BURHAN

Résumé : L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensemble-n-et-arithmetique/resume

Chapitre	Semestre
L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique	Semestre 1

L'ensemble des entiers naturels

Définition : L'ensemble des entiers naturels

Les nombres 0, 1, 2, 3, … sont les **entiers naturels**. Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

- On écrit $n \in \mathbb{N}$ (« n appartient à $\mathbb{N}$ ») pour dire que n est un entier naturel, et $x \notin \mathbb{N}$ (« x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ») dans le cas contraire.
- L'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$. Tout élément de $\mathbb{N}^*$ est un élément de $\mathbb{N}$: on dit que $\mathbb{N}^*$ est **inclus** dans $\mathbb{N}$, et on écrit $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.
- Deux entiers naturels de la forme n et $n+1$ sont dits **consécutifs**.

À retenir : Lire les symboles à voix haute

Lis $\in$ « appartient à » et $\notin$ « n'appartient pas à » : ces symboles relient un nombre à un ensemble. Lis $\subset$ « est inclus dans » : ce symbole relie deux ensembles.

Exemple

Énoncé. Les nombres $\frac{21}{7}$ et $\frac{7}{2}$ sont-ils des entiers naturels ?

Réponse. $\frac{21}{7} = 3$, donc $\frac{21}{7} \in \mathbb{N}$, et même $\frac{21}{7} \in \mathbb{N}^*$. En revanche, $\frac{7}{2} = 3{,}5$ n'est pas entier : $\frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$.

Ensembles. $\{0; 3\} \subset \mathbb{N}$, mais $\{0; 3\}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}^*$, car $0 \notin \mathbb{N}^*$.

Multiples et diviseurs

Définition : Multiples et diviseurs

Soit a et b deux entiers naturels. On dit que b est un **multiple** de a s'il existe un entier naturel k tel que

$$b = k \times a.$$

On dit alors aussi que a est un **diviseur** de b, ou que a **divise** b.

- 0 est un multiple de tout entier naturel a, car $0 = 0 \times a$.
- 1 divise tout entier naturel b, et b divise b, car $b = b \times 1 = 1 \times b$.

- 0 ne divise que 0, car $k \times 0 = 0$ pour tout entier naturel k.

Propriété : Propriétés des multiples et des diviseurs

Soit a un entier naturel non nul, et b et c deux entiers naturels.

1. Si a divise b, alors a divise $k \times b$ pour tout entier naturel k.
2. Si a divise b et a divise c, alors a divise $b + c$; si de plus $b \geq c$, alors a divise $b - c$.
3. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
4. Si a divise b et $b \neq 0$, alors $a \leq b$.

Méthode : prouver une divisibilité

1. **Pour prouver** que a divise b, écris $b = k \times a$ et donne la valeur de l'entier k.
2. **Avec des lettres**, factorise par a : le facteur restant joue le rôle de k.
3. **Pour prouver** que a ne divise pas b, place b strictement entre deux multiples de a qui se suivent, $k \times a < b < (k+1) \times a$. Aucun entier ne se trouve strictement entre k et $k+1$: b n'est donc pas un multiple de a.
4. **Cite** la propriété des diviseurs que tu utilises.

Exemple

Énoncé. Dresse la liste des diviseurs de 76.

Méthode. On cherche les produits de deux entiers égaux à 76, en essayant 1, 2, 3, … tant que le premier facteur reste inférieur ou égal au second.

Premier facteur	Second facteur
1	76
2	38
4	19

Essais qui échouent. Les entiers 3, 5, 6, 7 et 8 ne divisent pas 76 :

- $25 \times 3 = 75 < 76 < 78 = 26 \times 3$;
- $15 \times 5 = 75 < 76 < 80 = 16 \times 5$;
- $12 \times 6 = 72 < 76 < 78 = 13 \times 6$;
- $10 \times 7 = 70 < 76 < 77 = 11 \times 7$;

- $9 \times 8 = 72 < 76 < 80 = 10 \times 8$.

On s'arrête là, car $9 \times 9 = 81 > 76$.

Conclusion. Les diviseurs de 76 sont 1, 2, 4, 19, 38 et 76.

Exemple

Divise. $161 = 23 \times 7$: l'entier $k = 23$ prouve que 7 divise 161.

Ne divise pas. $10 \times 7 = 70$ et $11 \times 7 = 77$, avec $70 < 74 < 77$: 74 n'est pas un multiple de 7.

Somme et différence. 11 divise 77 et 33. D'après les propriétés des multiples et des diviseurs, 11 divise $77 + 33 = 110$ et $77 - 33 = 44$.

