$

Avec des exposants négatifs, les règles s'appliquent de la même façon :

$$4^{-1} \times 4^3 = 4^{-1+3} = 4^2 = 16,$$

$$\frac{7^2}{7^{-1}} = 7^{2-(-1)} = 7^3 = 343.$$

L'hypothèse « a non nul » est nécessaire : 0^{-2} n'a pas de sens, car il faudrait diviser par $0^2 = 0$.

Attention : une somme de puissances

✗ « $2^3 + 2^4 = 2^7$. »

✓ Les règles portent sur des **produits** de puissances, jamais sur des sommes. Ici, $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$, alors que $2^7 = 128$.

Surveille aussi les parenthèses : $(-3)^2 = 9$, mais $-3^2 = -9$.

Méthode : simplifier une expression avec des puissances

1. **Décompose** chaque nombre en produit de facteurs premiers, par exemple $12 = 2^2 \times 3$.
2. **Regroupe** les puissances d'un même nombre premier.

3. **Applique** les règles de calcul sur les puissances, et nomme-les.
4. **Écris** le résultat sous la forme demandée.

Exemple : Exemple guidé : un quotient de puissances

Simplifions $A = \dfrac{12^3}{2^5 \times 3^2}$.

Décomposition. Comme $12 = 2^2 \times 3$, les règles de calcul sur les puissances donnent $12^3 = (2^2)^3 \times 3^3 = 2^6 \times 3^3$.

Calcul. On en déduit :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^6 \times 3^3}{2^5 \times 3^2} \\ &= 2^{6-5} \times 3^{3-2} \\ &= 2 \times 3 = 6. \end{aligned}$$

Contrôle. $12^3 = 1728$, $2^5 \times 3^2 = 288$, et $1728 = 6 \times 288$.

Très grands et très petits nombres

La distance moyenne de la Terre au Soleil vaut environ $150\,000\,000$ km. Un globule rouge mesure environ $0{,}000007$ m de diamètre.

Avec tant de zéros, une erreur de compte arrive vite. Les physiciens écrivent donc ces nombres avec une puissance de 10, sous une forme unique.

Propriété : Écriture scientifique d'un nombre décimal

Tout nombre décimal x strictement positif s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = a \times 10^p, \quad \text{où } a \in \mathbb{D},\ 1 \leq a < 10 \ \text{ et } \ p \in \mathbb{Z}.$$

Cette écriture est l'**écriture scientifique** de x. Si x est un décimal strictement négatif, son écriture scientifique est $x = -a \times 10^p$, où $a \times 10^p$ est l'écriture scientifique de $-x$.

Par exemple, $43\,200 = 4{,}32 \times 10^4$ et $0{,}00071 = 7{,}1 \times 10^{-4}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Sur chaque exemple, tu peux constater qu'une seule position de la virgule donne $1 \leq a < 10$; l'unicité dans le cas général est admise.

Écrire en notation scientifique

Méthode : écrire un nombre en notation scientifique

1. **Place** la virgule après le premier chiffre non nul : tu obtiens a, avec $1 \leq a < 10$.
2. **Compte** de combien de rangs la virgule s'est déplacée : p est ce nombre de rangs si elle s'est déplacée vers la gauche (nombre au moins égal à 10), son opposé si elle s'est déplacée vers la droite (nombre inférieur à 1).
3. **Vérifie** en calculant $a \times 10^{p}$: tu dois retrouver le nombre de départ.

Exemple : le Soleil et un globule rouge

- Pour $150\,000\,000$, la virgule se place après le 1 : elle recule de 8 rangs vers la gauche. La distance Terre–Soleil vaut donc environ $1{,}5 \times 10^{8}$ km.
- Pour $0{,}000007$, la virgule avance de 6 rangs vers la droite, jusqu'après le 7. Le diamètre d'un globule rouge vaut donc environ 7×10^{-6} m.
- Vérification : $1{,}5 \times 10^{8} = 150\,000\,000$ et $7 \times 10^{-6} = 0{,}000007$.

