BURHAN

L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensemble-n-et-arithmetique/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique	Entraînement	7

Exercice 1

Une conjecture de parité, puis sa preuve

Pour tout entier naturel n, on pose $A = n^2 + 7n$.

1.

Calculer A pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Quelle conjecture peut-on faire sur la parité de A ?

INDICE

Outil : remplace n par chaque valeur. Attention : quatre essais ne démontrent rien.

CORRIGÉ

On remplace n par chaque valeur dans $A = n^2 + 7n$:

- $n = 0$: $A = 0 + 0 = 0$;
- $n = 1$: $A = 1 + 7 = 8$;
- $n = 2$: $A = 4 + 14 = 18$;
- $n = 3$: $A = 9 + 21 = 30$.

Pour $n = 0, 1, 2$ et 3, on obtient $A = 0, 8, 18$ et 30 : ces quatre valeurs sont paires.

Conjecture. Pour tout entier naturel n, A est pair. Quatre essais ne suffisent pas à l'établir : il faut un raisonnement qui vaut pour tout n, c'est l'objet de la question 2.

2.

Démontrer cette conjecture en distinguant deux cas.

INDICE

Outil : deux cas, $n = 2k$ puis $n = 2k + 1$; développe, puis mets 2 en facteur.

CORRIGÉ

Deux cas : n est pair ou n est impair.

Cas où n est pair. On écrit $n = 2k$ avec k entier naturel. Alors $n^2 = 4k^2$ et $7n = 14k$, donc

$$\begin{aligned} A &= 4k^2 + 14k \\ &= 2(2k^2 + 7k), \end{aligned}$$

où $2k^2 + 7k$ est un entier naturel : A est pair.

Cas où n est impair. On écrit $n = 2k + 1$ avec k entier naturel. D'après l'identité remarquable, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$, et $7n = 14k + 7$, donc

$$\begin{aligned} A &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &\quad + 14k + 7 \\ &= 4k^2 + 18k + 8 \\ &= 2(2k^2 + 9k + 4), \end{aligned}$$

où $2k^2 + 9k + 4$ est un entier naturel : A est pair.

Conclusion. Dans les deux cas, A est pair : pour tout entier naturel n, $n^2 + 7n$ est pair, et la conjecture est démontrée.

3.

Autre méthode : vérifier que $A = n(n + 7)$, puis retrouver le résultat avec la parité d'un produit.

INDICE

Outil : si n est impair, quelle est la parité de $n + 7$?

CORRIGÉ

Factorisation. On développe le produit :

$$n(n + 7) = n^2 + 7n = A.$$

Parité du produit. Deux cas : n est pair ou n est impair.

- Si n est pair, le facteur n de $n(n + 7)$ est pair.
- Si n est impair, $n + 7$ est la somme de deux entiers impairs : d'après la parité d'une somme, il est pair.

Conclusion. Dans les deux cas, l'un des facteurs de $n(n + 7)$ est pair. D'après la parité d'un produit, A est pair pour tout entier naturel n.

4.

En déduire la parité de $n^2 + 7n + 3$.

INDICE

Outil : la parité d'une somme d'un pair et d'un impair.

CORRIGÉ

On fait apparaître A :

$$n^2 + 7n + 3 = A + 3.$$

L'entier A est pair (question 2) et 3 est impair. D'après la parité d'une somme, la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $n^2 + 7n + 3$ est impair.

Exercice 2

Le carré d'un impair, moins 1, est un multiple de 8

Soit n un entier naturel. On pose $D = (2n+1)^2 - 1$. Comme $(2n+1)^2 \geq 1$, l'entier D est un entier naturel.

1.

Développer et réduire D.

INDICE

Outil : l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, apprise au collège.

CORRIGÉ

D'après l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, avec $a = 2n$ et $b = 1$, on a $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$. Donc

$$\begin{aligned} D &= 4n^2 + 4n + 1 - 1 \\ &= 4n^2 + 4n. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $D = 4n^2 + 4n$.

2.

En déduire que $D = 4n(n+1)$.

INDICE

Outil : mets $4n$ en facteur.

CORRIGÉ

On met $4n$ en facteur dans le résultat de la question 1 :

$$\begin{aligned} &4n^2 + 4n \\ &= 4n \times n + 4n \times 1 \\ &= 4n(n+1). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $D = 4n(n+1)$.

3.

Justifier que D est un multiple de 8.

INDICE

Outil : le produit de deux entiers consécutifs est pair ; écris-le $2q$.

