BURHAN

L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensemble-n-et-arithmetique/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique	Application	8

Exercice 1

Entiers naturels ou non ?

On considère les six nombres suivants : 17 ; 0 ; $\frac{56}{8}$; $\frac{13}{5}$; $2{,}7$; $\frac{0}{5}$.

1.

Pour chacun de ces nombres, écrire s'il appartient à $\mathbb{N}$, avec le symbole $\in$ ou le symbole $\notin$.

INDICE

Outil : simplifie d'abord chaque fraction, puis regarde si le résultat est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, …

CORRIGÉ

On simplifie d'abord les écritures fractionnaires, puis on regarde si le nombre obtenu est un entier naturel.

- 17 et 0 sont des entiers naturels : $17 \in \mathbb{N}$ et $0 \in \mathbb{N}$.
- $\frac{56}{8} = 7$, donc $\frac{56}{8} \in \mathbb{N}$.
- $\frac{13}{5} = 2{,}6$ n'est pas un entier, donc $\frac{13}{5} \notin \mathbb{N}$.
- $2{,}7$ n'est pas un entier, donc $2{,}7 \notin \mathbb{N}$.
- $\frac{0}{5} = 0$, donc $\frac{0}{5} \in \mathbb{N}$.

Conclusion. Les nombres 17, 0, $\frac{56}{8}$ et $\frac{0}{5}$ appartiennent à $\mathbb{N}$; les nombres $\frac{13}{5}$ et $2{,}7$ n'y appartiennent pas.

2.

Lesquels de ces nombres appartiennent à $\mathbb{N}^*$?

INDICE

Outil : $\mathbb{N}^*$ contient les entiers naturels, sauf 0.

CORRIGÉ

Un nombre appartient à $\mathbb{N}^*$ lorsque c'est un entier naturel non nul. Parmi les quatre entiers naturels de la question 1, deux sont égaux à 0 : le nombre 0 lui-même et $\frac{0}{5}$. On les écarte.

Conclusion. Seuls deux de ces nombres appartiennent à $\mathbb{N}^*$: $17 \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{56}{8} \in \mathbb{N}^*$.

3.

Vrai ou faux ? Justifier.

- (a) $\{0;17\} \subset \mathbb{N}$.
- (b) $\{0;17\} \subset \mathbb{N}^*$.
- (c) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

INDICE

Outil : un ensemble est inclus dans un autre lorsque chacun de ses éléments appartient à l'autre.

CORRIGÉ

On vérifie, pour chaque inclusion, si tous les éléments du premier ensemble appartiennent au second.

- (a) Vrai : les deux éléments 0 et 17 appartiennent à $\mathbb{N}$.
- (b) Faux : l'élément 0 appartient à $\{0;17\}$, mais pas à $\mathbb{N}^*$.
- (c) Vrai : un élément de $\mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul, donc en particulier un élément de $\mathbb{N}$.

4.

Les entiers $\frac{56}{8}$ et 8 sont-ils consécutifs ? Donner deux entiers naturels consécutifs qui encadrent $\frac{13}{5}$.

INDICE

Outil : deux entiers naturels sont consécutifs lorsqu'ils s'écrivent n et $n+1$.

CORRIGÉ

Les entiers $\frac{56}{8}$ et 8. On a $\frac{56}{8} = 7$ et $8 = 7+1$. Ces deux entiers s'écrivent n et $n+1$, avec $n = 7$: ils sont consécutifs.

Un encadrement de $\frac{13}{5}$. On a $\frac{13}{5} = 2{,}6$, donc

$$2 < \frac{13}{5} < 2+1.$$

Conclusion. Les entiers $\frac{56}{8}$ et 8 sont consécutifs, et les entiers consécutifs 2 et 3 encadrent $\frac{13}{5}$.

Exercice 2

Les diviseurs de 52 et quelques multiples de 13

1.

Trouver tous les produits de deux entiers naturels égaux à 52, le premier facteur étant inférieur ou égal au second.

INDICE

Outil : essaie les premiers facteurs $1, 2, 3, \ldots$ et arrête-toi dès que le carré du premier facteur dépasse 52.