À toi : Un produit en notation scientifique

Calcule $B = 0{,}00071 \times 43\,200$ avec les puissances de 10, puis donne l'écriture scientifique de B. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $0{,}00071 = 71 \times 10^{-5}$ et $43\,200 = 432 \times 10^{2}$: simple étape de calcul, ce ne sont pas des écritures scientifiques.
Indice 2
Regroupe les entiers et les puissances de 10 : $71 \times 432 = 30\,672$.
Indice 3
Point délicat : $30\,672 \times 10^{-3}$ n'est pas encore une écriture scientifique ; replace la virgule après le premier chiffre.

Réponse
D'après les règles de calcul sur les puissances :

$$\begin{aligned} B &= 71 \times 10^{-5} \\ &\quad \times 432 \times 10^{2} \\ &= (71 \times 432) \\ &\quad \times 10^{-5+2} \\ &= 30\,672 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Or $30\,672 = 3{,}0672 \times 10^{4}$. Donc :

$$B = 3{,}0672 \times 10^{4} \times 10^{-3}$$
$$= 3{,}0672 \times 10^{1}.$$

Conclusion. L'écriture scientifique de B est $3{,}0672 \times 10^{1}$.

Contrôle : $3{,}0672 \times 10^{1} = 30{,}672$.

Racines carrées et expression conjuguée

Les règles des racines carrées

Devine : Un produit de racines

Rappel du collège : pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre positif ou nul dont le carré vaut a. Lequel de ces nombres est égal à $\sqrt{4} \times \sqrt{2}$?

A. $\sqrt{6}$

Faux.
On a ajouté 4 et 2 sous la racine : c'est le produit qui compte.

B. $4\sqrt{2}$

Faux.
$\sqrt{4}$ vaut 2, pas 4.

C. $\sqrt{8}$

Juste.
Juste : le carré de $\sqrt{4} \times \sqrt{2}$ vaut $4 \times 2 = 8$.

D. 8

Faux.
8 est le carré du produit, pas le produit lui-même.

Correction
Le nombre $\sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ est positif. Son carré vaut $2^2 \times (\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$.

C'est donc le nombre positif dont le carré vaut 8 : $\sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{8}$.

En clair. Pour reconnaître $\sqrt{8}$, deux vérifications suffisent : le nombre est positif ou nul, et son carré vaut 8.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque réel $a \geq 0$ a une seule racine carrée : un seul réel positif ou nul a pour carré a. Les règles qui suivent reposent toutes sur cette **unicité**.

Propriété : Propriétés des racines carrées

Pour tout réel $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut a. Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \qquad \sqrt{a^2} = a, \qquad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

et, si de plus $b > 0$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Démonstration

Étape 1. Par définition de $\sqrt{a}$, on a $(\sqrt{a})^2 = a$. Le réel a est positif ou nul et son carré vaut a^2 : par unicité de la racine carrée de a^2, $\sqrt{a^2} = a$.

Étape 2. Le produit $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif ou nul. Par commutativité et associativité du produit, son carré vaut $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$. Par unicité de la racine carrée de ab, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Étape 3. Si $b > 0$, alors $\sqrt{b} \neq 0$, car $0^2 = 0 \neq b$; donc $\sqrt{b} > 0$. Le quotient $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est positif ou nul et, d'après la règle du produit de deux quotients, son carré vaut $\dfrac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \dfrac{a}{b}$. Donc $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'un réel est égal à $\sqrt{c}$, on vérifie deux choses : il est positif ou nul, et son carré vaut c. L'unicité de la racine carrée conclut.

Les hypothèses $a \geq 0$ et $b \geq 0$ sont indispensables : sans elles, $\sqrt{a}$ ou $\sqrt{b}$ n'a pas de sens.

Vérifie : Le rôle du signe

À l'étape 2, pourquoi la preuve précise-t-elle que $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif ou nul ?