CORRIGÉ

Parité de $n(n+1)$. Les entiers n et $n+1$ sont consécutifs. D'après le produit de deux entiers consécutifs, $n(n+1)$ est pair : il existe un entier naturel q tel que $n(n+1) = 2q$.

Multiple de 8. D'après la question 2, $D = 4n(n+1)$, donc

$$D = 4 \times 2q = 8q.$$

Conclusion. $D = 8q$ avec q entier naturel : D est un multiple de 8.

4.

Contrôler ce résultat pour $n = 10$ et pour $n = 25$.

INDICE

Outil : calcule $2n + 1$, son carré, puis retire 1 ; cherche l'entier q.

CORRIGÉ

- Pour $n = 10$: $2n + 1 = 21$ et $21^2 - 1 = 441 - 1 = 440 = 55 \times 8$.
- Pour $n = 25$: $2n + 1 = 51$ et $51^2 - 1 = 2\,601 - 1 = 2\,600 = 325 \times 8$.

On retrouve l'entier q de la question 3, qui vérifie $2q = n(n+1)$: $q = 55 = \dfrac{10 \times 11}{2}$ et $q = 325 = \dfrac{25 \times 26}{2}$.

Conclusion. Pour $n = 10$ et pour $n = 25$, D est bien un multiple de 8.

5.

Que peut-on en déduire pour le carré d'un entier impair quelconque ?

INDICE

Outil : tout entier impair s'écrit $2n + 1$ avec n entier naturel.

CORRIGÉ

Soit m un entier impair. Il s'écrit $m = 2n + 1$, avec n entier naturel, et alors $m^2 - 1 = D$. D'après la question 3, $D = 8q$ avec q entier naturel, donc

$$m^2 = 8q + 1.$$

Conclusion. Le carré d'un entier impair est un multiple de 8 augmenté de 1.

Exercice 3

Les diviseurs de 200, par les produits de deux facteurs

On cherche tous les produits $k \times d = 200$ de deux entiers naturels, avec $k \leq d$.

1.

Justifier qu'il suffit d'essayer les valeurs de k de 1 à 14.

INDICE

Outil : si $k \leq d$, compare $k \times k$ et $k \times d$.

CORRIGÉ

Soit $k \times d = 200$ avec $k \leq d$. En multipliant les deux membres de $k \leq d$ par l'entier naturel k, on obtient $k \times k \leq k \times d$, c'est-à-dire

$$k \times k \leq 200.$$

Or $14 \times 14 = 196 \leq 200$ et $15 \times 15 = 225 > 200$. Si l'on avait $k \geq 15$, on aurait $k \times k \geq 225 > 200$: c'est exclu.

Conclusion. Il suffit d'essayer les valeurs de k de 1 à 14.

2.

Faire ces essais et écrire tous les produits obtenus.

INDICE

Outil : pour un essai qui échoue, encadre 200 entre deux multiples consécutifs de k.

CORRIGÉ

Essais réussis.

k	d
1	200
2	100
4	50
5	40
8	25
10	20

Essais qui échouent. À chaque fois, 200 est strictement compris entre deux multiples consécutifs de k : ce n'est donc pas un multiple de k.

k	Encadrement
3	$66 \times 3 = 198 < 200 < 201 = 67 \times 3$
6	$33 \times 6 = 198 < 200 < 204 = 34 \times 6$
7	$28 \times 7 = 196 < 200 < 203 = 29 \times 7$
9	$22 \times 9 = 198 < 200 < 207 = 23 \times 9$
11	$18 \times 11 = 198 < 200 < 209 = 19 \times 11$
12	$16 \times 12 = 192 < 200 < 204 = 17 \times 12$
13	$15 \times 13 = 195 < 200 < 208 = 16 \times 13$
14	$14 \times 14 = 196 < 200 < 210 = 15 \times 14$

Conclusion. Les produits obtenus sont 1×200, 2×100, 4×50, 5×40, 8×25 et 10×20.

3.

Combien l'entier 200 a-t-il de diviseurs ? Les écrire dans l'ordre croissant.

INDICE

Outil : chaque produit du tableau donne deux diviseurs.

CORRIGÉ

Chacun des six produits $k \times d$ fournit deux diviseurs, k et d. Dans chaque produit, $k < d$, et les douze nombres obtenus sont tous différents : on obtient $6 \times 2 = 12$ diviseurs.

Conclusion. L'entier 200 a 12 diviseurs. Dans l'ordre croissant : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200.

4.

Parmi ces diviseurs, lesquels sont des carrés d'entiers ?