CORRIGÉ

On note k le premier facteur et d le second, avec $k \times d = 52$ et $k \leq d$. Alors $k \times k \leq k \times d = 52$. Comme $8 \times 8 = 64 > 52$, il suffit d'essayer k de 1 à 7.

Essais réussis.

Premier facteur	Second facteur
1	52
2	26
4	13

Essais qui échouent.

- Pour 3 : $17 \times 3 = 51 < 52 < 54 = 18 \times 3$.
- Pour 5 : 52 ne se termine ni par 0 ni par 5 (critère de divisibilité par 5).
- Pour 6 : $8 \times 6 = 48 < 52 < 54 = 9 \times 6$.
- Pour 7 : $7 \times 7 = 49 < 52 < 56 = 8 \times 7$.

Dans chaque encadrement, 52 se trouve strictement entre deux multiples consécutifs : ce n'est pas un multiple de l'entier essayé.

Conclusion. Les produits cherchés sont 1×52, 2×26 et 4×13.

2.

En déduire la liste des diviseurs de 52.

INDICE

Outil : chaque produit du tableau donne deux diviseurs.

CORRIGÉ

Chaque produit $k \times d = 52$ du tableau fournit deux diviseurs de 52 : le facteur k et le facteur d.

Conclusion. Les diviseurs de 52 sont 1, 2, 4, 13, 26 et 52 : il y en a six.

3.

Écrire tous les multiples de 13 compris entre 300 et 350.

INDICE

Outil : un multiple de 13 s'écrit $k \times 13$, avec k entier naturel ; cherche le premier qui dépasse 300.

CORRIGÉ

Un multiple de 13 s'écrit $k \times 13$, avec k entier naturel. On repère le premier qui dépasse 300, puis on avance de 13 en 13 :

- $23 \times 13 = 299 < 300$;
- $24 \times 13 = 312$, $25 \times 13 = 325$ et $26 \times 13 = 338$;
- $27 \times 13 = 351 > 350$.

Conclusion. Les multiples de 13 compris entre 300 et 350 sont 312, 325 et 338.

4.

L'entier 52 est-il un multiple de 13 ? L'entier 13 est-il un multiple de 52 ?

INDICE

Outil : cherche un entier naturel k tel que $52 = k \times 13$, puis un entier k tel que $13 = k \times 52$.

CORRIGÉ

Multiple de 13. On a $52 = 4 \times 13$, avec 4 entier naturel : 52 est un multiple de 13, autrement dit 13 divise 52.

Multiple de 52. Supposons que $13 = k \times 52$, avec k entier naturel. On a $0 \times 52 = 0 < 13 < 52 = 1 \times 52$, donc k vérifierait $0 < k < 1$. Aucun entier naturel n'est strictement compris entre 0 et 1 : c'est impossible.

Conclusion. L'entier 52 est un multiple de 13, mais 13 n'est pas un multiple de 52.

Exercice 3

Sommes, différences et multiples de 17

On remarque que $85 = 5 \times 17$ et que $51 = 3 \times 17$.

1.

Sans calculer la somme, justifier que 17 divise $85 + 51$. Vérifier ensuite par le calcul.

INDICE

Outil : les propriétés des multiples et des diviseurs, pour une somme.

CORRIGÉ

Sans calculer. D'après l'introduction, 85 et 51 sont deux multiples de 17. D'après les propriétés des multiples et des diviseurs, 17 divise alors leur somme $85 + 51$.

Vérification. $85 + 51 = 136$ et $136 = 8 \times 17$, avec $8 = 5 + 3$.

Conclusion. L'entier 17 divise $85 + 51$, et le calcul le confirme.

2.

Même question pour la différence $85 - 51$.

INDICE

Outil : même propriété, pour une différence ; vérifie d'abord que $85 \geq 51$.

CORRIGÉ

Sans calculer. On a $85 \geq 51$, et 17 divise ces deux entiers. D'après les propriétés des multiples et des diviseurs, 17 divise leur différence $85 - 51$.

Vérification.

$$85 - 51 = 34 = 2 \times 17.$$

Conclusion. L'entier 17 divise $85 - 51$.

