BURHAN

L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensemble-n-et-arithmetique/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique	Niveau examen	5

Exercice 1 5 pts

Des colis de jus et de gâteaux

Une association prépare des colis pour une collecte. Elle dispose de 378 boîtes de jus et de 294 gâteaux. Tous les colis doivent être identiques : même nombre de boîtes de jus, même nombre de gâteaux. Toutes les boîtes et tous les gâteaux doivent être utilisés.

1. 1 pts

Décomposer 378 et 294 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Début : divise chaque nombre par 2. **Ensuite :** continue par 3, puis par 7, et contrôle par le produit.

2. 1 pts

Expliquer pourquoi le nombre de colis divise 378 et 294. En déduire le nombre maximal de colis.

INDICE

Début : si l'on prépare c colis, chaque colis reçoit le même nombre de boîtes de jus. **Ensuite :** le nombre de colis doit-il diviser les deux quantités, ou en être un multiple ? Le veut-on le plus grand ou le plus petit ?

3. 1 pts

Donner la composition de chacun de ces 42 colis. En déduire l'écriture irréductible de la fraction $\dfrac{294}{378}$.

INDICE

Début : divise 378 et 294 par 42. **Ensuite :** divise les deux termes de la fraction par leur PGCD.

4. a) 0,5 pts

L'association peut-elle préparer 14 colis identiques ? Si oui, donner leur composition.

INDICE

Début : 14 divise-t-il 42 ? **Ensuite :** si 14 divise 42 et 42 divise 378, que peut-on dire de 14 et 378 ?

4. b) 0,5 pts

L'association peut-elle préparer 54 colis identiques ?

INDICE

Début : teste séparément 378 et 294. **Ensuite :** pour un essai qui échoue, encadre entre deux multiples consécutifs de 54.

5. 1 pts

Calculer $\mathrm{PPCM}(378;294)$, puis contrôler ce résultat et celui de la question 2 à l'aide du produit 378×294.

INDICE

Début : garde chaque facteur premier avec son plus grand exposant. **Ensuite :** compare le produit du PGCD et du PPCM au produit des deux entiers.

Exercice 2 — 5 pts

Un entier qui n'est presque jamais premier

Pour tout entier naturel n, on pose $B = n^2 + 3n + 2$.

1. — 1 pts

Développer $(n+1)(n+2)$. En déduire une écriture de B comme produit de deux entiers consécutifs.

INDICE

Début : développe le produit terme à terme. **Ensuite :** compare le résultat à B, puis regarde la différence entre les deux facteurs.

2. — 0,75 pts

En déduire la parité de B, pour tout entier naturel n.

INDICE

Début : $n+1$ et $n+2$ sont deux entiers consécutifs. **Ensuite :** quelle propriété du cours donne la parité d'un produit de deux entiers consécutifs ?

3. — 1 pts

On prend $n = 16$. Calculer B, puis décomposer le résultat en produit de facteurs premiers.

INDICE

Début : utilise l'écriture $B = (n+1)(n+2)$. **Ensuite :** décompose chacun des deux facteurs.

4. — 1,5 pts

Que vaut B pour $n = 0$? Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, l'entier B n'est pas un nombre premier.

INDICE

Début : d'après la question 2, 2 divise B. **Ensuite :** compare B à 2 lorsque $n \geq 1$. **Enfin :** combien de diviseurs B a-t-il au moins ?

5. — 0,75 pts

Quelle est la parité de $n^2 + 3n + 10$? En déduire si cet entier est divisible par 2.

INDICE

Début : compare $n^2 + 3n + 10$ et B. **Ensuite :** quelle est la parité de la différence ?

Exercice 3 — 5 pts

L'engrenage de deux roues dentées

Deux roues dentées s'engrènent : la roue A a 68 dents et la roue B en a 102. On marque d'un point rouge une dent de chaque roue, au moment où ces deux dents sont en contact. Quand les roues tournent, il passe autant de dents de A que de dents de B au point de contact.

1. — 1 pts

Décomposer 68 et 102 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Début : divise par 2 autant de fois que possible. **Ensuite :** termine par 3 et par 17.

2. — 1,25 pts

Les deux dents marquées se retrouvent en contact lorsque chaque roue a fait un nombre entier de tours. Expliquer pourquoi le nombre de dents passées est alors un multiple de 68 et de 102. Calculer ce nombre la première fois.

INDICE

Début : quand la roue A fait a tours, il passe $a \times 68$ dents. **Ensuite :** ce nombre de dents doit-il diviser 68 et 102, ou en être un multiple ? Le veut-on le plus grand ou le plus petit ?

3. — 1 pts

En déduire le nombre de tours effectués par chaque roue avant ce premier nouveau contact.