INDICE

Outil : si $k^2 < N < (k+1)^2$, tout entier m vérifie $m \leq k$, donc $m^2 \leq k^2$, ou $m \geq k+1$, donc $m^2 \geq (k+1)^2$: N n'est pas un carré.

CORRIGÉ

Carrés. Quatre diviseurs sont des carrés d'entiers : $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $25 = 5^2$ et $100 = 10^2$.

Les autres diviseurs. Chacun est strictement compris entre deux carrés consécutifs :

- $1^2 < 2 < 2^2$;
- $2^2 < 5 < 8 < 3^2$;
- $3^2 < 10 < 4^2$;
- $4^2 < 20 < 5^2$;
- $6^2 < 40 < 7^2$;
- $7^2 < 50 < 8^2$;
- $14^2 < 200 < 15^2$.

D'après l'outil de l'indice, aucun d'eux n'est un carré. Par exemple, pour 200, tout entier naturel m vérifie $m \leq 14$, donc $m^2 \leq 196$, ou $m \geq 15$, donc $m^2 \geq 225$: m^2 n'est jamais égal à 200.

Conclusion. Parmi les diviseurs de 200, les carrés d'entiers sont 1, 4, 25 et 100.

Exercice 4

Reconnaître un carré, puis en fabriquer un

1.

Décomposer $1\,936$ en produit de facteurs premiers.

INDICE

Outil : divise par 2 tant que c'est possible.

CORRIGÉ

On divise par 2 tant que c'est possible :

$$\begin{aligned} 1\,936 &= 2 \times 968 \\ &= 2^2 \times 484 \\ &= 2^3 \times 242 \\ &= 2^4 \times 121 \\ &= 2^4 \times 11^2. \end{aligned}$$

Le quotient 121 est impair, et $121 = 11 \times 11$ avec 11 premier.

Contrôle. $16 \times 121 = 1\,936$.

Conclusion. $1\,936 = 2^4 \times 11^2$.

2.

En déduire que $1\,936$ est le carré d'un entier que l'on précisera.

INDICE

Outil : les deux exposants sont pairs : écris $2^4 = (2^2)^2$.

CORRIGÉ

Les deux exposants sont pairs : $2^4 = (2^2)^2$. Le produit de deux carrés est le carré du produit, donc

$$\begin{aligned} 1\,936 &= (2^2)^2 \times 11^2 \\ &= (2^2 \times 11)^2 \\ &= 44^2. \end{aligned}$$

Conclusion. L'entier $1\,936$ est le carré de 44.

3.

Décomposer $1\,452$ en produit de facteurs premiers. L'entier $1\,452$ est-il un carré ?

INDICE

Outil : divisions successives ; pour la seconde question, encadre $1\,452$ entre deux carrés consécutifs.

CORRIGÉ

Décomposition. La somme des chiffres de 363 vaut 12, multiple de 3 :

$$\begin{aligned} 1\,452 &= 2 \times 726 \\ &= 2 \times 2 \times 363 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 121 \\ &= 2^2 \times 3 \times 11^2. \end{aligned}$$

Est-ce un carré ? L'exposant de 3 vaut 1 : cette écriture ne fait pas apparaître un carré, mais cela ne suffit pas à conclure. On encadre : $38^2 = 1\,444$ et $39^2 = 1\,521$, donc

$$38^2 < 1\,452 < 39^2.$$

Tout entier naturel m vérifie $m \leq 38$, donc $m^2 \leq 1\,444$, ou $m \geq 39$, donc $m^2 \geq 1\,521$: m^2 n'est jamais égal à $1\,452$.

Conclusion. $1\,452 = 2^2 \times 3 \times 11^2$, et $1\,452$ n'est pas le carré d'un entier.

4.

Trouver le plus petit entier naturel non nul k tel que $1\,452 \times k$ soit le carré d'un entier.

INDICE

Outil : essaie $k = 1$, $k = 2$, puis $k = 3$; pour $k = 3$, regarde les exposants.

CORRIGÉ

Pour $k = 1$. D'après la question 3, $1\,452$ n'est pas un carré.

Pour $k = 2$. $1\,452 \times 2 = 2\,904$, et $53^2 = 2\,809 < 2\,904 < 2\,916 = 54^2$. Avec le même raisonnement qu'à la question 3, $2\,904$ n'est pas un carré.