A. Parce que $\sqrt{ab}$ est le seul réel positif ou nul de carré ab.
Juste.
Juste : sans le signe, l'unicité ne s'appliquerait pas.

B. Parce que le carré d'un réel est toujours positif ou nul.
Faux.
C'est vrai, mais cela ne dit pas lequel des deux réels de carré ab est le produit.

C. Parce que les réels a et b sont des entiers naturels.
Faux.
Les réels a et b ne sont pas supposés entiers.

D. Parce que les réels a et b sont égaux entre eux.
Faux.
Rien n'oblige a et b à être égaux.

Correction
Si ab n'est pas nul, deux réels ont pour carré ab : $\sqrt{ab}$ et son opposé.

> Pour conclure, il faut savoir lequel des deux est $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$. Comme ce produit est positif ou nul, c'est $\sqrt{ab}$, d'après l'unicité.

Simplifier une racine carrée

Exemple : Exemple, puis une hypothèse nécessaire

- D'après les propriétés des racines carrées, $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.
- L'égalité $\sqrt{a^2} = a$ exige $a \geq 0$. Avec $a = -3$, on trouve $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, et non -3.

Attention : la racine d'une somme

✗ « $\sqrt{4+4} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$. »

✓ La règle $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ vaut pour un **produit**, jamais pour une somme. Ici, $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$, et $\sqrt{8}$ ne vaut pas 4, car $4^2 = 16$.

En revanche, $\sqrt{4 \times 4} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4$.

Méthode : simplifier une racine carrée

1. **Cherche** le plus grand carré parfait qui divise le nombre sous la racine : $72 = 36 \times 2$.
2. **Applique** $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$: $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.
3. **Réduis** une somme en regroupant les termes qui contiennent la **même** racine : $3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$, mais $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne se réduit pas.

Exemple : Exemple guidé : réduire une somme de racines

Le plus grand carré parfait qui divise 72 est 36, et $72 = 36 \times 2$. D'après les propriétés des racines carrées, $\sqrt{72} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

De même, $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$. Donc :

$$\sqrt{72} + \sqrt{8} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

Contrôle : $(6\sqrt{2})^2 = 36 \times 2 = 72$.

Un dénominateur sans racine

Rappel du collège. Pour tous réels x et y, $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$: le produit ne contient plus de terme en xy. Cette identité est reprise et démontrée dans la section sur les identités remarquables.

Elle sert ici à écrire un quotient sous une forme standard, avec un dénominateur sans racine, plus simple à lire et à calculer.

Méthode : rendre rationnel un dénominateur

1. **Repère** le dénominateur, supposé non nul : $\sqrt{b}$, ou une somme $\sqrt{b}+c$, ou une différence $\sqrt{b}-c$, avec $b \geq 0$, c entier ou racine carrée, et $b \neq c^2$ (sinon l'expression conjuguée serait nulle).
2. **Multiplie** le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$, ou par l'**expression conjuguée** ($\sqrt{b}-c$ pour $\sqrt{b}+c$, et inversement).
3. **Développe** le dénominateur avec l'identité du collège $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$: $(\sqrt{b}-c)(\sqrt{b}+c)=b-c^2$ ne contient plus de racine.

Exemple : Exemple guidé : deux dénominateurs rendus rationnels

Une racine seule. On a $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, car $(\sqrt{3})^2=3$.

Une différence. Pour $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$, l'expression conjuguée est $\sqrt{5}+2$. D'après l'identité du collège $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}-2}&=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}\\&=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\sqrt{5}+2.\end{aligned}$$

À toi : Deux simplifications

Simplifie $C=\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$, puis écris $D=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ avec un dénominateur sans racine. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour C, applique la propriété du quotient de deux racines carrées.

Indice 2

Pour D, multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{8}$, puis simplifie $\sqrt{8}$.

Indice 3

Point délicat : $\dfrac{2\sqrt{2}}{8}$ se simplifie encore par 2.

