BURHAN

L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/ensemble-n-et-arithmetique/cours

Chapitre	Semestre
L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique	Semestre 1

Peut-on tout ranger sans reste ?

Une coopérative prépare des sachets à offrir. Elle dispose de 120 dattes et de 84 amandes.

Tous les sachets doivent être **identiques** : même nombre de dattes, même nombre d'amandes. Et il ne doit rien rester.

Combien de sachets peut-elle préparer, au plus ?

> **Devine : Une prédiction**
>
> Quel est le plus grand nombre de sachets identiques que la coopérative peut préparer, sans reste ?
>
> **A.** 6 sachets.
>
> **Faux.**
> C'est possible, avec 20 dattes et 14 amandes par sachet. Mais on peut faire plus de sachets.
>
> **B.** 12 sachets.
>
> **Juste.**
> Juste : 10 dattes et 7 amandes par sachet, sans reste.
>
> **C.** 24 sachets.
>
> **Faux.**
> Les dattes se partagent en 24 parts de 5, mais pas les 84 amandes.
>
> **D.** 84 sachets.
>
> **Faux.**
> Chaque sachet aurait une amande, mais les 120 dattes ne se partagent pas en 84 parts égales.
>
> **Correction**
> Le nombre de sachets doit partager exactement les dattes et les amandes.
>
> Avec 12 sachets, cela fonctionne : $120 = 12 \times 10$ et $84 = 12 \times 7$.
>
> Avec 24 sachets, les amandes ne conviennent pas : $24 \times 3 = 72$ et $24 \times 4 = 96$, donc 84 n'est pas un multiple de 24.
>
> Pour être sûr que 12 est le plus grand nombre possible, il te faut les outils de ce chapitre.

Ce problème parle de **diviseurs communs**.

Dans ce chapitre, tu poses d'abord le cadre : l'ensemble des entiers naturels et ses symboles. Tu apprends ensuite à reconnaître multiples et diviseurs, nombres pairs et impairs, nombres premiers.

Tu écris tes premières démonstrations, avec la parité. Enfin, tu calcules un PGCD et un PPCM, et tu reviens aux sachets.

L'ensemble $\mathbb{N}$ et ses symboles

Trier des nombres

Rappel du collège : les nombres 0, 1, 2, 3… servent à compter des objets.

D'autres nombres s'écrivent avec une virgule ou une fraction, comme $2{,}5$ ou $\frac{3}{4}$.

Attention, une fraction peut être égale à un nombre qui sert à compter :

$$\frac{8}{2} = 4.$$

Devine : Trier des nombres

Parmi ces nombres, lequel sert à compter des objets, comme 0, 1, 2, 3… ?

A. $\frac{3}{4}$

Faux.

C'est moins qu'un objet entier : $\frac{3}{4}$ est entre 0 et 1.

B. $2{,}5$

Faux.

Deux objets et demi : ce n'est pas un compte d'objets entiers.

C. $\frac{7}{2}$

Faux.

$\frac{7}{2} = 3{,}5$: il reste une partie après la virgule.

D. $\frac{18}{6}$

Juste.

Juste : $\frac{18}{6} = 3$, car $6 \times 3 = 18$.

Correction

On calcule chaque nombre : $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{7}{2} = 3{,}5$ et $\frac{18}{6} = 3$.

Seul $\frac{18}{6}$ est égal à un nombre qui sert à compter.

L'écriture en fraction ne suffit donc pas à décider : on calcule d'abord.

Définition : L'ensemble des entiers naturels

Les nombres 0, 1, 2, 3, … sont les **entiers naturels**. Leur ensemble est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

- On écrit $n \in \mathbb{N}$ (« n appartient à $\mathbb{N}$ ») pour dire que n est un entier naturel, et $x \notin \mathbb{N}$ (« x n'appartient pas à $\mathbb{N}$ ») dans le cas contraire.
- L'ensemble des entiers naturels non nuls est noté $\mathbb{N}^*$. Tout élément de $\mathbb{N}^*$ est un élément de $\mathbb{N}$: on dit que $\mathbb{N}^*$ est **inclus** dans $\mathbb{N}$, et on écrit $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.
- Deux entiers naturels de la forme n et $n+1$ sont dits **consécutifs**.

Lire et écrire les symboles

Exemple : lire les symboles à voix haute

- $15 \in \mathbb{N}$ se lit « 15 appartient à $\mathbb{N}$ » : 15 est un entier naturel.
- $\dfrac{9}{2} \notin \mathbb{N}$ se lit « $\dfrac{9}{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$ », car $\dfrac{9}{2} = 4{,}5$.
- $0 \in \mathbb{N}$, mais $0 \notin \mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}^*$ contient tous les entiers naturels, sauf 0.
- $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ se lit « $\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{N}$ ».

Vérifie : Vrai ou faux ?

Laquelle de ces écritures est vraie ?

A. $0 \in \mathbb{N}^*$

Faux.
$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels **non nuls** : 0 n'en fait pas partie.

B. $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$

Faux.
0 est un élément de $\mathbb{N}$ qui n'est pas dans $\mathbb{N}^*$: l'inclusion est fausse dans ce sens.

C. $\dfrac{20}{5} \in \mathbb{N}^*$

Juste.
Juste : $\dfrac{20}{5} = 4$, un entier naturel non nul.

D. $1{,}5 \in \mathbb{N}$

Faux.
$1{,}5$ n'est pas un entier : $1{,}5 \notin \mathbb{N}$.

Correction
$\dfrac{20}{5} = 4$ et $4 \neq 0$: donc $\dfrac{20}{5} \in \mathbb{N}^*$.

Les trois autres écritures sont fausses :

- $0 \notin \mathbb{N}^*$;
- $1{,}5 \notin \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{N}^*$, à cause de 0.

Entiers consécutifs, puis à toi

Remarque : des entiers consécutifs

Deux entiers consécutifs se suivent : 27 et 28, ou 0 et 1.

Si n désigne un entier naturel, l'entier qui le suit s'écrit $n+1$, et celui qui suit $n+1$ s'écrit $n+2$. Ainsi, n, $n+1$ et $n+2$ sont trois entiers consécutifs.

Cette écriture servira dans tes démonstrations.

À toi : Appartenance

Complète chaque écriture par $\in$ ou par $\notin$: $12 \dots \mathbb{N}$; $\frac{14}{4} \dots \mathbb{N}$; $\frac{35}{7} \dots \mathbb{N}^*$; $0 \dots \mathbb{N}^*$. Donne ensuite les deux entiers qui suivent 49. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Calcule d'abord chaque fraction.
Indice 2
$\frac{14}{4} = 3{,}5$ et $\frac{35}{7} = 5$.
Indice 3
Point délicat : $\mathbb{N}^*$ ne contient pas 0.

Réponse
Appartenance.

- $12 \in \mathbb{N}$.
- $\frac{14}{4} = 3{,}5$, donc $\frac{14}{4} \notin \mathbb{N}$.
- $\frac{35}{7} = 5$, donc $\frac{35}{7} \in \mathbb{N}^*$.
- $0 \notin \mathbb{N}^*$.

Entiers consécutifs. Les deux entiers qui suivent 49 sont 50 et 51 : 49, 50 et 51 sont trois entiers consécutifs.

Multiples et diviseurs

Ranger des jetons en rectangle

En clair. Tu ranges 20 jetons en rangées égales.

Avec 4 rangées de 5 jetons, c'est possible : $20 = 4 \times 5$.

Avec 3 rangées, c'est impossible : $3 \times 6 = 18$ et $3 \times 7 = 21$. Il resterait des jetons.

On dira que 4 **divise** 20, et que 3 ne divise pas 20.

Devine : Un rangement impossible

Tu as 28 jetons. Quel rangement en rangées égales est impossible ?

A. En 4 rangées.
Faux.
C'est possible : $28 = 4 \times 7$.

B. En 7 rangées.
Faux.
C'est possible : $28 = 7 \times 4$.

C. En 3 rangées.
Juste.
Juste : $3 \times 9 = 27$ et $3 \times 10 = 30$; il resterait un jeton.

D. En 14 rangées.
Faux.
C'est possible : 14 rangées de 2 jetons, car $28 = 14 \times 2$.

Correction
Un rangement en r rangées est possible lorsque 28 s'écrit $r \times q$, avec q jetons par rangée.

On a $28 = 4 \times 7 = 7 \times 4 = 14 \times 2$: 4, 7 et 14 rangées conviennent.

Pour 3 rangées, 28 est entre $3 \times 9 = 27$ et $3 \times 10 = 30$: aucun entier q ne convient.