3.

Justifier que 17 divise 7×85, et donner l'entier k tel que $7 \times 85 = k \times 17$.

INDICE

Outil : si un entier divise b, il divise tout multiple de b.

CORRIGÉ

Divisibilité. L'entier 17 divise 85, donc il divise tout multiple de 85, en particulier 7×85, d'après les propriétés des multiples et des diviseurs.

L'entier k. On remplace 85 par 5×17 :

$$\begin{aligned} 7 \times 85 &= 7 \times 5 \times 17 \\ &= 35 \times 17. \end{aligned}$$

Conclusion. L'entier 17 divise 7×85, et $k = 35$. En effet, $7 \times 85 = 595 = 35 \times 17$.

4.

On a $153 = 3 \times 51$. En déduire que 17 divise 153, et donner l'entier k tel que $153 = k \times 17$.

INDICE

Outil : si a divise b et b divise c, alors a divise c.

CORRIGÉ

Divisibilité. L'entier 17 divise 51, et 51 divise 153 puisque $153 = 3 \times 51$. D'après les propriétés des multiples et des diviseurs, 17 divise 153.

L'entier k. On remplace 51 par 3×17 :

$$\begin{aligned} 153 &= 3 \times 3 \times 17 \\ &= 9 \times 17. \end{aligned}$$

Conclusion. L'entier 17 divise 153, et $k = 9$.

5.

Justifier que 17 ne divise pas 150.

INDICE

Outil : encadre 150 entre deux multiples de 17 qui se suivent.

CORRIGÉ

On a $8 \times 17 = 136$ et $9 \times 17 = 153$, donc

$$136 < 150 < 153.$$

Supposons que $150 = j \times 17$, avec j entier naturel. Alors $8 \times 17 < j \times 17 < 9 \times 17$, donc $8 < j < 9$. Aucun entier naturel n'est strictement compris entre 8 et 9 : c'est impossible.

Conclusion. L'entier 17 ne divise pas 150.

Exercice 4

La parité de quatre expressions

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel.

1.

Justifier que $10n + 8$ est pair.

INDICE

Outil : mets 2 en facteur et vérifie que l'autre facteur est un entier naturel.

CORRIGÉ

On met 2 en facteur :

$$10n + 8 = 2(5n + 4).$$

Comme n est un entier naturel, $5n + 4$ en est un aussi.

Conclusion. $10n + 8$ est un multiple de 2 : il est pair, pour tout entier naturel n.

2.

Justifier que $2n + 7$ est impair.

INDICE

Outil : écris $7 = 6 + 1$, puis mets 2 en facteur dans $2n + 6$.

CORRIGÉ

On écrit $7 = 6 + 1$, puis on met 2 en facteur dans $2n + 6$:

$$\begin{aligned} 2n + 7 &= 2n + 6 + 1 \\ &= 2(n + 3) + 1. \end{aligned}$$

L'entier $q = n + 3$ est un entier naturel, et $2n + 7 = 2q + 1$.

Conclusion. $2n + 7$ est impair, pour tout entier naturel n.

3.

En déduire la parité du produit $(2n + 7)(10n + 8)$.

INDICE

Outil : la parité d'un produit ; l'un des deux facteurs est-il pair ?

CORRIGÉ

D'après la question 1, le facteur $10n + 8$ est pair. D'après la parité d'un produit, un produit dont l'un des facteurs est pair est lui-même pair.

Conclusion. Le produit $(2n + 7)(10n + 8)$ est pair, pour tout entier naturel n.

4.

Quelle est la parité de $(2n+7)^2$?

INDICE

Outil : un entier et son carré ont la même parité.

CORRIGÉ

D'après la question 2, $2n+7$ est impair. D'après la parité du carré d'un entier, un entier et son carré ont la même parité.

Conclusion. Pour tout entier naturel n, $(2n+7)^2$ est impair.

Exercice 5

173, 187 et 201 : premiers ou non ?

1.

Quels nombres premiers faut-il tester pour savoir si 173 est premier ?

INDICE

Outil : cherche les nombres premiers p tels que $p^2 \leq 173$.