INDICE

Début : combien de dents passent pendant un tour de la roue A ? **Ensuite :** combien de tours faut-il pour en faire passer autant qu'à la question 2 ? Même travail pour la roue B.

4. — 0,75 pts

Calculer $\mathrm{PGCD}(68\,;102)$, puis contrôler le résultat de la question 2.

INDICE

Début : garde chaque facteur premier commun avec son plus petit exposant. **Ensuite :** compare le produit du PGCD et du PPCM à 68×102.

5. — 1 pts

La roue B fait 20 tours par minute. En une minute, il passe autant de dents de A que de dents de B. Combien de tours par minute fait la roue A ? Au bout de combien de secondes les deux dents marquées se retrouvent-elles en contact pour la première fois ?

INDICE

Début : calcule le nombre de dents de B qui passent en une minute. **Ensuite :** la roue B fait 2 tours entre deux contacts des dents marquées.

Exercice 4 5 pts

Des sommes de quatre entiers consécutifs

Pour tout entier naturel n, on note S la somme des quatre entiers consécutifs n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$: $S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$.

1. 1 pts

Calculer S pour $n = 0$, puis pour $n = 7$. Écrire S sous forme réduite, en fonction de n.

INDICE

Début : additionne les quatre entiers dans chaque cas. **Ensuite :** regroupe les termes en n, puis les nombres.

2. 0,75 pts

En déduire la parité de S, pour tout entier naturel n.

INDICE

Début : cherche un facteur commun à $4n$ et à 6. **Ensuite :** l'entier restant dans la parenthèse est-il un entier naturel ?

3. 1 pts

Comparer S à $4(n+1)$ et à $4(n+2)$. En déduire que S ne s'écrit jamais sous la forme $4k$, avec k entier naturel.

INDICE

Début : développe $4(n+1)$ et $4(n+2)$, puis compare-les à $4n+6$. **Ensuite :** si l'on avait $S = 4k$, entre quels entiers consécutifs l'entier k serait-il placé ?

4. 1,25 pts

Parmi les entiers $1\,000$, $2\,027$ et $2\,026$, lesquels s'écrivent comme la somme de quatre entiers naturels consécutifs ? Le cas échéant, donner ces quatre entiers.

INDICE

Début : utilise les questions 2 et 3 pour écarter certains entiers. **Ensuite :** pour l'entier restant, cherche n tel que $4n+6$ lui soit égal, et vérifie que n appartient à $\mathbb{N}$.

5. 1 pts

On note E l'ensemble des entiers qui s'écrivent comme la somme de quatre entiers naturels consécutifs, et P l'ensemble des entiers naturels pairs. A-t-on $E \subset P$? A-t-on $P \subset E$? Justifier.

INDICE

Début : pour $E \subset P$, chaque élément de E doit appartenir à P : relis la question 2. **Ensuite :** pour $P \subset E$, un seul entier pair qui n'appartient pas à E suffit à répondre non : cherche-le dans la question 4.

Exercice 5 5 pts

Quand un diviseur dépend d'un entier

Pour tout entier naturel n, on pose $a = n + 5$ et $b = 3n + 52$. On cherche les entiers naturels n pour lesquels a divise b.

1. 1 pts

Calculer a et b pour $n = 3$, puis pour $n = 32$. Dans chaque cas, a divise-t-il b ?

INDICE

Début : remplace n dans les deux expressions. **Ensuite :** pour un cas favorable, écris $b = k \times a$; sinon, encadre b entre deux multiples consécutifs de a.

2. 1 pts

Vérifier que $b = 3a + 37$. En déduire que, si a divise b, alors a divise 37.

INDICE

Début : développe $3a = 3(n + 5)$, puis ajoute 37. **Ensuite :** a divise $3a$; quelle propriété des diviseurs s'applique à la différence $b - 3a$?

3. 0,75 pts

Justifier que 37 est un nombre premier. En déduire la liste de ses diviseurs.

INDICE

Début : cherche les nombres premiers p tels que $p^2 \leq 37$. **Ensuite :** teste chacun d'eux avec les critères de divisibilité.

4. 1 pts

En déduire les entiers naturels n pour lesquels a divise b.

INDICE

Début : d'après les questions 2 et 3, si a divise b, alors a vaut 1 ou 37. **Ensuite :** compare $a = n + 5$ à 5 , puis vérifie la valeur trouvée avec la question 1.

5. 1,25 pts

On pose maintenant $c = 3n + 47$. Écrire c à l'aide de a, puis déterminer les entiers naturels n pour lesquels a divise c.

INDICE

Début : compare c à $3a$, comme à la question 2. **Ensuite :** liste les diviseurs du nombre obtenu par les produits de deux facteurs, et garde ceux qui sont au moins égaux à 5. **Enfin :** vérifie chaque valeur de n trouvée.