Définition : Multiples et diviseurs

Soit a et b deux entiers naturels. On dit que b est un **multiple** de a s'il existe un entier naturel k tel que

$$b = k \times a.$$

On dit alors aussi que a est un **diviseur** de b, ou que a **divise** b.

- 0 est un multiple de tout entier naturel a, car $0 = 0 \times a$.
- 1 divise tout entier naturel b, et b divise b, car $b = b \times 1 = 1 \times b$.
- 0 ne divise que 0, car $k \times 0 = 0$ pour tout entier naturel k.

La liste des diviseurs

Rappel du collège, les critères de divisibilité :

- un entier est divisible par 2 si et seulement s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- il est divisible par 5 si et seulement s'il se termine par 0 ou 5 ;
- il est divisible par 3, ou par 9, si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.

« Divisible par 3 » veut dire que 3 divise l'entier.

Par exemple, $4\,725$ est divisible par 9, car $4+7+2+5=18$. Mais 3 ne divise pas 64, car $6+4=10$ n'est pas un multiple de 3.

Exemple : la liste des diviseurs d'un entier

Cherchons tous les diviseurs de 60. On écrit 60 comme produit de deux entiers, en augmentant le premier facteur.

Premier facteur	1	2	3	4	5	6
Second facteur	60	30	20	15	12	10

Ensuite, 7 ne divise pas 60, car $7\times 8=56<60<63=7\times 9$.

Dès que le premier facteur atteint 8, il dépasse le second, car $8\times 8=64>60$: on retrouverait les produits déjà écrits.

Les diviseurs de 60 sont donc 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.

Attention : diviseur ou multiple ?

✗ « 36 divise 9, car $36=4\times 9$. »

✓ L'égalité $36=4\times 9$ dit que 36 est un **multiple** de 9, donc que 9 divise 36.

Pour des entiers non nuls, le diviseur n'est jamais plus grand que le multiple : on le démontre un peu plus bas.

Et 0 est à part : c'est un multiple de tout entier, mais il ne divise que 0, car $k\times 0=0$ pour tout entier naturel k.

Les propriétés des diviseurs

On sait que 7 divise 35 et que 7 divise 14. Leur somme vérifie $35+14=49=7\times 7$: 7 divise encore la somme.

Pourquoi est-ce vrai ? Les deux nombres sont des multiples de 7 : $35 = 5 \times 7$ et $14 = 2 \times 7$. En mettant 7 en facteur :

$$35 + 14 = (5 + 2) \times 7.$$

Propriété : Propriétés des multiples et des diviseurs

Soit a un entier naturel non nul, et b et c deux entiers naturels.

1. Si a divise b, alors a divise $k \times b$ pour tout entier naturel k.
2. Si a divise b et a divise c, alors a divise $b + c$; si de plus $b \geq c$, alors a divise $b - c$.
3. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
4. Si a divise b et $b \neq 0$, alors $a \leq b$.

Démonstration

Étape 1. Si a divise b, il existe un entier naturel q tel que $b = q \times a$. Alors $k \times b = (k \times q) \times a$, et $k \times q$ est un entier naturel : a divise $k \times b$.

Étape 2. Si $b = q \times a$ et $c = r \times a$, avec q et r entiers naturels, alors $b + c = (q + r) \times a$: a divise $b + c$. Si de plus $b \geq c$, alors $q \times a \geq r \times a$; si l'on avait $q < r$, on aurait $q \times a < r \times a$, car $a > 0$. Donc $q \geq r$: $q - r$ est un entier naturel, et $b - c = (q - r) \times a$. Donc a divise $b - c$.

Étape 3. Si $b = q \times a$ et $c = s \times b$, alors $c = (s \times q) \times a$: a divise c.

Étape 4. Si $b = q \times a$ et $b \neq 0$, alors $q \neq 0$, donc $q \geq 1$. Par suite, $b = q \times a \geq 1 \times a = a$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste de toute la preuve : **écrire chaque multiple sous la forme $q \times a$, avec q entier naturel**, puis calculer.

Par exemple, $b = q \times a$ et $c = r \times a$ donnent :

$$b + c = (q + r) \times a.$$

Il reste à vérifier que le nouveau facteur est un entier naturel. Pour la différence, c'est là que sert l'hypothèse $b \geq c$.

Vérifie : Le facteur de la différence

Dans la preuve, on a $b = q \times a$ et $c = r \times a$, avec $b \geq c$. Comment s'écrit $b - c$?

A. $b - c = (q + r) \times a$

Faux.
C'est l'écriture de la somme $b + c$, pas celle de la différence.

B. $b - c = (q - r) \times a$

Juste.

Juste : on met a en facteur.

C. $b - c = (q \times r) \times a$

Faux.

Mettre a en facteur ne multiplie pas q par r.

D. $b - c = (r - q) \times a$

Faux.

L'ordre compte : b va avec q, et c avec r.

Correction

Comme $b \geq c$, on a $q \times a \geq r \times a$.

Si l'on avait $q < r$, on aurait $q \times a < r \times a$, car $a > 0$. Donc $q \geq r$: $q - r$ est un entier naturel.

On met alors a en facteur :

$$\begin{aligned} b - c &= q \times a - r \times a \\ &= (q - r) \times a. \end{aligned}$$

Donc a divise $b - c$.

Exemple : une somme et une différence

- 13 divise 65 et 13 divise 26, car $65 = 5 \times 13$ et $26 = 2 \times 13$. D'après les propriétés des multiples et des diviseurs, 13 divise $65 + 26 = 91$ et $65 - 26 = 39$. Contrôle : $91 = 7 \times 13$ et $39 = 3 \times 13$.
- 13 divise 26, donc 13 divise $10 \times 26 = 260$. De plus, $286 = 11 \times 26$: 26 divise 286. Comme 13 divise 26, 13 divise 286, d'après les propriétés des multiples et des diviseurs.
- 5 divise 20 et $5 \leq 20$: un diviseur ne dépasse pas le multiple. **L'hypothèse compte.** 5 divise 0, mais $5 > 0$: cette comparaison exige $b \neq 0$.

La méthode, un exemple, puis à toi

Méthode : montrer qu'un entier en divise un autre

1. **Écris** $b = k \times a$, en donnant l'entier k.
2. **Vérifie** que k est bien un entier naturel.
3. **Pour une expression qui contient une lettre**, mets a en facteur, puis nomme la propriété employée.

4. **Pour montrer que a ne divise pas b**, encadre b entre deux multiples consécutifs de a : $k \times a < b < (k+1) \times a$. En effet, un multiple $j \times a$ vaut au plus $k \times a$ si $j \leq k$, et au moins $(k+1) \times a$ si $j \geq k+1$: aucun n'est égal à b.

Exemple : une divisibilité avec une lettre

Soit n un entier naturel. Montrons que 6 divise $6n + 12$.

On met 6 en facteur :

$$6n + 12 = (n+2) \times 6.$$

Or $n+2$ est un entier naturel : l'expression s'écrit $k \times 6$, avec $k = n+2$. Donc 6 divise $6n+12$, pour tout entier naturel n.

Contrôle : pour $n = 3$, $6n + 12 = 30 = 5 \times 6$.

À toi : Divise ou ne divise pas

Montre que 6 divise $4n + 2(n+3)$ pour tout entier naturel n. Montre ensuite que 8 ne divise pas 100. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Développe et réduis l'expression, puis cherche à mettre 6 en facteur.
Indice 2
$4n + 2(n+3) = 6n + 6$. Pour 100, cherche les deux multiples de 8 qui l'entourent.
Indice 3
Point délicat : donne l'entier k explicitement, ici une expression en n, et vérifie que c'est un entier naturel.

Réponse
Première affirmation. Soit n un entier naturel. On développe, puis on met 6 en facteur :

$$\begin{aligned} &4n + 2(n+3) \\ &= 4n + 2n + 6 \\ &= 6n + 6 \\ &= (n+1) \times 6. \end{aligned}$$

Or $n+1$ est un entier naturel : l'expression s'écrit $k \times 6$, avec $k = n+1$.

Seconde affirmation. On a $8 \times 12 = 96$ et $8 \times 13 = 104$, donc :

$$96 < 100 < 104.$$

Si l'on avait $100 = j \times 8$, avec j entier naturel, alors $12 \times 8 < j \times 8 < 13 \times 8$, donc $12 < j < 13$: aucun entier naturel j ne convient.

> **Conclusion.** 6 divise $4n + 2(n + 3)$ pour tout entier naturel n, et 8 ne divise pas 100.

Nombres pairs et nombres impairs

Ranger par paires

En clair. Range 14 billes par paires : tu obtiens 7 paires, sans reste. Donc $14 = 2 \times 7$.