Attention : Ne pas échanger diviseur et multiple

Dire « 19 divise 76 », c'est dire « 76 est un multiple de 19 ». L'inverse est faux : 76 ne divise pas 19. Et 0 ne divise aucun entier non nul, alors que 0 est un multiple de chaque entier.

Nombres pairs et nombres impairs

Définition : Nombres pairs et nombres impairs

Soit n un entier naturel.

- n est **pair** s'il est un multiple de 2, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
- n est **impair** s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Propriété : Un entier naturel est pair ou impair

Tout entier naturel est **soit pair, soit impair** : il est l'un des deux, et jamais les deux à la fois.

Propriété : Parité d'une somme et d'un produit

Soit m et n deux entiers naturels.

- Si m et n sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, alors $m + n$ est pair.
- Si l'un est pair et l'autre impair, alors $m + n$ est impair.
- Si l'un au moins des deux est pair, alors $m \times n$ est pair.
- Si m et n sont tous deux impairs, alors $m \times n$ est impair.

Exemple

Énoncé. Sans effectuer le calcul, donne la parité de $17 \times 23 + 8$.

Produit. 17 et 23 sont impairs : d'après la parité d'un produit, 17×23 est impair.

Somme. On ajoute l'entier pair 8 : d'après la parité d'une somme, le résultat est impair.

Contrôle. $17 \times 23 + 8 = 391 + 8 = 399$, qui est bien impair.

Attention **: Une lettre par entier**

Pour parler de deux entiers impairs m et n, choisis deux lettres : $m = 2k + 1$ et $n = 2l + 1$. Avec la même lettre k pour les deux, tu supposerais sans le vouloir que m et n sont égaux.

Démontrer avec la parité

Propriété **: Parité du carré d'un entier**

Soit n un entier naturel. Les entiers n et n^2 ont la **même parité** :

- si n est pair, alors n^2 est pair ;
- si n est impair, alors n^2 est impair.

En particulier, si n^2 est pair, alors n est pair.

Propriété **: Produit de deux entiers consécutifs**

Pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ de deux entiers consécutifs est **pair**.

Méthode **: rédiger une preuve de parité**

1. **Annonce** les deux cas : n est pair ou n est impair.
2. **Remplace** n par $2k$, puis par $2k + 1$.
3. **Développe**, puis factorise par 2 : tu obtiens $2 \times (\dots)$ ou $2 \times (\dots) + 1$.
4. **Conclus** dans chaque cas, puis pour tout entier naturel n.

Exemple

Énoncé. Soit n un entier naturel. Quelle est la parité de $3n^2 + n$?

Deux cas : n est pair ou n est impair.

Si $n = 2k$, avec k entier naturel.

$$\begin{aligned} 3n^2 + n &= 12k^2 + 2k \\ &= 2(6k^2 + k), \end{aligned}$$

où $6k^2 + k$ est un entier naturel : c'est un entier pair.

Si $n = 2k + 1$, avec k entier naturel.

$$\begin{aligned} 3n^2 + n &= 12k^2 + 12k + 3 \\ &\quad + 2k + 1 \\ &= 2(6k^2 + 7k + 2), \end{aligned}$$

où $6k^2 + 7k + 2$ est un entier naturel : c'est encore un entier pair.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, l'entier $3n^2 + n$ est pair.

Attention : Des essais ne suffisent pas

L'entier $n^2 + n + 11$ est premier pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Pourtant, pour $n = 10$, il vaut $100 + 10 + 11 = 121 = 11^2$, qui n'est pas premier. Des essais ne prouvent rien pour tout n ; un seul contre-exemple prouve qu'une affirmation est fausse.

Les nombres premiers

Définition : Nombre premier

Un entier naturel p est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et p.

- 0 n'est pas premier, car tout entier naturel le divise ; 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur.
- Les nombres premiers inférieurs à 30 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ et 29.

Propriété : Existence d'un diviseur premier

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Le plus petit diviseur de n supérieur ou égal à 2 est un nombre premier. En particulier, n admet au moins un diviseur premier.

Propriété : Reconnaître un nombre premier

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Si n n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $p^2 \leq n$, alors n est premier.

Méthode : tester si un entier est premier

1. **Cherche** les nombres premiers p dont le carré p^2 ne dépasse pas n.
2. **Essaie** chacun d'eux, avec les critères de divisibilité du collège ou une division posée.

3. **Conclus** : un seul diviseur trouvé suffit pour que n ne soit pas premier ; aucun diviseur trouvé, et n est premier.