Réponse

Calcul de C. D'après les propriétés des racines carrées :

$$C=\sqrt{\frac{72}{8}}=\sqrt{9}=3.$$

Calcul de D. On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{8}$:

$$D = \frac{\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Remarque : Coin devoir : rendre un dénominateur rationnel

En devoir, nomme l'expression conjuguée et l'identité employée. Écris par exemple : « On multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée $\sqrt{5}+2$. D'après l'identité $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, le dénominateur vaut $5-4=1$. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$. »

Termine par un contrôle à la calculatrice : les deux valeurs approchées affichées sont égales.

Identités remarquables

Le carré d'une somme

Devine : Un carré à calculer

Combien vaut $(3+4)^2$?

A. 25

Faux.

$25 = 3^2 + 4^2$: on a élevé chaque terme au carré, et oublié un morceau.

B. 49

Juste.

Juste : $3+4=7$, et $7^2=49$.

C. 14

Faux.

$14 = 2 \times 7$: on a doublé au lieu d'élever au carré.

D. 24

Faux.

$24 = 2 \times 3 \times 4$: c'est seulement le double produit.

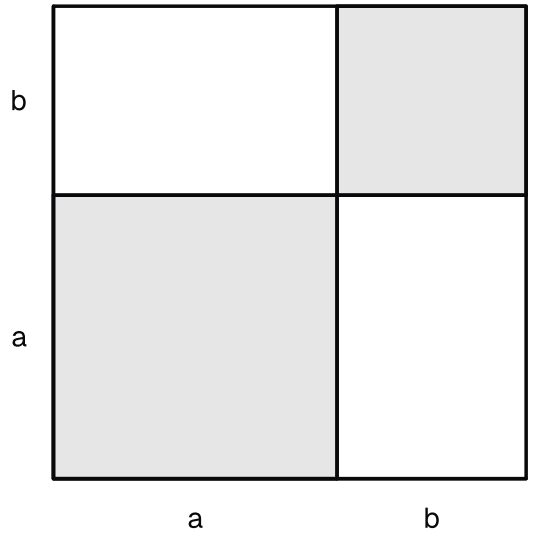
Correction

On calcule d'abord la parenthèse : $(3+4)^2 = 7^2 = 49$.

Le calcul $3^2 + 4^2 = 25$ oublie $2 \times 3 \times 4 = 24$. Et en effet, $25 + 24 = 49$.

Rappel du collège. Trace un carré de côté $a+b$ et découpe-le. Tu obtiens un carré d'aire a^2, un carré d'aire b^2 et deux rectangles d'aire ab. Fais la figure sur ton cahier.

Pourquoi est-ce vrai ? La figure suppose a et b positifs. Pour tous les réels, la distributivité suffit.



Le carré de côté a + b découpé en un carré a², un carré b² et deux rectangles ab.

Propriété : Identités remarquables du second degré

Pour tous réels a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Démonstration

Étape 1. Par distributivité, $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$. Comme $ba = ab$, on obtient $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Étape 2. En remplaçant b par $-b$ dans cette égalité : $(a-b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, car $(-b)^2 = b^2$ (règle des signes).

Étape 3. Par distributivité, $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$, car $ab - ba = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Développer $(a+b)^2$, c'est multiplier $a+b$ par lui-même, chaque terme par chaque terme.

Une seule identité suffit ensuite : **remplacer b par $-b$** donne la deuxième. La troisième vient encore de la distributivité, car $ab - ba = 0$.

Vérifie : Des termes qui disparaissent

À l'étape 3, pourquoi les termes ab et $-ba$ disparaissent-ils ?

A. Parce que $a = b$.

Faux.
Rien n'oblige a et b à être égaux : l'identité vaut pour tous réels.

B. Parce qu'un carré est toujours positif.
Faux.
Aucun carré n'intervient dans ces deux termes.

C. Parce qu'ils forment le double produit $2ab$.
Faux.
Le double produit apparaît dans $(a+b)^2$. Ici, les deux termes ont des signes contraires.