Avec 13 billes, tu obtiens 6 paires, et il reste une bille seule. Donc $13 = 2 \times 6 + 1$.

Les entiers rangés sans reste sont les nombres pairs.

> **Devine : Une bille seule**
>
> Lequel de ces entiers laisse une bille seule quand on le range par paires ?
>
> **A.** 2×19
> **Faux.**
> C'est 19 paires, sans reste.
>
> **B.** $2 \times 8 + 2$
> **Faux.**
> $2 \times 8 + 2 = 2 \times 9$: les deux billes en plus forment une paire.
>
> **C.** $2 \times 11 + 1$
> **Juste.**
> Juste : 11 paires, et une bille seule.
>
> **D.** 5×4
> **Faux.**
> $5 \times 4 = 20 = 2 \times 10$: 10 paires, sans reste.
>
> **Correction**
> On regroupe chaque nombre en paires :
>
> - $2 \times 19 = 38$ donne 19 paires ;
> - $2 \times 8 + 2 = 2 \times 9$ donne 9 paires ;
> - $5 \times 4 = 2 \times 10$ donne 10 paires ;
> - $2 \times 11 + 1 = 23$ donne 11 paires et une bille seule.
>
> Seul $2 \times 11 + 1$ laisse une bille seule.

> **Définition : Nombres pairs et nombres impairs**
>
> Soit n un entier naturel.
>
> - n est **pair** s'il est un multiple de 2, c'est-à-dire s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.

- n est **impair** s'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Exemple : écrire un pair, un impair

- $46 = 2 \times 23$: 46 est pair, avec $k = 23$.
- $57 = 2 \times 28 + 1$: 57 est impair, avec $k = 28$.
- $0 = 2 \times 0$: 0 est pair.
- Si n est un entier naturel, $2n + 6 = 2(n + 3)$ est pair, avec $k = n + 3$.

Pair ou impair, jamais les deux

Propriété : Un entier naturel est pair ou impair

Tout entier naturel est **soit pair, soit impair** : il est l'un des deux, et jamais les deux à la fois.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu t'en serviras pour annoncer deux cas dans une démonstration : « n est pair, ou n est impair ».

Vérifie : Ce que l'on peut affirmer

On sait que $n = 2k + 1$, avec k entier naturel. Que peut-on affirmer ?

A. n est pair.
Faux.
n s'écrit $2k + 1$: il est impair.

B. n peut être pair et impair à la fois.
Faux.
D'après le résultat admis, un entier n'est jamais pair et impair à la fois.

C. n est impair, donc il n'est pas pair.
Juste.
Juste : impair par définition, donc jamais pair, d'après le résultat admis.

D. On ne peut rien dire sans connaître k.
Faux.
La forme $2k + 1$ suffit, quelle que soit la valeur de k.

Correction
Par définition, $n = 2k + 1$ est impair.

D'après le résultat admis, un entier naturel est soit pair, soit impair, jamais les deux. Donc n n'est pas pair.

Parité d'une somme et d'un produit

Additionne deux impairs : $7+9=16$, $11+15=26$, $3+21=24$. Le résultat semble toujours pair.

Pourquoi est-ce vrai ? On écrit chaque entier sous la forme $2k$ ou $2k+1$. Puis on met 2 en facteur dans le résultat.

Propriété : Parité d'une somme et d'un produit

Soit m et n deux entiers naturels.

- Si m et n sont tous deux pairs, ou tous deux impairs, alors $m+n$ est pair.
- Si l'un est pair et l'autre impair, alors $m+n$ est impair.
- Si l'un au moins des deux est pair, alors $m \times n$ est pair.
- Si m et n sont tous deux impairs, alors $m \times n$ est impair.

Démonstration

Étape 1. Selon leur parité, on écrit $m=2k$ ou $m=2k+1$, et $n=2l$ ou $n=2l+1$, avec k et l entiers naturels.

Étape 2. Sommes : $2k+2l=2(k+l)$ et $(2k+1)+(2l+1)=2(k+l+1)$ sont pairs ; $2k+(2l+1)=2(k+l)+1$ est impair, de même que $(2k+1)+2l$. Ici $k+l$ et $k+l+1$ sont des entiers naturels.

Étape 3. Produits : si $m=2k$, alors $m \times n=2(k \times n)$ est pair ; de même si n est pair. Si $m=2k+1$ et $n=2l+1$, alors $m \times n=4kl+2k+2l+1=2(2kl+k+l)+1$ est impair.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le geste clé : **mettre 2 en facteur**. On écrit $m=2k+1$ et $n=2l+1$, avec deux lettres différentes. Alors :

$$\begin{aligned} m+n &= 2k+2l+2 \\ &= 2(k+l+1). \end{aligned}$$

C'est le double d'un entier naturel, donc un nombre pair.

Pour montrer qu'un entier est impair, on cherche la forme $2 \times (\text{entier})+1$.

Vérifie : Le produit de deux impairs

Dans la preuve, $m = 2k + 1$ et $n = 2l + 1$. Quelle écriture montre que $m \times n$ est impair ?

A. $m \times n = 2(2kl + k + l) + 1$

Juste.

Juste : on développe, puis on met 2 en facteur dans les trois premiers termes.

B. $m \times n = 2(kl + k + l) + 1$

Faux.

Le développement donne $4kl$, c'est-à-dire $2 \times 2kl$: il manque un facteur 2.

C. $m \times n = 4kl + 1$

Faux.

Ce calcul oublie les produits $2k \times 1$ et $1 \times 2l$.

D. $m \times n = 2(2kl + k + l + 1)$

Faux.

Le dernier terme, $1 \times 1 = 1$, ne contient pas le facteur 2.

Correction

On développe :

$$\begin{aligned} m \times n &= (2k + 1)(2l + 1) \\ &= 4kl + 2k + 2l + 1. \end{aligned}$$

On met 2 en facteur dans les trois premiers termes :

$$m \times n = 2(2kl + k + l) + 1.$$

Comme $2kl + k + l$ est un entier naturel, $m \times n$ est impair.

Exemple : la somme de trois entiers consécutifs

Soit n un entier naturel, et $S = n + (n + 1) + (n + 2)$. On a $S = 3n + 3$.

Deux cas : n est pair ou n est impair.

- Si n est pair, $3n$ est pair, d'après la parité d'un produit. Or 3 est impair : S est impair, d'après la parité d'une somme.
- Si n est impair, $3n$ est le produit de deux impairs : il est impair. Alors S est la somme de deux impairs : il est pair.

La parité de S dépend donc de n : pour $n = 4$, $S = 15$; pour $n = 5$, $S = 18$.

L'hypothèse compte. Pour qu'un produit soit pair, il faut qu'**un** facteur le soit : $3 \times 5 = 15$ est impair, alors que $3 + 5 = 8$ est pair.

Un piège, puis à toi

Attention : deux entiers, deux lettres

✗ « Soit m et n deux impairs : $m = 2k + 1$ et $n = 2k + 1$. »

✓ Avec la même lettre, on aurait $m = n$: la preuve ne traiterait que deux entiers égaux.

Écris $m = 2k + 1$ et $n = 2l + 1$, avec deux lettres différentes. Par exemple, $9 = 2 \times 4 + 1$ et $15 = 2 \times 7 + 1$: ici $k = 4$, mais $l = 7$.

À toi : Une preuve de parité

Soit m un entier pair et n un entier impair. Démontre que $m + 3n$ est impair, en deux ou trois lignes. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Écris $m = 2k$ et $n = 2l + 1$, avec deux lettres différentes.
Indice 2
Calcule $m + 3n = 2k + 6l + 3$, puis cherche la forme $2 \times (\text{entier}) + 1$.
Indice 3
Point délicat : $3 = 2 + 1$; le 2 se range dans le facteur 2.

Réponse
On écrit $m = 2k$ et $n = 2l + 1$, avec k et l entiers naturels. Alors :

$$\begin{aligned} & m + 3n \\ & = 2k + 6l + 3 \\ & = 2k + 6l + 2 + 1 \\ & = 2(k + 3l + 1) + 1. \end{aligned}$$

Comme $k + 3l + 1$ est un entier naturel, l'entier $m + 3n$ a la forme $2 \times (\text{entier}) + 1$.

Conclusion. Pour tout entier pair m et tout entier impair n, l'entier $m + 3n$ est impair.

Démontrer avec la parité

Une conjecture

En clair. Calcule quelques carrés : $4^2 = 16$, $6^2 = 36$, $9^2 = 81$, $11^2 = 121$. Les carrés des pairs sont pairs ; ceux des impairs sont impairs.

Peut-on en conclure que c'est vrai pour **tous** les entiers naturels ? Quatre essais ne disent rien des entiers qui restent.