Pour $k = 3$. Le facteur 3 complète l'exposant de 3 :

$$\begin{aligned} 1\,452 \times 3 &= 4\,356 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 11^2 \\ &= (2 \times 3 \times 11)^2 \\ &= 66^2. \end{aligned}$$

Conclusion. Le plus petit entier naturel non nul k tel que $1\,452 \times k$ soit le carré d'un entier est $k = 3$.

Exercice 5

PGCD, PPCM et fraction irréductible

1.

Décomposer 264 et 308 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Outil : les divisions successives ; les deux entiers sont pairs, commence par 2.

CORRIGÉ

Décomposition de 264.

$$\begin{aligned} 264 &= 2 \times 132 \\ &= 2 \times 2 \times 66 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 33 \\ &= 2^3 \times 3 \times 11. \end{aligned}$$

Décomposition de 308.

$$\begin{aligned} 308 &= 2 \times 154 \\ &= 2 \times 2 \times 77 \\ &= 2^2 \times 7 \times 11. \end{aligned}$$

Conclusion. $264 = 2^3 \times 3 \times 11$ et $308 = 2^2 \times 7 \times 11$.

2.

Calculer $\mathrm{PGCD}(264;308)$ et $\mathrm{PPCM}(264;308)$.

INDICE

Outil : écris les deux décompositions avec les nombres premiers 2, 3, 7, 11, en acceptant l'exposant 0.

CORRIGÉ

On écrit les deux décompositions avec les mêmes nombres premiers 2, 3, 7 et 11, en acceptant l'exposant 0 :

- $264 = 2^3 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^1$;
- $308 = 2^2 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^1$.

PGCD. D'après la règle des exposants, on garde pour chaque nombre premier le plus petit exposant :

$$\begin{aligned} &\mathrm{PGCD}(264;308) \\ &= 2^2 \times 11 = 44. \end{aligned}$$

PPCM. On garde cette fois le plus grand exposant :

$$\begin{aligned} &\mathrm{PPCM}(264;308) \\ &= 2^3 \times 3 \times 7 \times 11 \\ &= 1\,848. \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathrm{PGCD}(264;308) = 44$ et $\mathrm{PPCM}(264;308) = 1\,848$.

3.

Contrôler les résultats de la question 2.

INDICE

Outil : compare le produit du PGCD et du PPCM au produit 264×308.

CORRIGÉ

D'après le produit du PGCD et du PPCM, le produit $44 \times 1\,848$ doit être égal à 264×308.

- $44 \times 1\,848 = 81\,312$;
- $264 \times 308 = 81\,312$.

Conclusion. Les deux produits sont égaux : les résultats de la question 2 sont cohérents.

4.

En déduire l'écriture irréductible de la fraction $\dfrac{264}{308}$.

INDICE

Outil : divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.

CORRIGÉ

On divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD, 44. Comme $264 = 44 \times 6$ et $308 = 44 \times 7$:

$$\frac{264}{308} = \frac{6}{7}.$$

Les entiers $6 = 2 \times 3$ et 7 n'ont aucun facteur premier commun : la fraction $\dfrac{6}{7}$ ne peut plus être simplifiée.

Conclusion. L'écriture irréductible de $\dfrac{264}{308}$ est $\dfrac{6}{7}$.

Exercice 6

Carreler une pièce avec des dalles carrées

Une pièce rectangulaire mesure $4{,}20$ m sur $5{,}40$ m. On veut la couvrir de dalles carrées identiques, sans découpe ni espace entre elles. Le côté d'une dalle est un nombre entier de centimètres, le plus grand possible.

1.

Expliquer pourquoi le côté d'une dalle, en centimètres, doit diviser 420 et 540.

INDICE

Outil : convertis les longueurs en centimètres ; le long de chaque mur, on place un nombre entier de dalles.

CORRIGÉ

En centimètres, la pièce mesure 420 cm sur 540 cm. Notons c le côté d'une dalle, en centimètres. Les dalles ne sont ni découpées ni espacées : le long du petit côté, on place un nombre entier k de dalles, et le long du grand côté un nombre entier l de dalles. Donc

$$420 = k \times c,$$
$$540 = l \times c.$$

Conclusion. Le côté d'une dalle, en centimètres, divise 420 et 540.

2.

Calculer le côté d'une dalle.

INDICE

Question à te poser : le côté doit diviser les deux dimensions ; le veut-on le plus grand ou le plus petit possible ? Décompose ensuite 420 et 540.

CORRIGÉ

La situation. D'après la question 1, le côté d'une dalle divise 420 et 540, et on le veut le plus grand possible : c'est le PGCD de 420 et 540.