D. Parce que $ba = ab$: le produit est commutatif.
Juste.
Juste : $ab - ba = ab - ab = 0$.

Correction
D'après la commutativité du produit, $ba = ab$. Donc $ab - ba = 0$, et il reste $a^2 - b^2$.

Un exemple, un piège

Exemple : les identités avec une racine carrée

D'après les identités remarquables du second degré :

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}-2)^2 &= 5 - 4\sqrt{5} + 4 \\ &= 9 - 4\sqrt{5},\end{aligned}$$

$$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 5 - 4 = 1.$$

La seconde égalité explique l'expression conjuguée : le produit ne contient plus de racine.

Attention : le carré d'une somme

✗ « $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. »

✓ Il manque le double produit : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Contrôle sur le cas du début : $(3+4)^2 = 49$, alors que $3^2 + 4^2 = 25$. L'écart vaut $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Les identités des cubes

Le lycée ajoute deux identités pour les cubes. Teste la première avec $a = 4$ et $b = 3$:

$$\begin{aligned}4^3 - 3^3 &= 64 - 27 = 37, \\ (4-3)(4^2 + 4 \times 3 + 3^2) &= 1 \times 37 \\ &= 37.\end{aligned}$$

Pourquoi est-ce vrai ? On développe le membre de droite : les termes se compensent deux à deux.

Propriété : Identités remarquables du troisième degré

Pour tous réels a et b :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2), \qquad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Démonstration

Étape 1. Par distributivité, $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3$. Les termes a^2b et $-ba^2$ s'annulent, ainsi que ab^2 et $-ab^2$: il reste $a^3 - b^3$.

Étape 2. En remplaçant b par $-b$ dans l'égalité obtenue, on a $a^3 - (-b)^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$. Dans le second facteur, $(-b)^2 = b^2$ et $a(-b) = -ab$. Comme $(-b)^3 = -b^3$ (règle des signes), le membre de gauche vaut $a^3 + b^3$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées à réutiliser.

D'abord, on développe le produit et on repère les termes **opposés**, qui s'annulent.

Ensuite, on obtient la seconde identité sans nouveau calcul, en **remplaçant b par $-b$**. Cela marche car un cube garde le signe : $(-b)^3 = -b^3$.

Vérifie : Le fait sur les puissances

À l'étape 2, quelle égalité permet de passer de $a^3 - (-b)^3$ à $a^3 + b^3$?

A. $(-b)^2 = -b^2$

Faux.
Cette égalité est fausse dès que $b \neq 0$: $(-b)^2 = b^2$.

B. $b^3 = 3b$

Faux.
Faux : l'exposant compte des facteurs. Pour $b = 2$, $b^3 = 8$ et $3b = 6$.

C. $(-b)^3 = -b^3$

Juste.
Juste : trois facteurs égaux à $-b$ donnent $-b^3$.

D. $(-b)^3 = b^3$

Faux.
Faux dès que $b \neq 0$: trois signes moins laissent un signe moins.

Correction

> D'après la définition des puissances, $(-b)^3 = (-b) \times (-b) \times (-b) = -b^3$. Donc $a^3 - (-b)^3 = a^3 + b^3$.

Factoriser et choisir l'écriture

Exemple : factoriser une somme de cubes

Comme $64 = 4^3$, on a $x^3 + 64 = x^3 + 4^3$. Par l'identité $a^3 + b^3$, avec $a = x$ et $b = 4$:

$$x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$$

Contrôle pour $x = 1$: $1 + 64 = 65$, et $(1 + 4)(1 - 4 + 16) = 5 \times 13 = 65$.

Attention : les signes dans les cubes

✗ « $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 + 4x + 16)$. »

✓ Compare les signes dans les deux identités :

- dans $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, le facteur $a + b$ garde le $+$ et le terme du milieu est $-ab$;
- dans $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, le facteur $a - b$ garde le $-$ et le terme du milieu est $+ab$.

Contrôle pour $x = 1$: $(1 + 4)(1 + 4 + 16) = 105$, et non 65.

