BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. Calculatrice non programmable autorisée. Les quatre exercices sont indépendants. Toute réponse doit être justifiée ; la clarté de la rédaction entre dans l'appréciation.

Exercice 1 — 5 pts

Équations trigonométriques et angles inscrits

Les questions 1, 2 et 3 utilisent le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ de centre O, associé à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. La question 4 est une question de géométrie, indépendante des autres.

1 — 0,75 pts

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$, puis placer les points images des solutions sur le cercle $(\mathcal{C})$.

2 — 1,25 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis donner ses solutions dans l'intervalle $[0;2\pi[$ et placer leurs points images sur le cercle $(\mathcal{C})$.

3 — 1 pts

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $2\cos x + 1 > 0$. Représenter l'ensemble des solutions sur le cercle $(\mathcal{C})$.

4.a — 1 pts

Soit (Γ) un cercle de centre O. On place sur (Γ) quatre points A, B, C et D, dans cet ordre, de sorte que $ABCD$ soit un quadrilatère convexe, avec $\widehat{AOB} = 100°$ ($\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc AB ne contenant ni C ni D) et $\widehat{ABC} = 80°$. Calculer $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ en justifiant.

4.b — 1 pts

Calculer $\widehat{ADC}$, puis la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOC}$.

Exercice 2 — 5 pts

Parité, taux de variation et extremums

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$, et l'on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 — 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis montrer que f est impaire.

2 — 1 pts

Calculer $f(2)$, puis montrer que, pour tout réel x, $1 - f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, puis, à l'aide de la question 1, que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

3.a — 1,25 pts

Montrer que, pour tous réels distincts a et b, le taux de variation de f entre a et b est $T(a,b) = \dfrac{4(4-ab)}{(a^2+4)(b^2+4)}$.

INDICE

Réduire $f(a) - f(b)$ au même dénominateur, puis mettre $a-b$ en facteur dans le numérateur.

3.b — 1,25 pts

En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[0;2]$, puis sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

4 — 1 pts

En utilisant la parité de f, en déduire ses variations sur $]-\infty;0]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 — 5 pts

Parabole, hyperbole et résolution graphique

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 — 0,75 pts

Écrire $f(x)$ sous forme canonique. En déduire la nature de $(\mathcal{C}_f)$, ses éléments caractéristiques et les réels en lesquels f s'annule.

2 — 0,75 pts

Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, dresser son tableau de variations et préciser son extremum.

3 — 0,75 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_g de g, puis montrer que, pour tout x de D_g, $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x-1}$. Quelle est la nature de $(\mathcal{C}_g)$? Préciser son centre Ω.

4 — 1 pts

Montrer que, pour tous réels distincts a et b d'un même intervalle de D_g, $\dfrac{g(a)-g(b)}{a-b} = \dfrac{2}{(a-1)(b-1)}$. En déduire les variations de g et son tableau de variations.

5 — 0,75 pts

Les points $A(0;3)$, $S(2;-1)$ et $B(3;0)$ appartiennent à $(\mathcal{C}_f)$ et à $(\mathcal{C}_g)$: le vérifier pour B, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le repère.

6 — 1 pts

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. Vérifier ensuite que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x(x-2)(x-3)}{x-1}$, et retrouver le résultat par un tableau de signes.

INDICE

Factoriser $f(x)$ à l'aide de ses zéros, puis mettre $x-3$ en facteur dans $f(x) - g(x)$.

Exercice 4 — 5 pts

Homothétie, symétrie centrale et translation

Soit ABC un triangle, et I, J, K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit G le centre de gravité du triangle ABC : on rappelle que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. On note h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1 — 1 pts

Montrer que $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. En déduire l'image du point A par h.

2 — 1 pts

On admet de même que $h(B) = J$ et $h(C) = K$. Déterminer l'image du segment $[BC]$ par h. En déduire que les droites (JK) et (BC) sont parallèles et que $JK = \frac{1}{2}BC$.

3 — 1 pts

Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC, de centre O et de rayon R. Déterminer l'image (Γ') de (Γ) par h et montrer qu'elle passe par I, J et K. Justifier que les points O, G et Ω sont alignés.

4 — 1 pts

Soit D le symétrique de A par rapport à I. En utilisant la symétrie centrale de centre I, montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABDC$, puis l'image de C par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

5 — 1 pts

Déterminer l'image de la droite (AC) par la translation t. Montrer ensuite que $h(D) = A$.

INDICE

Exprimer $\overrightarrow{GD}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, en passant par le point I, milieu de $[AD]$.

SOURCES

BURHAN