BURHAN

L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensemble-n-et-arithmetique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique	Entraînement	7

Exercice 1

Une conjecture de parité, puis sa preuve

Pour tout entier naturel n, on pose $A = n^2 + 7n$.

1.

Calculer A pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Quelle conjecture peut-on faire sur la parité de A ?

INDICE

Outil : remplace n par chaque valeur. Attention : quatre essais ne démontrent rien.

2.

Démontrer cette conjecture en distinguant deux cas.

INDICE

Outil : deux cas, $n = 2k$ puis $n = 2k + 1$; développe, puis mets 2 en facteur.

3.

Autre méthode : vérifier que $A = n(n + 7)$, puis retrouver le résultat avec la parité d'un produit.

INDICE

Outil : si n est impair, quelle est la parité de $n + 7$?

4.

En déduire la parité de $n^2 + 7n + 3$.

INDICE

Outil : la parité d'une somme d'un pair et d'un impair.

Exercice 2

Le carré d'un impair, moins 1, est un multiple de 8

Soit n un entier naturel. On pose $D = (2n+1)^2 - 1$. Comme $(2n+1)^2 \geq 1$, l'entier D est un entier naturel.

1.

Développer et réduire D.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, apprise au collège.

2.

En déduire que $D = 4n(n+1)$.

INDICE

Outil : mets $4n$ en facteur.

3.

Justifier que D est un multiple de 8.

INDICE

Outil : le produit de deux entiers consécutifs est pair ; écris-le $2q$.

4.

Contrôler ce résultat pour $n = 10$ et pour $n = 25$.

INDICE

Outil : calcule $2n+1$, son carré, puis retire 1 ; cherche l'entier q.

5.

Que peut-on en déduire pour le carré d'un entier impair quelconque ?

INDICE

Outil : tout entier impair s'écrit $2n+1$ avec n entier naturel.

Exercice 3

Les diviseurs de 200, par les produits de deux facteurs

On cherche tous les produits $k \times d = 200$ de deux entiers naturels, avec $k \leq d$.

1.

Justifier qu'il suffit d'essayer les valeurs de k de 1 à 14.

INDICE

Outil : si $k \leq d$, compare $k \times k$ et $k \times d$.

2.

Faire ces essais et écrire tous les produits obtenus.

INDICE

Outil : pour un essai qui échoue, encadre 200 entre deux multiples consécutifs de k.

3.

Combien l'entier 200 a-t-il de diviseurs ? Les écrire dans l'ordre croissant.

INDICE

Outil : chaque produit du tableau donne deux diviseurs.

4.

Parmi ces diviseurs, lesquels sont des carrés d'entiers ?

INDICE

Outil : si $k^2 < N < (k+1)^2$, tout entier m vérifie $m \leq k$, donc $m^2 \leq k^2$, ou $m \geq k+1$, donc $m^2 \geq (k+1)^2$: N n'est pas un carré.

Exercice 4

Reconnaître un carré, puis en fabriquer un

1.

Décomposer $1\,936$ en produit de facteurs premiers.

INDICE

Outil : divise par 2 tant que c'est possible.

2.

En déduire que $1\,936$ est le carré d'un entier que l'on précisera.

INDICE

Outil : les deux exposants sont pairs : écris $2^4 = (2^2)^2$.

3.

Décomposer $1\,452$ en produit de facteurs premiers. L'entier $1\,452$ est-il un carré ?

INDICE

Outil : divisions successives ; pour la seconde question, encadre $1\,452$ entre deux carrés consécutifs.

4.

Trouver le plus petit entier naturel non nul k tel que $1\,452 \times k$ soit le carré d'un entier.

INDICE

Outil : essaie $k = 1$, $k = 2$, puis $k = 3$; pour $k = 3$, regarde les exposants.

Exercice 5

PGCD, PPCM et fraction irréductible

1.

Décomposer 264 et 308 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Outil : les divisions successives ; les deux entiers sont pairs, commence par 2.

2.

Calculer $\text{PGCD}(264;308)$ et $\text{PPCM}(264;308)$.

INDICE

Outil : écris les deux décompositions avec les nombres premiers 2, 3, 7, 11, en acceptant l'exposant 0.

3.

Contrôler les résultats de la question 2.

INDICE

Outil : compare le produit du PGCD et du PPCM au produit 264×308.

4.

En déduire l'écriture irréductible de la fraction $\dfrac{264}{308}$.

INDICE

Outil : divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

Exercice 6

Carreler une pièce avec des dalles carrées

Une pièce rectangulaire mesure $4{,}20$ m sur $5{,}40$ m. On veut la couvrir de dalles carrées identiques, sans découpe ni espace entre elles. Le côté d'une dalle est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible.

1.

Expliquer pourquoi le côté d'une dalle, en centimètres, doit diviser 420 et 540.

INDICE

Outil : convertis les longueurs en centimètres ; le long de chaque mur, on place un nombre entier de dalles.

2.

Calculer le côté d'une dalle.

INDICE

Question à te poser : le côté doit diviser les deux dimensions ; le veut-on le plus grand ou le plus petit possible ? Décompose ensuite 420 et 540.

3.

Combien de dalles faut-il pour couvrir la pièce ?

INDICE

Outil : compte les dalles le long de chaque mur, puis multiplie.

4.

Les dalles sont vendues par paquets de 10. Combien de paquets faut-il acheter au minimum ?

INDICE

Outil : encadre 63 entre deux multiples consécutifs de 10.

Exercice 7

Deux phares qui clignotent

Deux phares éclairent la côte. Le premier émet un éclat toutes les 62 secondes, le second toutes les 93 secondes. À 21 h exactement, ils émettent un éclat en même temps.

1.

Décomposer 62 et 93 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Outil : les divisions successives ; pour 93, la somme des chiffres aide.

2.

À quelle heure les deux phares émettront-ils de nouveau un éclat en même temps ?

INDICE

Question à te poser : la durée cherchée doit-elle diviser 62 et 93, ou en être un multiple ? La veut-on la plus grande ou la plus petite ?

3.

Combien d'éclats communs aux deux phares y a-t-il entre 21 h et 21 h 10 min, en comptant celui de 21 h ?

INDICE

Outil : 10 minutes font 600 secondes ; compte les multiples de 186 compris entre 0 et 600.

4.

Entre deux éclats communs consécutifs, combien d'intervalles de 62 secondes compte le premier phare ? Combien d'intervalles de 93 secondes compte le second ?

INDICE

Outil : divise 186 par chacune des deux durées.