Méthode : factoriser avec une identité remarquable

1. **Reconnais** la forme : $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ ou $a^3 + b^3$.
2. **Identifie** a et b, en écrivant chaque terme comme un carré ou un cube.
3. **Écris** la forme factorisée, puis **vérifie** en développant ou en testant une valeur.

Exemple : factoriser, puis choisir l'écriture

Une différence de carrés. Pour tout réel x, soit $G = (3x + 2)^2 - 4$. Comme $4 = 2^2$, on prend $a = 3x + 2$ et $b = 2$. Par l'identité $a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} G &= (3x + 2 - 2)(3x + 2 + 2) \\ &= 3x(3x + 4). \end{aligned}$$

Contrôle pour $x = 1$: $25 - 4 = 21$ et $3 \times 7 = 21$.

Une différence de cubes. Soit $E = 8x^3 - 27$. Comme $8x^3 = (2x)^3$ et $27 = 3^3$, on prend $a = 2x$ et $b = 3$. Par l'identité $a^3 - b^3$:

$$E = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9).$$

Choisir l'écriture. Pour $x = 0$, la forme de départ donne directement $E = -27$. Pour $x = \dfrac{3}{2}$, la forme factorisée donne $E = 0$, car son premier facteur est nul.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Une somme de cubes

Factorise $F = 8x^3 + 64$ avec une identité remarquable, puis vérifie ton résultat pour $x = 1$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris chaque terme comme un cube : $8x^3 = (2x)^3$ et $64 = 4^3$.
Indice 2
Applique l'identité $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, avec $a = 2x$ et $b = 4$.
Indice 3
Point délicat : le terme du milieu est $-ab = -8x$, avec un signe moins.

Réponse
Comme $8x^3 = (2x)^3$ et $64 = 4^3$, l'identité $a^3 + b^3$, avec $a = 2x$ et $b = 4$, donne :

$$\begin{aligned} F &= (2x + 4) \\ &\quad \times (4x^2 - 8x + 16). \end{aligned}$$

On met encore 2 en facteur dans le premier facteur, et 4 dans le second :

$$\begin{aligned} F &= 2(x + 2) \\ &\quad \times 4(x^2 - 2x + 4) \\ &= 8(x + 2) \\ &\quad \times (x^2 - 2x + 4). \end{aligned}$$

Contrôle pour $x = 1$: $8 + 64 = 72$, et $8 \times 3 \times 3 = 72$.

Remarque : Coin devoir : rédiger une factorisation

En devoir, une factorisation se justifie en nommant l'identité et en donnant a et b. Écris par exemple : « On a $8x^3 = (2x)^3$ et $27 = 3^3$. D'après l'identité $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, avec $a = 2x$ et $b = 3$, on obtient $8x^3 - 27 = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$. »

Termine par un contrôle en une valeur simple, comme $x = 0$.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Classer** un nombre : le simplifier, tester $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, puis justifier chaque « non ».

- **Montrer** qu'un nombre n'est pas décimal, ou pas rationnel : raisonner par l'absurde, avec les facteurs premiers ou la parité.
- **Calculer** avec des puissances : décomposer en facteurs premiers, puis appliquer les règles sur les **produits**.
- **Écrire** en notation scientifique : un seul chiffre non nul avant la virgule, puis l'exposant compté.
- **Simplifier** une racine carrée : extraire le plus grand carré parfait. **Rendre rationnel** un dénominateur : l'expression conjuguée.
- **Développer ou factoriser** : reconnaître l'identité, identifier a et b, puis vérifier.

Le mot du prof. Tu sais maintenant à quelle famille appartient chaque nombre, et tu as lu tes premières preuves par l'absurde.

La calculatrice reste utile pour vérifier ; elle ne prouve jamais. Le prochain chapitre, « L'ordre dans $\mathbb{R}$ », t'apprendra à comparer ces nombres.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ » (tc · sciences · mathematiques)