Calcul. On a $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$. D'après la règle des exposants :

$$\begin{aligned}&\mathrm{PGCD}(420;540)\\&= 2^2 \times 3 \times 5 = 60.\end{aligned}$$

Conclusion. Le côté d'une dalle mesure 60 cm.

3.

Combien de dalles faut-il pour couvrir la pièce ?

INDICE

Outil : compte les dalles le long de chaque mur, puis multiplie.

CORRIGÉ

On a $420 = 7 \times 60$ et $540 = 9 \times 60$: on place 7 dalles le long du petit côté et 9 le long du grand côté. La pièce est couverte par 7 rangées de 9 dalles.

Conclusion. Il faut $7 \times 9 = 63$ dalles.

4.

Les dalles sont vendues par paquets de 10. Combien de paquets faut-il acheter au minimum ?

INDICE

Outil : encadre 63 entre deux multiples consécutifs de 10.

CORRIGÉ

On encadre 63 entre deux multiples consécutifs de 10 : $6 \times 10 = 60 < 63 \leq 70 = 7 \times 10$. Six paquets donnent 60 dalles, ce qui ne suffit pas ; sept paquets en donnent 70, ce qui suffit.

Conclusion. Il faut acheter au minimum 7 paquets. Il restera $70 - 63 = 7$ dalles.

Exercice 7

Deux phares qui clignotent

Deux phares éclairent la côte. Le premier émet un éclat toutes les 62 secondes, le second toutes les 93 secondes. À 21 h exactement, ils émettent un éclat en même temps.

1.

Décomposer 62 et 93 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Outil : les divisions successives ; pour 93, la somme des chiffres aide.

CORRIGÉ

Décompositions. L'entier 62 est pair : $62 = 2 \times 31$. La somme des chiffres de 93 vaut $9 + 3 = 12$, multiple de 3 : $93 = 3 \times 31$.

L'entier 31 est premier. On a $5^2 = 25 \leq 31$ et $7^2 = 49 > 31$: il suffit de tester 2, 3 et 5. Or 31 est impair, $3 + 1 = 4$ n'est pas un multiple de 3, et 31 ne se termine ni par 0 ni par 5.

Conclusion. $62 = 2 \times 31$ et $93 = 3 \times 31$, avec 31 premier.

2.

À quelle heure les deux phares émettront-ils de nouveau un éclat en même temps ?

INDICE

Question à te poser : la durée cherchée doit-elle diviser 62 et 93, ou en être un multiple ? La veut-on la plus grande ou la plus petite ?

CORRIGÉ

La situation. Le premier phare émet un éclat après 62, 2×62, 3×62, … secondes, et le second après les multiples de 93 secondes. Un éclat commun a donc lieu après une durée qui est un multiple de 62 et de 93. La première durée non nulle est leur PPCM.

Calcul. D'après la règle des exposants :

$$\begin{aligned} &\mathrm{PPCM}(62;93) \\ &= 2 \times 3 \times 31 = 186. \end{aligned}$$

Conclusion. Le prochain éclat commun a lieu 186 secondes après 21 h. Comme $186 = 3 \times 60 + 6$, cela fait 3 min 6 s : les deux phares émettront de nouveau un éclat ensemble à 21 h 3 min 6 s.

3.

Combien d'éclats communs aux deux phares y a-t-il entre 21 h et 21 h 10 min, en comptant celui de 21 h ?

INDICE

Outil : 10 minutes font 600 secondes ; compte les multiples de 186 compris entre 0 et 600.

CORRIGÉ

Les éclats communs ont lieu après les multiples de 186 secondes, et 10 minutes font 600 secondes :

- $0 \times 186 = 0$, $1 \times 186 = 186$, $2 \times 186 = 372$ et $3 \times 186 = 558$;
- $4 \times 186 = 744 > 600$.

Les éclats communs ont donc lieu après 0, 186, 372 et 558 secondes ; le suivant, après 744 secondes, dépasse 600.

Conclusion. Entre 21 h et 21 h 10 min, il y a 4 éclats communs, celui de 21 h compris.

4.

Entre deux éclats communs consécutifs, combien d'intervalles de 62 secondes compte le premier phare ? Combien d'intervalles de 93 secondes compte le second ?

INDICE

Outil : divise 186 par chacune des deux durées.

CORRIGÉ

On a $186 = 3 \times 62$ et $186 = 2 \times 93$.

Conclusion. Entre deux éclats communs consécutifs, le premier phare compte 3 intervalles de 62 secondes et le second 2 intervalles de 93 secondes.