Devine : Ce que prouvent les essais

Un élève vérifie la propriété « n^2 et n ont la même parité » pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 20$. Que peut-il conclure ?

A. La propriété est vraie pour tout entier naturel.

Faux.

Vingt et un essais restent des cas particuliers : il reste une infinité d'entiers.

B. La propriété est fausse pour certains entiers.

Faux.

Aucun essai ne la contredit : rien ne montre qu'elle est fausse.

C. Elle est vraie pour ces entiers ; pour les autres, il faut une preuve.

Juste.

Juste : c'est une conjecture, que la démonstration va établir.

D. Elle est vraie pour presque tous les entiers naturels.

Faux.

Les essais ne disent rien des entiers non testés, même à peu près.

Correction

Les essais établissent la propriété pour 21 entiers seulement.

Pour l'affirmer pour tout entier naturel, il faut une démonstration.

En revanche, un seul essai contraire aurait suffi à la rendre fausse.

Attention : un exemple ne démontre pas

✗ « Pour $n = 1, 3$ et 5, $n^2 + 1$ vaut $2, 10$ et 26. Donc $n^2 + 1$ est pair pour tout n. »

✓ Pour $n = 2$, on trouve $n^2 + 1 = 5$, qui est impair. Un seul contre-exemple suffit pour montrer qu'une affirmation est fausse.

À l'inverse, des essais ne démontrent jamais une propriété pour tout entier naturel.

La parité du carré

On ne peut pas essayer tous les entiers naturels.

Pourquoi est-ce vrai ? Le carré n^2 est le produit $n \times n$. La parité d'un produit donne la réponse dans chacun des deux cas : n pair, ou n impair.

Propriété : Parité du carré d'un entier

Soit n un entier naturel. Les entiers n et n^2 ont la **même parité** :

- si n est pair, alors n^2 est pair ;
- si n est impair, alors n^2 est impair.

En particulier, si n^2 est pair, alors n est pair.

Démonstration

Étape 1. L'entier n est soit pair, soit impair : on distingue deux cas. On a $n^2 = n \times n$. Si n est pair, $n \times n$ a un facteur pair : il est pair, d'après la parité d'un produit. Si n est impair, $n \times n$ est le produit de deux impairs : il est impair. Dans les deux cas, n et n^2 ont la même parité.

Étape 2. Supposons que n^2 est pair. L'entier n est soit pair, soit impair. S'il était impair, n^2 serait impair d'après l'étape 1 ; or un entier n'est jamais pair et impair à la fois. Donc n est pair.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées à retenir.

- **Annoncer les cas** : n est soit pair, soit impair, d'après le résultat admis. On traite chacun, puis on conclut « dans les deux cas ».
- **Raisonner par l'absurde**, pour la dernière phrase : si n était impair, n^2 serait impair. Or un entier n'est jamais pair et impair à la fois. C'est le résultat admis qui ferme la preuve.

Vérifie : La fin de la preuve

Dans l'étape 2, on suppose que n^2 est pair. Pourquoi n ne peut-il pas être impair ?

A. Car n^2 serait impair, donc pas pair.

Juste.

Juste : un entier n'est jamais pair et impair à la fois.

B. Parce que $3^2 = 9$ est un nombre impair.

Faux.

Un exemple ne démontre rien pour tout n.

C. Parce qu'un carré est toujours un nombre pair.

Faux.

$9 = 3^2$ est un carré impair.

D. Parce que $n + n$ est toujours un nombre pair.

Faux.

$n + n$ est pair pour tout n : cela ne décide rien.

Correction

Si n était impair, n^2 serait impair, d'après la première partie de l'énoncé.

Or n^2 est pair, et un entier n'est jamais pair et impair à la fois. Cette contradiction montre que n est pair.

Exemple : si le carré est impair

- Soit n un entier naturel tel que n^2 est impair. Alors n est impair. En effet, n est soit pair, soit impair ; s'il était pair, n^2 serait pair, d'après la parité du carré d'un entier, et ne pourrait pas être impair. Par exemple, $n^2 = 169$ donne $n = 13$, qui est impair.
- **L'hypothèse compte.** L'énoncé porte sur $n \times n$, avec deux facteurs égaux. Pour deux facteurs différents, il ne dit rien : $2 \times 3 = 6$ est pair, alors que 3 est impair.

Deux entiers consécutifs

Observe des produits de deux entiers consécutifs : $5 \times 6 = 30$, $8 \times 9 = 72$, $12 \times 13 = 156$. Ils sont tous pairs.

Pourquoi est-ce vrai ? Parmi deux entiers consécutifs, l'un des deux est pair. Un seul facteur pair suffit pour que le produit soit pair.

Propriété : Produit de deux entiers consécutifs

Pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ de deux entiers consécutifs est **pair**.

Démonstration

On distingue deux cas, car n est soit pair, soit impair.

Étape 1. Si n est pair, le produit $n(n+1)$ a un facteur pair : il est pair, d'après la parité d'un produit.

Étape 2. Si n est impair, alors $n+1$ est la somme de deux impairs, n et $1 = 2 \times 0 + 1$: il est pair, d'après la parité d'une somme. Le produit $n(n+1)$ a encore un facteur pair : il est pair.

Étape 3. Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve **annonce deux cas**, puis les traite l'un après l'autre. Dans chaque cas, on trouve un facteur pair : n lui-même, ou $n+1$. La parité d'un produit conclut.

Retiens ce plan : annoncer les cas, traiter chacun, puis conclure « dans les deux cas ».

Vérifie : Le second cas

Dans la preuve, si n est impair, quel facteur du produit $n(n+1)$ est pair, et pourquoi ?

A. n, car $n \times n$ est pair.
Faux.

Dans ce cas, n est impair : il n'est pas pair.

B. $n+1$, somme de deux impairs.

Juste.

Juste : n et 1 sont impairs, et leur somme est paire.

C. Aucun : le produit de deux impairs est impair.

Faux.

$n+1$ n'est pas impair quand n l'est.

D. Les deux, car ils sont consécutifs.

Faux.

Ici, n est impair : il n'est pas pair.

Correction

Si n est impair, $n+1$ est la somme de deux impairs, n et $1 = 2 \times 0 + 1$: il est pair, d'après la parité d'une somme.

Le produit $n(n+1)$ a donc un facteur pair : il est pair, d'après la parité d'un produit.

Exemple : se ramener à deux entiers consécutifs

Soit n un entier naturel. Montrons que $n^2 + 5n$ est pair. On l'écrit :

$$n^2 + 5n = n(n+1) + 4n.$$

D'après le produit de deux entiers consécutifs, $n(n+1)$ est pair. De plus, $4n = 2 \times 2n$ est pair. D'après la parité d'une somme, $n^2 + 5n$ est pair.

Contrôle : pour $n = 3$, on trouve $9 + 15 = 24$.

L'hypothèse compte. L'énoncé porte sur deux entiers **consécutifs** : $3 \times 5 = 15$ est impair.

La méthode, à toi, le coin devoir

Méthode : démontrer une propriété de parité

1. **Annonce** les cas : « Deux cas : n est pair ou n est impair. »
2. **Écris** $n = 2k$ dans le premier cas, $n = 2k+1$ dans le second ; prends une autre lettre pour chaque autre entier.
3. **Calcule**, puis mets 2 en facteur, pour obtenir $2 \times (\text{entier})$ ou $2 \times (\text{entier}) + 1$.
4. **Conclus** dans chaque cas, puis pour tout entier naturel n.

À toi : Démontrer par cas

Soit n un entier naturel. Démontre que $n^2 + 3n + 1$ est impair. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Annonce les deux cas, puis écris $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$.
Indice 2
Si $n = 2k$, on trouve $4k^2 + 6k + 1$; si $n = 2k + 1$, on trouve $4k^2 + 10k + 5$.
Indice 3
Point délicat : dans le second cas, écris $5 = 4 + 1$ pour mettre 2 en facteur.

Réponse
Posons $A = n^2 + 3n + 1$. Deux cas : n est pair ou n est impair.

Si $n = 2k$, avec k entier naturel :

$$\begin{aligned} A &= 4k^2 + 6k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 3k) + 1. \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 3k$ est un entier naturel, A est impair.

Si $n = 2k + 1$, avec k entier naturel :

$$\begin{aligned} A &\\ &= (2k + 1)^2 \\ &\quad + 3(2k + 1) + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &\quad + 6k + 4 \\ &= 4k^2 + 10k + 5 \\ &= 2(2k^2 + 5k + 2) + 1. \end{aligned}$$

Comme $2k^2 + 5k + 2$ est un entier naturel, A est impair.

