BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 2

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Calculatrice non programmable autorisée. Les quatre exercices sont indépendants. Chaque résultat doit être justifié, et la qualité de la rédaction est prise en compte.

Exercice 1 — 5 pts

Produit scalaire et relations métriques dans un triangle

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{CAB} = 60^\circ$ (l'unité de longueur est le centimètre). On note I le milieu du segment $[BC]$.

1 — 0,75 pts

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2 — 1 pts

Calculer BC^2 à l'aide du théorème d'Al-Kashi, puis en déduire la valeur exacte de la longueur BC.

3 — 1,25 pts

En utilisant le théorème de la médiane, calculer la longueur AI. Vérifier ensuite que $AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$ est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

4 — 1 pts

Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). En utilisant la définition du produit scalaire par la projection orthogonale, calculer AH, puis CH.

5 — 1 pts

Soit D le point du segment $[AC]$ tel que $AD = 2$. En écrivant $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, montrer que $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Que représente le point D pour le triangle ABC ? Calculer BD.

Exercice 2 — 4,5 pts

Ensembles de points définis par un produit scalaire

Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6$, et I le milieu du segment $[AB]$.

1 — 1 pts

En écrivant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$, montrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 9$.

2 — 1 pts

Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$. Vérifier qu'un point K tel que $(BK) \perp (AB)$ et $BK = 4$ appartient à (Γ).

3 — 1,25 pts

Soit E le point du segment $[AB]$ tel que $AE = 2$, et (Δ) l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 12$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$, puis montrer que $M \in (\Delta)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EM} = 0$. En déduire la nature de (Δ).

4 — 1,25 pts

Montrer que $IE = 1$. Déterminer le nombre de points communs à (Γ) et à (Δ) et, pour chacun d'eux, noté P, calculer la distance EP.

INDICE

Pour un point P de (Δ), appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle IEP.

Exercice 3 — 5,5 pts

Cube : parallélisme, section, orthogonalité et volume

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 4 cm : $ABCD$ et $EFGH$ sont deux faces opposées, et les arêtes $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont parallèles. On note I le milieu de l'arête $[EF]$ et J le milieu de l'arête $[FG]$.

On rappelle que le volume d'une pyramide d'aire de base $\mathcal{B}$ et de hauteur h est $\frac{1}{3}\,\mathcal{B} \times h$.

1 — 0,75 pts

Préciser, en justifiant, la position relative des droites (AB) et (GH), puis celle des droites (AE) et (BC).

INDICE

Pour (AE) et (BC), supposer qu'elles sont dans un même plan : ce plan serait (ABC) et contiendrait E.

2 — 1,25 pts

Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (EG), puis que (EG) est parallèle à (AC). En déduire que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

3 — 1,25 pts

Justifier que les points A, C, J et I sont coplanaires. En déduire la section du cube par le plan (ACI), sa nature, et calculer les longueurs AC, IJ, AI et CJ.

4 — 1,25 pts

Montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ACE). En déduire que les droites (BD) et (CE) sont orthogonales.

INDICE

Chercher deux droites sécantes du plan (ACE) orthogonales à (BD) : l'une est une diagonale de la face $ABCD$, l'autre une arête du cube.

5 — 1 pts

Calculer le volume de la pyramide de sommet B et de base le triangle FIJ, puis la fraction du volume du cube qu'il représente.

Exercice 4 — 5 pts

Série statistique : livres lus pendant les vacances

On a demandé à chacun des 40 élèves d'une classe combien de livres il avait lus pendant les vacances. Les réponses sont regroupées dans le tableau suivant.

Nombre de livres x_i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Effectif n_i	3	6	12	9	7	3

1 — 0,75 pts

Préciser la population étudiée, le caractère et sa nature. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants.

2 — 0,75 pts

Représenter cette série par un diagramme en bâtons, puis donner son mode.

3 — 0,75 pts

Calculer la fréquence de la valeur 2, puis la fréquence des élèves qui ont lu au moins 3 livres. Donner chacune sous forme de fraction irréductible, puis sous forme décimale.

4 — 0,75 pts

Déterminer la médiane M_e de la série, et interpréter le résultat.

5 — 1 pts

Calculer la moyenne $\overline{x}$ de la série, puis sa variance V et son écart type σ (valeur approchée de σ à 10^{-2} près).

INDICE

Compléter le tableau par les lignes $n_i x_i$ et $n_i x_i^2$, puis utiliser $V = \dfrac{\sum n_i x_i^2}{N} - \overline{x}^2$.

6.a — 0,5 pts

Déterminer le nombre d'élèves dont le nombre de livres lus appartient à l'intervalle $[\overline{x} - \sigma ; \overline{x} + \sigma]$, puis la fréquence correspondante, sous forme de fraction et sous forme décimale.

6.b — 0,5 pts

On suppose que chaque élève de la classe lit ensuite exactement deux livres de plus. Quelle est la moyenne de la nouvelle série ? Justifier que son écart type est le même que celui de la série initiale.

SOURCES

BURHAN