Exemple

97 **est-il premier ?** On a $7^2 = 49 \leq 97 < 121 = 11^2$: on teste 2, 3, 5 et 7.

- L'entier 97 est impair.
- La somme de ses chiffres, 16, n'est pas un multiple de 3.
- Il ne finit ni par 0 ni par 5.
- Pour 7 : $13 \times 7 = 91 < 97 < 98 = 14 \times 7$.

Aucun de ces nombres ne divise 97 : donc 97 est premier.

119 **est-il premier ?** L'entier 119 est impair ; $1 + 1 + 9 = 11$ n'est pas un multiple de 3 ; il ne finit ni par 0 ni par 5. Pour 7 : $119 = 17 \times 7$. Donc 119 n'est pas premier.

Attention : Ni 0 ni 1

Un nombre premier a exactement deux diviseurs distincts. L'entier 1 en a un seul, et 0 est divisible par tous les entiers : ni l'un ni l'autre n'est premier. Le facteur 1 ne figure donc jamais dans une décomposition.

Attention : Impair ne veut pas dire premier

Le seul nombre premier pair est 2 : tout autre entier pair admet 2 comme diviseur, en plus de 1 et de lui-même. Un impair n'est pas forcément premier : $21 = 3 \times 7$, $25 = 5^2$ et $87 = 3 \times 29$.

Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème : Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel $n \geq 2$ s'écrit comme un **produit de nombres premiers**. Cette écriture est **unique**, à l'ordre des facteurs près : c'est la **décomposition** de n en produit de facteurs premiers. Un nombre premier est sa propre décomposition.

On regroupe les facteurs égaux à l'aide de puissances. Par exemple :

$$\begin{aligned} 360 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5. \end{aligned}$$

Méthode : décomposer par divisions successives

1. **Divise** par le plus petit nombre premier qui convient : 2, sinon 3, sinon 5, et ainsi de suite.
2. **Continue** avec chaque quotient, jusqu'au quotient 1.
3. **Écris** le produit des diviseurs premiers utilisés, avec des puissances pour les facteurs répétés.
4. **Vérifie** en recalculant ce produit.

Exemple

Énoncé. Décompose 495 en produit de facteurs premiers.

Nombre	Diviseur premier
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

Résultat. $495 = 3^2 \times 5 \times 11$.

Contrôle. $9 \times 5 \times 11 = 45 \times 11 = 495$.

À retenir **: Écrire un carré, encadrer un non-carré**

Quand tous les exposants d'une décomposition sont pairs, l'entier est un carré : on l'écrit comme un carré, car $p^{2k} = (p^k)^2$ et $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$. Par exemple :

$$\begin{aligned} 1\,156 &= 2^2 \times 17^2 \\ &= (2 \times 17)^2 = 34^2. \end{aligned}$$

Pour montrer qu'un entier n'est pas un carré, encadre-le entre deux carrés consécutifs :

$$\begin{aligned} 33^2 = 1\,089 &< 1\,100 \\ &< 1\,156 = 34^2. \end{aligned}$$

Un entier m vérifie $m \leq 33$, donc $m^2 \leq 1\,089$, ou $m \geq 34$, donc $m^2 \geq 1\,156$: $1\,100$ n'est pas un carré.

PGCD et PPCM

Définition **: PGCD et PPCM de deux entiers**

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- Le **plus grand commun diviseur** de a et b, noté $\mathrm{PGCD}(a ; b)$, est le plus grand des entiers naturels qui divisent à la fois a et b.

- Le **plus petit commun multiple** de a et b, noté $\mathrm{PPCM}(a;b)$, est le plus petit des entiers naturels **non nuls** qui sont à la fois des multiples de a et de b.

Propriété : Calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition

Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On écrit leurs décompositions avec les mêmes nombres premiers p_1, p_2, ..., p_k, en acceptant l'exposant 0 :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k},$$
$$b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}.$$

- $\mathrm{PGCD}(a;b)$ est le produit des facteurs p_i, chacun affecté du **plus petit** des deux exposants α_i et β_i.
- $\mathrm{PPCM}(a;b)$ est le produit des facteurs p_i, chacun affecté du **plus grand** des deux exposants α_i et β_i .