Conclusion. Dans les deux cas, $n^2 + 3n + 1$ est impair : c'est vrai pour tout entier naturel n.

Remarque : Coin devoir : rédiger une preuve par cas

En devoir, une preuve de parité tient en trois temps. Écris : « Deux cas : n est pair ou n est impair. Si $n = 2k$, … ; si $n = 2k + 1$, … Dans les deux cas, l'expression est impaire. »

Annonce toujours les cas avant de calculer. Donne l'entier qui multiplie 2, et nomme la propriété employée.

Les nombres premiers

Exactement deux diviseurs

Devine : Combien de diviseurs ?

Lequel de ces entiers a exactement deux diviseurs ?

A. 15

Faux.

15 a quatre diviseurs : 1, 3, 5 et 15.

B. 1

Faux.

1 n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

C. 25

Faux.

25 a trois diviseurs : 1, 5 et 25.

D. 19

Juste.

Juste : 19 n'est divisible que par 1 et par 19.

Correction

On liste les diviseurs de chaque entier :

- 15 : 1, 3, 5 et 15 ;
- 25 : 1, 5 et 25 ;
- 1 : un seul diviseur, 1 ;
- 19 : 1 et 19, car aucun entier de 2 à 18 ne le divise.

Seul 19 a exactement deux diviseurs.

Définition : Nombre premier

Un entier naturel p est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et p.

- 0 n'est pas premier, car tout entier naturel le divise ; 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur.
- Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Exemple : les nombres premiers entre 30 et 50

Les entiers pairs de 30 à 50 ont le diviseur 2 : aucun n'est premier. Pour les impairs, on cherche un diviseur autre que 1 et l'entier lui-même.

Entier	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49
Diviseur trouvé	aucun	3	5	aucun	3	aucun	aucun	3	aucun	7

Pour 31, 37, 41, 43 et 47, aucun entier compris entre 2 et l'entier lui-même, exclu, ne le divise. Plus loin, un énoncé réduira beaucoup ces essais.

Les nombres premiers entre 30 et 50 sont donc 31, 37, 41, 43 et 47.

Deux pièges

Attention : ni 0 ni 1

✗ « 1 est premier, car il n'est divisible que par 1 et par lui-même. »

✓ Un nombre premier a **exactement deux** diviseurs. Or 1 n'en a qu'un : « 1 » et « lui-même » sont le même nombre.

Quant à 0, il a une infinité de diviseurs. Ni 0 ni 1 n'est premier.

Attention : impair ne veut pas dire premier

✗ « 57 est impair, donc il est premier. »

✓ $57 = 3 \times 19$: 57 n'est pas premier. Beaucoup d'impairs ne sont pas premiers, comme 27 ou 65.

Inversement, 2 est premier et pair. C'est le seul nombre premier pair : tout autre entier pair a le diviseur 2, différent de 1 et de lui-même.

Un diviseur premier existe toujours

Les diviseurs de 91 supérieurs ou égaux à 2 sont 7, 13 et 91. Le plus petit, 7, est premier. Pour 35, le plus petit est 5, premier lui aussi.

Pourquoi est-ce vrai ? Si le plus petit diviseur n'était pas premier, il aurait lui-même un diviseur plus petit que lui et supérieur ou égal à 2. Ce diviseur diviserait aussi l'entier de départ.

Propriété : Existence d'un diviseur premier

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Le plus petit diviseur de n supérieur ou égal à 2 est un nombre premier. En particulier, n admet au moins un diviseur premier.

Démonstration

Étape 1. L'entier n se divise lui-même et $n \geq 2$: n a des diviseurs supérieurs ou égaux à 2. D'après les propriétés des diviseurs, ils sont tous inférieurs ou égaux à n, donc en nombre fini ; on note d le plus petit.

Étape 2. Supposons par l'absurde que d n'est pas premier. Comme $d \geq 2$, 1 et d sont deux diviseurs distincts de d : il en a un troisième, e, différent de 1. Comme $d \neq 0$ et que 0 ne divise que 0, $e \neq 0$, donc $e \geq 2$; d'après les propriétés des diviseurs, $e \leq d$, donc $e < d$.

Étape 3. L'entier e divise d, et d divise n : donc e divise n. Or $2 \leq e < d$: cela contredit le choix de d. Donc d est premier.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux idées.

- On part du **plus petit** des diviseurs de n qui dépassent 1 : il existe, car n en fait partie, et ces diviseurs sont en nombre fini.
- Puis on **raisonne par l'absurde** : un diviseur de ce plus petit diviseur serait un diviseur de n encore plus petit. C'est impossible, donc le plus petit diviseur est premier.

Vérifie : L'argument de l'étape 3

Dans la preuve, e divise d et d divise n. Quelle propriété permet de dire que e divise n ?

A. La divisibilité d'une somme de deux multiples.

Faux.

Aucune somme n'apparaît dans cette étape.

B. La comparaison : un diviseur est plus petit.

Faux.

Elle donne $e \leq d$, et non que e divise n.

C. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Juste.

Juste : c'est l'une des propriétés des multiples et des diviseurs.

D. La parité d'un produit de deux entiers.

Faux.

La preuve ne parle pas de parité.

Correction

D'après les propriétés des multiples et des diviseurs : si e divise d et d divise n, alors e divise n.

Concrètement, $d = s \times e$ et $n = q \times d$ donnent :

$$n = (q \times s) \times e.$$

Exemple : chercher le plus petit diviseur

Cherchons le plus petit diviseur de 143 supérieur ou égal à 2.

Par 2 et par 3. L'entier 143 est impair, et $1+4+3=8$: ni 2 ni 3 ne le divisent. Donc 4, 6, 8, 9 et 10 ne le divisent pas non plus : sinon, 2 ou 3 le diviserait, d'après les propriétés des diviseurs.

Par 5 et par 7. Il ne se termine ni par 0 ni par 5 : 5 ne le divise pas. Pour 7, on a $7 \times 20 = 140 < 143 < 147 = 7 \times 21$: 7 ne divise pas 143.

Par 11. Enfin, $143 = 11 \times 13$. Le plus petit diviseur est 11 : il est premier, comme l'annonce l'existence d'un diviseur premier.

L'hypothèse compte. L'entier 1 n'a aucun diviseur supérieur ou égal à 2 : l'énoncé exige $n \geq 2$.

Reconnaître un nombre premier

Les diviseurs de 91 vont par paires : $91 = 1 \times 91 = 7 \times 13$. Dans la paire 7×13, le plus petit facteur vérifie $7^2 = 49 \leq 91$.

Pourquoi est-ce vrai ? Si n n'est pas premier, il s'écrit $n = p \times q$, où p est son plus petit diviseur supérieur ou égal à 2, et $2 \leq p \leq q$. Alors :

$$p^2 = p \times p \leq p \times q = n.$$

Pour tester n, il suffit donc des nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$.

Propriété : Reconnaître un nombre premier

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Si n n'est divisible par aucun nombre premier p tel que $p^2 \leq n$, alors n est premier.

Démonstration

Étape 1. Supposons par l'absurde que n n'est pas premier. Il a alors un diviseur e différent de 1 et de n. Comme 0 ne divise que 0, $e \neq 0$, donc $e \geq 2$; d'après les propriétés des diviseurs, $e \leq n$, donc $e < n$. Soit p le plus petit diviseur de n supérieur ou égal à 2 : d'après l'existence d'un diviseur premier, p est premier, et $p \leq e < n$.

Étape 2. Il existe un entier naturel q tel que $n = p \times q$. On a $q \neq 0$ car $n \neq 0$, et $q \neq 1$ car $p \neq n$; donc $q \geq 2$. Comme q divise n, le choix de p donne $p \leq q$.

Étape 3. Alors $p^2 = p \times p \leq p \times q = n$. Ainsi n est divisible par le nombre premier p, avec $p^2 \leq n$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc n est premier.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve combine les deux énoncés précédents. Si n n'est pas premier, son plus petit diviseur p supérieur ou égal à 2 est premier, et $n = p \times q$ avec $p \leq q$. Alors $p^2 \leq p \times q = n$.

Retiens la conséquence : un entier $n \geq 2$ qui n'est pas premier a un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$.

Vérifie : Le pas clé de l'étape 2

La preuve écrit $n = p \times q$. Quelle raison donne $p \leq q$?

A. q divise n et $q \geq 2$; or p est le plus petit de ces diviseurs.

Juste.

Juste : c'est le choix de p qui donne $p \leq q$.

B. Parce que p est premier et que q ne l'est jamais.

Faux.

Rien n'empêche q d'être premier : $143 = 11 \times 13$.

C. Parce que l'on sait déjà que $p^2 \leq n$.

Faux.