CORRIGÉ

D'après la propriété qui permet de reconnaître un nombre premier, il suffit de tester les nombres premiers p tels que $p^2 \leq 173$.

Les premiers nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17. On a $13^2 = 169 \leq 173$ et $17^2 = 289 > 173$: on s'arrête à 13.

Conclusion. Il faut tester les nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

2.

Tester la divisibilité de 173 par 2, 3, 5, 7, 11 et 13. L'entier 173 est-il premier ?

INDICE

Outil : les critères de divisibilité du collège pour 2, 3 et 5 ; un encadrement par des multiples pour 7, 11 et 13.

CORRIGÉ

On teste chacun des nombres premiers trouvés à la question 1.

- 173 se termine par 3 : d'après le critère de divisibilité par 2, 2 ne le divise pas.
- $1 + 7 + 3 = 11$ n'est pas un multiple de 3 : d'après le critère de divisibilité par 3, 3 ne divise pas 173 .
- 173 ne se termine ni par 0 ni par 5 : d'après le critère de divisibilité par 5, 5 ne le divise pas.
- $24 \times 7 = 168 < 173 < 175 = 25 \times 7$: 7 ne le divise pas.
- $15 \times 11 = 165 < 173 < 176 = 16 \times 11$: 11 ne le divise pas.
- $13 \times 13 = 169 < 173 < 182 = 14 \times 13$: 13 ne le divise pas.

Pour 7, 11 et 13, l'entier 173 est strictement compris entre deux multiples consécutifs : ce n'en est pas un multiple.

Conclusion. Aucun nombre premier p tel que $p^2 \leq 173$ ne divise 173. D'après la propriété qui permet de reconnaître un nombre premier, 173 est premier.

3.

L'entier 187 est-il premier ?

INDICE

Outil : même méthode ; 187 est impair, mais cela ne suffit pas.

CORRIGÉ

Nombres premiers à tester. On a $13^2 = 169 \leq 187$ et $17^2 = 289 > 187$: on teste 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

Essais. L'entier 187 est impair, $1 + 8 + 7 = 16$ n'est pas un multiple de 3, et 187 ne se termine ni par 0 ni par 5 : ni 2, ni 3, ni 5 ne le divisent. De plus, $26 \times 7 = 182 < 187 < 189 = 27 \times 7$: 7 ne le divise pas. En revanche,

$$187 = 17 \times 11.$$

Conclusion. L'entier 187 a le diviseur 11, différent de 1 et de 187 : il n'est pas premier.

4.

L'entier 201 est-il premier ?

INDICE

Outil : le critère de divisibilité par 3 : la somme des chiffres.

CORRIGÉ

La somme des chiffres de 201 vaut $2 + 0 + 1 = 3$, qui est un multiple de 3. D'après le critère de divisibilité par 3, 3 divise 201. En effet :

$$201 = 67 \times 3.$$

Conclusion. L'entier 201 a le diviseur 3, différent de 1 et de 201 : il n'est pas premier.

Exercice 6

Décomposer 588 et 1 155

1.

Décomposer 588 en produit de facteurs premiers, en présentant les divisions successives dans un tableau.

INDICE

Outil : divise par 2 tant que c'est possible, puis par 3, puis par 5, puis par 7…

CORRIGÉ

À chaque ligne, on divise par le plus petit nombre premier qui convient, jusqu'à obtenir 1.

Nombre	Diviseur premier
588	2
294	2
147	3
49	7
7	7
1	

Contrôle.

$$\begin{aligned} 2^2 \times 3 \times 7^2 &= 12 \times 49 \\ &= 588. \end{aligned}$$

Conclusion. La décomposition se lit dans la colonne de droite : $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

2.

Même travail pour $1\,155$.

INDICE

Outil : $1\,155$ est impair ; commence par tester 3 avec la somme des chiffres.

CORRIGÉ

L'entier $1\,155$ est impair, et la somme de ses chiffres, $1+1+5+5=12$, est un multiple de 3 : on commence par 3.

Nombre	Diviseur premier
$1\,155$	3
385	5
77	7
11	11
1	

Contrôle. $3\times5\times7=105$ et $105\times11=1\,155$.