Propriété : Produit du PGCD et du PPCM

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors

$$\mathrm{PGCD}(a;b) \times \mathrm{PPCM}(a;b) = a \times b.$$

Méthode : PGCD et PPCM par les décompositions

1. **Décompose** les deux entiers, en écrivant les mêmes nombres premiers dans les deux décompositions.
2. **Pour le PGCD**, prends chaque facteur premier avec le plus petit de ses deux exposants.
3. **Pour le PPCM**, prends chaque facteur premier avec le plus grand de ses deux exposants.
4. **Vérifie** que le PGCD multiplié par le PPCM redonne le produit des deux entiers.

Exemple

Énoncé. Calcule $\mathrm{PGCD}(90;132)$ et $\mathrm{PPCM}(90;132)$.

Décompositions.

$$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 11^0,$$
$$132 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 11^1.$$

PGCD. Plus petits exposants : $\mathrm{PGCD}(90;132) = 2^1 \times 3^1 = 6$.

PPCM. Plus grands exposants :

$$\begin{aligned}&\mathrm{PPCM}(90;132)\\&=2^2\times3^2\times5\times11\\&=1\,980.\end{aligned}$$

Contrôle. $6\times1\,980=11\,880$ et $90\times132=11\,880$.

Attention : Le bon exposant

Pour le PGCD, un facteur premier absent de l'une des deux décompositions disparaît : son plus petit exposant est 0. Le PPCM n'est pas toujours le produit des deux entiers : $\mathrm{PPCM}(10;14)=70$, alors que $10\times14=140$.

Problèmes de partage et de rencontre

Méthode : PGCD ou PPCM ?

1. **Partage** en lots identiques, les plus nombreux possible et sans reste : cherche un PGCD.
2. **Événements réguliers** qui se reproduisent en même temps : cherche un PPCM.
3. **Fraction** à rendre irréductible : divise ses deux termes par leur PGCD.
4. **Réponds** par une phrase, avec l'unité.

Exemple

Énoncé. Avec 48 crayons et 80 gommes, on garnit des trousses identiques, sans rien laisser. Combien de trousses au plus ?

Calcul. $48=2^4\times3$ et $80=2^4\times5$, donc $\mathrm{PGCD}(48;80)=2^4=16$.

Réponse. On garnit au plus 16 trousses, chacune avec 3 crayons et 5 gommes.

Exemple

Énoncé. Deux arrosages automatiques démarrent ensemble à 6 h. Le premier se déclenche toutes les 10 minutes, le second toutes les 14 minutes. Quand redémarrent-ils ensemble ?

Calcul. $10=2\times5$ et $14=2\times7$, donc $\mathrm{PPCM}(10;14)=2\times5\times7=70$.

Réponse. Ils redémarrent ensemble 70 minutes plus tard, à 7 h 10 min.

Exemple

Énoncé. Rends la fraction $\dfrac{90}{132}$ irréductible.

Calcul. Le PGCD de 90 et 132 vaut 6 :

$$\frac{90}{132} = \frac{6 \times 15}{6 \times 22} = \frac{15}{22}.$$

Contrôle. $15 = 3 \times 5$ et $22 = 2 \times 11$ n'ont aucun facteur premier commun.

Quel outil pour quelle question ?

Méthode : Quel outil pour quelle question ?

- **Prouver que a divise b** : écrire $b = k \times a$ avec k entier naturel.
- **Lister des diviseurs** : chercher les produits de deux facteurs, jusqu'à ce que le premier dépasse le second.
- **Trouver une parité** : la parité d'une somme et d'un produit.
- **Démontrer une parité** : deux cas annoncés, puis la mise en facteur de 2.
- **Tester un nombre premier** : les nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$.
- **Décomposer** : les divisions successives.
- **Calculer un PGCD ou un PPCM** : les exposants des décompositions.
- **Résoudre un problème** : PGCD pour un partage, PPCM pour une rencontre.

b est un multiple de a, avec k entier naturel

$$b = k \times a$$

n pair, n impair

$$n = 2k \quad \text{ou} \quad n = 2k + 1$$

Somme de deux impairs

$$(2k + 1) + (2l + 1) = 2(k + l + 1)$$

Produit de deux impairs

$$(2k + 1)(2l + 1) = 2(2kl + k + l) + 1$$

Nombres premiers à tester pour n

$$p^2 \leq n$$

a et b entiers naturels non nuls

$$\text{PGCD}(a ; b) \times \text{PPCM}(a ; b) = a \times b$$

À retenir : Rédiger en devoir

En devoir, donne toujours l'entier k qui prouve une divisibilité. Annonce les cas avant une preuve de parité. Cite chaque propriété par son nom, par exemple « d'après la parité d'un produit ». Contrôle tes décompositions en recalculant le produit, et termine un problème par une phrase.