C'est la conclusion de la preuve : on ne peut pas s'en servir pour l'obtenir.

D. Parce qu'on écrit toujours le plus petit facteur en premier.

Faux.

Ici p est imposé : c'est le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2. Il faut montrer qu'il ne dépasse pas q.

Correction

D'après l'étape 2, $q \geq 2$ et q divise n. Or p est le plus petit diviseur de n supérieur ou égal à 2 : donc $p \leq q$.

L'étape 3 en déduit $p^2 \leq p \times q = n$.

La méthode, un exemple, puis à toi

Méthode : reconnaître si un entier est premier

1. **Liste** les nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$.
2. **Teste** chacun d'eux : critère de divisibilité, ou encadrement entre deux multiples.
3. **Conclus** : si l'un d'eux divise n, alors n n'est pas premier ; si aucun ne le divise, n est premier.

Exemple : un entier de trois chiffres

L'entier 211 est-il premier ? On a $13^2 = 169 \leq 211$ et $17^2 = 289 > 211$. On teste donc 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

Premier testé	Test	Conclusion
2	211 se termine par 1	ne divise pas
3	$2+1+1=4$	ne divise pas
5	211 se termine par 1	ne divise pas
7	$210<211<217$	ne divise pas
11	$209<211<220$	ne divise pas
13	$208<211<221$	ne divise pas

Aucun de ces nombres premiers ne divise 211. D'après la reconnaissance d'un nombre premier, 211 est premier.

L'hypothèse compte. Le test va jusqu'à $p^2 \leq n$, inégalité large : pour 49, il faut tester 7, car $7^2 = 49$. En s'arrêtant avant, on croirait 49 premier.

À toi : Premier ou non ?

L'entier 221 est-il premier ? Applique la méthode, en justifiant chaque test. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Cherche les nombres premiers p tels que $p^2 \leq 221$.
Indice 2
$13^2 = 169$ et $17^2 = 289$: teste 2, 3, 5, 7, 11 et 13.
Indice 3
Point délicat : ne t'arrête pas à 11 ; le dernier premier de la liste compte aussi.

Réponse
On a $13^2 = 169 \leq 221$ et $17^2 = 289 > 221$: on teste 2, 3, 5, 7, 11 et 13.

- L'entier 221 se termine par 1 : ni 2 ni 5 ne le divisent.
- La somme de ses chiffres vaut $2+2+1=5$: 3 ne le divise pas.
- $217 < 221 < 224$, avec $217 = 7 \times 31$ et $224 = 7 \times 32$: 7 ne le divise pas.
- $220 < 221 < 231$, avec $220 = 11 \times 20$ et $231 = 11 \times 21$: 11 ne le divise pas.
- $221 = 13 \times 17$: 13 divise 221.

Conclusion. 221 a le diviseur 13, différent de 1 et de 221 : 221 n'est pas premier.

Décomposer en produit de facteurs premiers

Les briques des entiers

En clair. On peut écrire $84 = 4 \times 21$, puis découper chaque facteur : $4 = 2 \times 2$ et $21 = 3 \times 7$. On obtient :

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7.$$

On ne peut plus découper : 2, 3 et 7 sont premiers. Les nombres premiers sont les **briques** qui fabriquent les entiers par multiplication.

Devine : Un autre découpage

On part maintenant de $84 = 6 \times 14$, et l'on découpe chaque facteur. Quels nombres premiers obtient-on ?

A. 2, 2, 3 et 7, comme avant.

Juste.
Juste : $6 = 2 \times 3$ et $14 = 2 \times 7$.

B. 2, 3, 7 et encore 7.

Faux.
Le produit 6×14 ne contient qu'un seul facteur 7.

C. 6 et 14, qui ne se découpent pas.

Faux.
$6 = 2 \times 3$ et $14 = 2 \times 7$ se découpent encore.

D. 2, 3 et 7, chacun une seule fois.

Faux.
Ce produit vaut 42, et non 84 : il manque un facteur 2.

Correction
On a $6 = 2 \times 3$ et $14 = 2 \times 7$, donc :

$$84 = 2 \times 3 \times 2 \times 7.$$

On retrouve les mêmes facteurs premiers, 2, 2, 3 et 7, dans un autre ordre. L'énoncé qui suit affirme que c'est toujours le cas.

Théorème : Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel $n \geq 2$ s'écrit comme un **produit de nombres premiers**. Cette écriture est **unique**, à l'ordre des facteurs près : c'est la **décomposition** de n en produit de facteurs premiers. Un nombre premier est sa propre décomposition.

On regroupe les facteurs égaux à l'aide de puissances. Par exemple, $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il garantit que tous les découpages d'un même entier mènent aux mêmes facteurs premiers. Tu peux donc commencer par le facteur que tu veux.

Décomposer pas à pas

Exemple : des divisions successives

Décomposons $1\,260$. On divise à chaque ligne par le plus petit nombre premier qui convient, jusqu'au quotient 1.

Nombre	Plus petit diviseur premier	Quotient
$1\,260$	2	630
630	2	315
315	3	105
105	3	35
35	5	7
7	7	1

Donc :

$$1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

Contrôle : $4 \times 9 \times 5 \times 7 = 1\,260$.

Méthode : décomposer en produit de facteurs premiers

1. **Divise** l'entier par le plus petit nombre premier qui le divise.
2. **Recommence** avec le quotient, jusqu'à obtenir 1.
3. **Écris** le produit des diviseurs premiers trouvés, en regroupant les facteurs égaux en puissances.
4. **Contrôle** en recalculant le produit.

Un carré parfait, puis à toi

Exemple : reconnaître un carré parfait

Un **carré parfait** est le carré d'un entier naturel, comme $49 = 7^2$.

Décomposons $1\,764$: on trouve $1\,764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$. Tous les exposants sont pairs. Rappel du collège : $(a \times b)^2 = a^2 \times b^2$. Donc :

$$1\,764 = (2 \times 3 \times 7)^2 = 42^2.$$

Au contraire, $1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ a deux exposants égaux à 1 : l'écriture ne montre pas de carré. Et ce n'en est pas un, car il est strictement compris entre deux carrés d'entiers consécutifs :

$$\begin{aligned} 35^2 = 1\,225 &< 1\,260 \\ &< 1\,296 = 36^2. \end{aligned}$$

Pourquoi cela suffit-il ? Soit m un entier naturel. Si $m \leq 35$, alors $m^2 \leq 35^2$; si $m \geq 36$, alors $m^2 \geq 36^2$. Aucun carré n'est strictement entre les deux.

Vérifie : Lequel est un carré parfait ?

Lequel de ces entiers est un carré parfait ?

A. $2^3 \times 3^2$

Faux.
L'exposant 3 est impair : 72 est entre $8^2 = 64$ et $9^2 = 81$.

B. $2^4 \times 5^2$

Juste.
Juste : $2^4 \times 5^2 = (2^2 \times 5)^2 = 20^2$.

C. $2^2 \times 3 \times 5^2$

Faux.
L'exposant de 3 vaut 1 : 300 est entre $17^2 = 289$ et $18^2 = 324$.

D. $3^2 \times 7^3$

Faux.
L'exposant 3 de 7 est impair : $3\,087$ est entre $55^2 = 3\,025$ et $56^2 = 3\,136$.

Correction
Seul $2^4 \times 5^2$ a tous ses exposants pairs :

$$\begin{aligned} 2^4 \times 5^2 &= (2^2 \times 5)^2 \\ &= 20^2 = 400. \end{aligned}$$

Les trois autres ont un exposant impair : leur écriture ne montre pas de carré. Chacun est strictement compris entre deux carrés d'entiers consécutifs :

- $8^2 = 64 < 72 < 81 = 9^2$;
- $17^2 = 289 < 300 < 324 = 18^2$;
- $55^2 = 3\,025 < 3\,087 < 3\,136 = 56^2$.

Ce ne sont donc pas des carrés parfaits, d'après l'encadrement entre deux carrés consécutifs.

À toi : Décomposer et conclure

Décompose 525 en produit de facteurs premiers. Est-ce un carré parfait ? Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : commence par le plus petit nombre premier qui divise 525.
Indice 2
525 est impair et $5+2+5=12$: 3 divise 525, et $525=3\times 175$.
Indice 3
Point délicat : 175 se divise deux fois de suite par 5 ; regroupe les facteurs égaux en une puissance.

Réponse
Décomposition. On a $525=3\times 175$, puis $175=5\times 35$ et $35=5\times 7$. Donc :

$$525=3\times 5^2\times 7.$$

Contrôle : $3\times 25\times 7=525$.