Conclusion. $1\,155=3\times5\times7\times11$.

3.

Lire sur les décompositions lequel des deux entiers est pair.

INDICE

Outil : un entier est pair lorsque 2 figure parmi ses facteurs premiers.

CORRIGÉ

L'entier 588. Le facteur 2 figure dans sa décomposition : $588=2\times294$ est pair.

L'entier $1\,155$. Sa décomposition ne contient que les nombres premiers impairs 3, 5, 7 et 11. D'après la parité d'un produit, un produit d'entiers impairs est impair : $1\,155$ est impair.

Conclusion. Des deux entiers, seul 588 est pair.

Exercice 7

PGCD et PPCM de 156 et 234

On donne les décompositions $156 = 2^2 \times 3 \times 13$ et $234 = 2 \times 3^2 \times 13$.

1.

En déduire $\mathrm{PGCD}(156 ; 234)$.

INDICE

Outil : pour chaque nombre premier, garde l'exposant le plus petit.

CORRIGÉ

D'après la règle des exposants, on garde chaque nombre premier commun aux deux décompositions avec le plus petit de ses exposants : 2^1, 3^1 et 13^1.

$$\begin{aligned}&\mathrm{PGCD}(156 ; 234)\\&= 2 \times 3 \times 13\\&= 78.\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathrm{PGCD}(156 ; 234) = 78$.

2.

En déduire $\mathrm{PPCM}(156 ; 234)$.

INDICE

Outil : pour chaque nombre premier, garde cette fois l'exposant le plus grand.

CORRIGÉ

D'après la règle des exposants, on garde cette fois chaque nombre premier avec le plus grand de ses exposants : 2^2, 3^2 et 13^1.

$$\begin{aligned}&\mathrm{PPCM}(156 ; 234)\\&= 4 \times 9 \times 13\\&= 468.\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathrm{PPCM}(156 ; 234) = 468$.

3.

Contrôler ces deux résultats à l'aide du produit 156×234.

INDICE

Outil : le produit du PGCD et du PPCM de deux entiers est égal au produit de ces entiers.

CORRIGÉ

D'après le produit du PGCD et du PPCM, le produit 78×468 doit être égal à 156×234. On calcule les deux :

- $78 \times 468 = 36\,504$;
- $156 \times 234 = 36\,504$.

Conclusion. Les deux produits sont égaux : les résultats des questions 1 et 2 sont cohérents.

Exercice 8

Deux rubans coupés en morceaux égaux

Une couturière possède deux rubans, l'un de 154 cm et l'autre de 198 cm. Elle veut les couper en morceaux qui ont tous la même longueur, un nombre entier de centimètres, sans aucune chute. Elle veut des morceaux aussi longs que possible. On donne $154 = 2 \times 7 \times 11$ et $198 = 2 \times 3^2 \times 11$.

1.

Calculer la plus grande longueur possible d'un morceau.

INDICE

Question à te poser : la longueur d'un morceau doit-elle diviser les deux longueurs, ou en être un multiple ? La veut-on la plus grande ou la plus petite ?

CORRIGÉ

La situation. Notons c la longueur d'un morceau, en centimètres. Le premier ruban donne k morceaux et le second l morceaux, avec $154 = k \times c$ et $198 = l \times c$: la longueur c divise 154 et 198. On la veut la plus grande possible : c'est le PGCD de 154 et 198.

Calcul. D'après la règle des exposants, on garde les facteurs premiers communs 2 et 11, chacun avec l'exposant 1 :

$$\begin{aligned}&\mathrm{PGCD}(154;198)\\&= 2 \times 11 = 22.\end{aligned}$$

Conclusion. La plus grande longueur possible d'un morceau est 22 cm.

2.

Combien de morceaux la couturière obtient-elle en tout ?

INDICE

Outil : divise la longueur de chaque ruban par la longueur d'un morceau.

CORRIGÉ

On a $154 = 7 \times 22$ et $198 = 9 \times 22$: le premier ruban donne 7 morceaux et le second en donne 9.

Conclusion. La couturière obtient en tout $7 + 9 = 16$ morceaux de 22 cm.