BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Calculatrice non programmable autorisée. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Justifiez chaque réponse et présentez vos calculs avec soin.

Exercice 1 — 5,25 pts

Droites dans un repère

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(-2;1)$, $B(2;3)$ et $C(4;-1)$.

1.a — 0,75 pts

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montrer, à l'aide d'un déterminant, que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1.b — 1 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB), puis son équation réduite.

2 — 0,5 pts

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par C et parallèle à (AB).

3.a — 1,5 pts

On considère la droite (Δ) d'équation $2x + y - 2 = 0$. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de (Δ) et une représentation paramétrique de (Δ). Montrer que (Δ) et (AB) sont sécantes, puis, à l'aide de cette représentation paramétrique, calculer les coordonnées de leur point d'intersection E.

3.b — 0,5 pts

Calculer les coordonnées du point d'intersection F des droites (Δ) et (D).

4 — 1 pts

Soit K le milieu du segment $[AC]$. Montrer que K appartient à (Δ) et que K est aussi le milieu de $[EF]$. En déduire la nature du quadrilatère $AECF$.

Exercice 2 — 4,5 pts

Racines et factorisation d'un polynôme

On considère le polynôme P défini, pour tout réel x, par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

1 — 0,5 pts

Calculer $P(3)$. Que peut-on en déduire pour le polynôme P ?

2 — 1 pts

Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-3)\left(ax^2 + bx + c\right)$.

INDICE

Développer le produit, ordonner suivant les puissances de x, puis identifier les coefficients avec ceux de $P(x)$.

3 — 1 pts

On pose $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Vérifier que -2 est une racine de Q, puis écrire $P(x)$ comme produit de trois polynômes du premier degré.

4 — 1,25 pts

Dresser le tableau de signes de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.

5 — 0,75 pts

Sans effectuer de division, déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$. En déduire le réel m pour lequel le polynôme $P(x) + m$ est divisible par $x + 1$.

Exercice 3 — 4,25 pts

Second degré, inéquation et système

On considère le trinôme $T(x) = 3x^2 - 5x - 2$. Les questions 3 et 4 sont indépendantes des deux premières.

1 — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $T(x) = 0$, puis factoriser $T(x)$.

2 — 1,5 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide d'un tableau de signes, l'inéquation $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x + 1} \geq 0$.

3 — 1 pts

Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $x - \sqrt{x} - 6 = 0$, en posant $X = \sqrt{x}$.

INDICE

L'équation en X est du second degré ; ne garder que les solutions X positives ou nulles, puisque $X = \sqrt{x}$.

4 — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, par la méthode du déterminant, le système (Σ) : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 4y = 8 \end{cases}$

Exercice 4 — 6 pts

Calcul trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$; on note $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I. Les questions 3, 4, 5 et 6 sont indépendantes.

1 — 0,5 pts

Convertir 135° en radians, et $\dfrac{7\pi}{12}$ rad en degrés.

2.a — 1 pts

Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points M et N de $(\mathcal{C})$ d'abscisses curvilignes respectives $\dfrac{29\pi}{6}$ et $-\dfrac{17\pi}{4}$, puis placer M et N sur le cercle.

2.b — 0,5 pts

Calculer alors le cosinus et le sinus de chacun des réels $\dfrac{29\pi}{6}$ et $-\dfrac{17\pi}{4}$.

3 — 1,25 pts

Soit x un réel de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ tel que $\sin x = \dfrac{3}{5}$. Calculer $\cos x$ et $\tan x$.

4 — 1 pts

Simplifier, pour tout réel x, l'expression $A(x) = \cos(\pi - x) + 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - \sin(\pi + x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, puis calculer $A\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5 — 1 pts

Calculer $S = \cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $T = \sin^2\dfrac{\pi}{8} + \sin^2\dfrac{3\pi}{8}$.

INDICE

Écrire $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$.

6 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel x, $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.

INDICE

Factoriser $\cos^4 x - \sin^4 x$ comme une différence de deux carrés.

SOURCES

BURHAN