Carré parfait ? Les exposants de 3 et de 7 valent 1 : l'écriture ne montre pas de carré. De plus, 525 est strictement compris entre deux carrés d'entiers consécutifs :

$$\begin{aligned}22^2=484&<525\\&<529=23^2.\end{aligned}$$

Donc, d'après l'encadrement entre deux carrés consécutifs, aucun entier m ne vérifie $m^2=525$.

Conclusion. $525=3\times 5^2\times 7$, et 525 n'est pas un carré parfait.

PGCD et PPCM

Diviseurs communs, multiples communs

En clair. Reprends les sachets : 120 dattes et 84 amandes. Le nombre de sachets doit diviser 120 et diviser 84 : c'est un **diviseur commun** aux deux entiers. On cherche le plus grand.

D'autres problèmes demandent au contraire un **multiple commun**, le plus petit possible.

Devine : Le plus grand diviseur commun

Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Ceux de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30. Quel est le plus grand diviseur commun à 18 et 30 ?

A. 3

Faux.
3 est un diviseur commun, mais il y en a un plus grand.

B. 6

Juste.
Juste : 6 divise 18 et 30, et aucun diviseur commun ne le dépasse.

C. 18

Faux.

18 ne divise pas 30 : $18 \times 1 = 18$ et $18 \times 2 = 36$.

D. 90

Faux.

90 est un multiple commun, pas un diviseur commun.

Correction

Les diviseurs communs à 18 et 30 sont 1, 2, 3 et 6. Le plus grand est 6.

Devine : Le plus petit multiple commun

Les multiples non nuls de 4 sont 4, 8, 12, 16… Ceux de 6 sont 6, 12, 18… Quel est le plus petit multiple commun non nul de 4 et 6 ?

A. 2

Faux.

2 divise 4 et 6 : c'est un diviseur commun, pas un multiple commun.

B. 0

Faux.

0 est bien un multiple commun, mais on cherche un multiple non nul.

C. 12

Juste.

Juste : $12 = 3 \times 4 = 2 \times 6$, et aucun multiple commun non nul n'est plus petit.

D. 24

Faux.

$24 = 4 \times 6$ est un multiple commun, mais 12 en est un plus petit.

Correction

On lit les deux listes : le premier nombre qui figure dans les deux est 12. On a $12 = 3 \times 4$ et $12 = 2 \times 6$.

Le produit $4 \times 6 = 24$ est aussi un multiple commun, mais ce n'est pas le plus petit.

Définition : PGCD et PPCM de deux entiers

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- Le **plus grand commun diviseur** de a et b, noté $\mathrm{PGCD}(a ; b)$, est le plus grand des entiers naturels qui divisent à la fois a et b.

- Le **plus petit commun multiple** de a et b, noté $\mathrm{PPCM}(a;b)$, est le plus petit des entiers naturels **non nuls** qui sont à la fois des multiples de a et de b.

Exemple : par les listes

Cherchons $\mathrm{PGCD}(12;20)$ et $\mathrm{PPCM}(12;20)$.

- Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12 ; ceux de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10, 20. Les diviseurs communs sont 1, 2 et 4 : $\mathrm{PGCD}(12;20)=4$.
- Les multiples non nuls de 12 sont 12, 24, 36, 48, 60… ; ceux de 20 sont 20, 40, 60… Le premier commun est 60 : $\mathrm{PPCM}(12;20)=60$.

Le calcul par la décomposition

Propriété : Calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition

Soit a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. On écrit leurs décompositions avec les mêmes nombres premiers p_1, p_2, …, p_k, en acceptant l'exposant 0 :

$$a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad b = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}.$$

- $\mathrm{PGCD}(a;b)$ est le produit des facteurs p_i, chacun affecté du **plus petit** des deux exposants α_i et β_i.
- $\mathrm{PPCM}(a;b)$ est le produit des facteurs p_i, chacun affecté du **plus grand** des deux exposants α_i et β_i.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Il évite d'écrire de longues listes : les deux décompositions suffisent.

Dans l'énoncé, p_1 se lit « p indice un », α_1 « alpha indice un » et β_1 « bêta indice un » : ce sont des noms de nombres, comme a et b. Pour $1\,260$, dans l'exemple qui suit, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$ et $\alpha_1=2$.

Exemple : par la décomposition

On reprend $1\,260=2^2\times3^2\times5\times7$ et $525=3\times5^2\times7$. Rappel du collège : $2^0=1$. On écrit donc :

$$525=2^0\times3\times5^2\times7.$$

D'après le calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition :

- plus petits exposants : $\mathrm{PGCD}(1\,260;525)=2^0\times3\times5\times7=105$;

- plus grands exposants : $\mathrm{PPCM}(1\,260;525) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6\,300$.

La méthode et un piège

Méthode : calculer un PGCD et un PPCM

1. **Décompose** a et b en produits de facteurs premiers.
2. **Pour le PGCD**, garde les facteurs premiers communs, chacun avec son plus petit exposant.
3. **Pour le PPCM**, garde tous les facteurs premiers, chacun avec son plus grand exposant.
4. **Contrôle** : le PGCD divise a et b ; a et b divisent le PPCM.

Attention : quel exposant ?

✗ « $\mathrm{PGCD}(2^3 \times 3; 2 \times 3^2) = 2^3 \times 3^2$, car on garde les plus grands exposants. »

✓ Pour le PGCD, on garde le **plus petit** exposant : le PGCD vaut $2 \times 3 = 6$. Le plus grand exposant sert au PPCM, qui vaut $2^3 \times 3^2 = 72$.

Ici, les deux entiers sont 24 et 18. Remarque aussi que le PPCM n'est pas leur produit : $24 \times 18 = 432$.

Le produit du PGCD et du PPCM

Pour 24 et 18, on a trouvé $\mathrm{PGCD}(24;18) = 6$ et $\mathrm{PPCM}(24;18) = 72$. Compare leur produit à celui des deux entiers :

$$6 \times 72 = 432,$$
$$24 \times 18 = 432.$$

Pourquoi est-ce vrai ? Pour chaque facteur premier, le PGCD prend l'un des deux exposants, et le PPCM prend l'autre. Ensemble, ils retrouvent tous les facteurs de $a \times b$.

Propriété : Produit du PGCD et du PPCM

Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Alors

$$\mathrm{PGCD}(a;b) \times \mathrm{PPCM}(a;b) = a \times b.$$

Démonstration

Étape 1. Si $a = 1$: 1 n'a qu'un diviseur, 1, qui divise b, donc $\mathrm{PGCD}(1;b) = 1$. Les multiples communs de 1 et de b sont ceux de b ; un multiple non nul $k \times b$ a $k \geq 1$, donc $k \times b \geq b$: $\mathrm{PPCM}(1;b) = b$, et le produit vaut $1 \times b = a \times b$. De même si $b = 1$.

Étape 2. Sinon, $a \geq 2$ et $b \geq 2$. On écrit leurs décompositions avec les mêmes nombres premiers p_i. D'après le calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition, pour chaque p_i, le PGCD porte le plus petit et le PPCM le plus grand des exposants α_i et β_i.

Étape 3. Le plus petit et le plus grand de α_i et β_i ont pour somme $\alpha_i + \beta_i$. Comme $p_i^{\alpha_i} \times p_i^{\beta_i} = p_i^{\alpha_i+\beta_i}$, chaque p_i a l'exposant $\alpha_i + \beta_i$ dans les deux produits : ils sont égaux.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'idée clé : pour deux nombres, **le plus petit plus le plus grand égale leur somme**. Avec les exposants 3 et 1, on trouve $1 + 3 = 4$, comme $3 + 1$.

Avec la règle des puissances, par exemple $2^1 \times 2^3 = 2^4$, chaque facteur premier a donc le même exposant dans les deux produits.

Vérifie : L'exposant dans le produit

On a $8 = 2^3$ et $12 = 2^2 \times 3$, donc $\mathrm{PGCD}(8;12) = 2^2 = 4$ et $\mathrm{PPCM}(8;12) = 2^3 \times 3 = 24$. Dans le produit 4×24, quel exposant porte le facteur 2 ?

A. 2

Faux.
C'est l'exposant de 2 dans le PGCD seulement.

B. 3

Faux.
C'est l'exposant de 2 dans le PPCM seulement.

C. 6

Faux.
On ne multiplie pas les exposants : on les additionne.

D. 5

Juste.
Juste : $2^2 \times 2^3 = 2^5$, comme dans 8×12.

Correction
Le PGCD porte l'exposant 2, le plus petit de 3 et 2 ; le PPCM porte 3, le plus grand. Dans le produit, $2^2 \times 2^3 = 2^5$.

Dans $8 \times 12 = 2^3 \times 2^2 \times 3$, l'exposant de 2 vaut aussi $3 + 2 = 5$. On retrouve $4 \times 24 = 96 = 8 \times 12$.

Un contrôle, puis à toi

Exemple : déduire le PPCM du PGCD

Les diviseurs de 45 sont 1, 3, 5, 9, 15 et 45. Le plus grand qui divise aussi 60 est 15 : $\mathrm{PGCD}(45;60) = 15$.

D'après le produit du PGCD et du PPCM, $15 \times \mathrm{PPCM}(45;60) = 45 \times 60 = 2\,700$. Donc :

$$\mathrm{PPCM}(45;60) = \frac{2\,700}{15} = 180.$$

Contrôle : $180 = 4 \times 45 = 3 \times 60$.

L'hypothèse compte. Les deux entiers doivent être non nuls. Le seul multiple de 0 est 0 : 0 et 5 n'ont aucun multiple commun non nul.

À toi : Deux calculs, un contrôle

Décompose 98 et 140. Calcule $\mathrm{PGCD}(98;140)$ et $\mathrm{PPCM}(98;140)$, puis contrôle tes résultats par le produit. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose chaque entier par divisions successives.
Indice 2
$98 = 2 \times 7^2$ et $140 = 2^2 \times 5 \times 7$.
Indice 3
Point délicat : 5 est absent de la décomposition de 98 ; son exposant y vaut 0.

Réponse
Décompositions. On trouve $98 = 2 \times 7^2$ et $140 = 2^2 \times 5 \times 7$.

PGCD et PPCM. D'après le calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition :

$$\begin{aligned}&\mathrm{PGCD}(98;140)\\&= 2 \times 7 = 14,\\&\mathrm{PPCM}(98;140)\\&= 2^2 \times 5 \times 7^2\\&= 980.\end{aligned}$$

Contrôle. $14 \times 980 = 13\,720$ et $98 \times 140 = 13\,720$.

Conclusion. $\mathrm{PGCD}(98;140) = 14$ et $\mathrm{PPCM}(98;140) = 980$.

Résoudre des problèmes avec le PGCD et le PPCM

Retour aux sachets

Reviens aux sachets du début : 120 dattes, 84 amandes, des sachets identiques, sans reste. Tu as maintenant les outils pour répondre avec certitude.

Mais avant de calculer, reconnais la question : cherche-t-on un diviseur commun, ou un multiple commun ?

Devine : Que faut-il calculer ?

Deux lignes de bus partent ensemble de la gare routière à 6 h. L'une y repasse toutes les 16 minutes, l'autre toutes les 24 minutes. Pour savoir quand elles repartiront ensemble, que faut-il calculer ?

A. $\mathrm{PGCD}(16;24)$

Faux.

Le PGCD sert à partager en parts égales ; ici, on attend un instant commun.

B. 16×24

Faux.

C'est un multiple commun, mais pas forcément le premier.

C. $16+24$

Faux.

Après 40 minutes, la première ligne n'est pas à la gare : 40 n'est pas un multiple de 16.

D. $\mathrm{PPCM}(16;24)$

Juste.

Juste : on cherche le premier multiple commun non nul.

Correction

La première ligne repasse après 16, 32, 48… minutes ; la seconde après 24, 48… minutes. On cherche le premier multiple commun non nul de 16 et 24 : c'est leur PPCM.

Exemple : le partage des sachets

Le nombre de sachets divise 120 et divise 84 ; on le veut le plus grand possible. C'est donc $\mathrm{PGCD}(120;84)$.

On décompose : $120=2^3\times 3\times 5$ et $84=2^2\times 3\times 7$. D'après le calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition :

$$\mathrm{PGCD}(120;84)=2^2\times 3=12.$$

Chaque sachet contient $\dfrac{120}{12}=10$ dattes et $\dfrac{84}{12}=7$ amandes.

Conclusion. La coopérative prépare au plus 12 sachets.

La méthode et deux autres problèmes

Méthode : PGCD ou PPCM ?

1. **Pour partager** des quantités en paquets identiques, les plus nombreux possible et sans reste, calcule un PGCD.

2. **Pour trouver** quand des phénomènes réguliers se reproduisent ensemble pour la première fois, calcule un PPCM.
3. **Pour simplifier** une fraction, divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.
4. **Réponds** à la question posée par une phrase, avec l'unité.

Exemple : deux lignes de bus

Le soir, deux autres lignes partent ensemble de la gare routière à 18 h. L'une repasse toutes les 14 minutes, l'autre toutes les 21 minutes.

On décompose : $14 = 2 \times 7$ et $21 = 3 \times 7$. D'après le calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition :

$$\begin{aligned} \mathrm{PPCM}(14;21) &= 2 \times 3 \times 7 \\ &= 42. \end{aligned}$$

Contrôle : $42 = 3 \times 14 = 2 \times 21$.

Conclusion. Les deux lignes repartent ensemble pour la première fois 42 minutes plus tard, à 18 h 42.

Exemple : une fraction irréductible

La fraction $\dfrac{84}{120}$ compare les amandes aux dattes de la coopérative. Comme $\mathrm{PGCD}(84;120) = 12$, on divise le numérateur et le dénominateur par 12 :

$$\frac{84}{120} = \frac{7}{10}.$$

Le PGCD de 7 et de 10 vaut 1 : on ne peut plus simplifier. La fraction $\dfrac{7}{10}$ est **irréductible**.

À toi, puis le coin devoir

À toi : Choisir l'outil, puis résoudre

Deux situations. a) Une bibliothécaire range 105 contes et 75 bandes dessinées sur des étagères identiques, sans reste, avec le plus d'étagères possible. Combien d'étagères, et que porte chacune ? b) Deux coureurs partent ensemble de la ligne d'une piste. L'un boucle un tour en 9 minutes, l'autre en 12 minutes. Au bout de combien de minutes repassent-ils ensemble sur la ligne ? Pour chaque situation, dis d'abord si tu cherches un PGCD ou un PPCM. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pour chaque situation, demande-toi si le nombre cherché doit diviser les deux quantités, ou être un multiple des deux.

Indice 2

a) $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $75 = 3 \times 5^2$. b) $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$.

Indice 3

Point délicat : en a), on veut le plus grand diviseur commun ; en b), le plus petit multiple commun non nul.

Réponse

a) Choix de l'outil. Le nombre d'étagères divise 105 et 75, et on le veut le plus grand possible : c'est un PGCD.

Calcul. On a $105 = 3 \times 5 \times 7$ et $75 = 3 \times 5^2$. D'après le calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition :

$$\begin{aligned} \mathrm{PGCD}(105;75) &= 3 \times 5 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Réponse. Il y a 15 étagères, chacune avec $\dfrac{105}{15} = 7$ contes et $\dfrac{75}{15} = 5$ bandes dessinées.

b) Choix de l'outil. Le temps cherché est un multiple de 9 et de 12, le plus petit non nul : c'est un PPCM.

Calcul. On a $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$. D'après le même calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{PPCM}(9;12) &= 2^2 \times 3^2 \\ &= 36. \end{aligned}$$

Réponse. Les coureurs repassent ensemble sur la ligne au bout de 36 minutes.

Remarque : Coin devoir : rédiger un problème

En devoir, un problème se rédige en trois temps : le choix de l'outil, le calcul, la phrase réponse.

Pour les lignes du soir, écris : « On cherche le premier instant commun : c'est $\mathrm{PPCM}(14;21)$. D'après le calcul par la décomposition, il vaut 42. Les deux lignes repartent ensemble à 18 h 42. »

Justifie toujours le choix entre PGCD et PPCM.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir : quel outil pour quelle question

- **Montrer que a divise b** : écrire $b = k \times a$, en donnant l'entier naturel k.
- **Montrer que a ne divise pas b** : encadrer b entre deux multiples consécutifs de a.
- **Démontrer une parité** : annoncer les cas, écrire $2k$ ou $2k+1$, mettre 2 en facteur.

- **Reconnaître un nombre premier** : tester les nombres premiers p tels que $p^2 \leq n$.
- **Décomposer** : diviser par le plus petit diviseur premier, jusqu'au quotient 1.
- **PGCD et PPCM** : plus petits, puis plus grands exposants ; contrôle par le produit.
- **Problèmes** : un partage demande un PGCD ; la rencontre de phénomènes réguliers, un PPCM.

Le mot du prof. Tu viens d'écrire tes premières démonstrations : annoncer les cas, nommer chaque propriété, conclure. Garde ces réflexes pour toute l'année. Le chapitre suivant, sur les ensembles de nombres, part de $\mathbb{N}$ pour aller plus loin.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « L'ensemble $\mathbb{N}$ et notions d'arithmétique » (tc · sciences · mathematiques)