BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	2h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : deux heures. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Les quatre exercices sont indépendants. Toute réponse doit être justifiée ; la clarté de la rédaction et la précision des calculs entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 5 pts

Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Les questions 1, 2, 3 et 4 de cet exercice sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

Décomposer les entiers 756 et $1\,260$ en produits de facteurs premiers.

1.b — 0,75 pts

En déduire $\mathrm{PGCD}(756 ; 1\,260)$ et $\mathrm{PPCM}(756 ; 1\,260)$, puis vérifier que leur produit est égal à $756 \times 1\,260$.

1.c — 0,75 pts

Écrire la fraction $\dfrac{756}{1\,260}$ sous forme irréductible, puis calculer $\dfrac{1}{756} + \dfrac{1}{1\,260}$ en utilisant le PPCM.

2 — 1 pts

Le nombre 431 est-il premier ? Même question pour le nombre 437.

3 — 1 pts

Soit n un entier naturel. Montrer que le nombre $n^2 + 3n + 6$ est pair, en distinguant les cas n pair et n impair. En déduire que l'équation $n^2 + 3n = 1\,001$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}$.

4 — 0,75 pts

Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 2$ divise $3n + 13$.

INDICE

Écrire $3n + 13 = 3(n + 2) + 7$: un diviseur commun de deux entiers divise leur différence.

Exercice 2 4,75 pts

Vecteurs, alignement et projection

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment $[BC]$. On définit les points E et F par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}.$$

1 0,75 pts

Faire une figure et placer les points E, F et I. Exprimer $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2.a 0,75 pts

Montrer que $\overrightarrow{EI} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

2.b 1 pts

Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis montrer que les points E, I et F sont alignés.

3.a 1 pts

On note P le projeté du point I sur la droite (AC) parallèlement à la droite (AB). Déterminer les projetés de B et de C sur (AC) parallèlement à (AB), puis montrer que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3.b 1,25 pts

La parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en Q. En utilisant le théorème de Thalès sous sa forme vectorielle, montrer que $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, puis exprimer $\overrightarrow{EQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

INDICE

La parallèle à (BC) passant par E définit une projection sur (AC) : quels sont les projetés de A et de B ?

Exercice 3 — 4,25 pts

Ensembles de nombres, racines et puissances

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1 — 1,25 pts

On considère les nombres $a = \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $b = -\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$, $c = \dfrac{7}{40}$ et $d = \dfrac{5}{12}$. Pour chacun, donner, en justifiant, le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ auquel il appartient.

INDICE

Pour d, supposer $\dfrac{5}{12} = \dfrac{m}{10^n}$, écrire $5 \times 10^n = 12m$ et regarder les facteurs premiers des deux membres.

2 — 0,75 pts

Développer et simplifier $E = \left(2\sqrt{3} - 1\right)^2 + 4\sqrt{3}$. À quel ensemble de nombres appartient E ?

3 — 0,75 pts

On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Montrer, par l'absurde, que le nombre $3 - 5\sqrt{2}$ est irrationnel.

4 — 0,75 pts

Écrire le nombre $F = \dfrac{2^5 \times 9^3 \times 5^{-2}}{6^4 \times 10^{-1}}$ sous la forme d'une fraction irréductible, puis sous forme décimale.

5 — 0,75 pts

Donner l'écriture scientifique du nombre $G = \dfrac{0{,}000\,42 \times 3 \times 10^8}{6 \times 10^{-3}}$.

Exercice 4 — 6 pts

Ordre, encadrements et valeur absolue

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1 — 1 pts

Soit x et y deux réels tels que $2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 2$. Encadrer $2x - 3y$ et xy.

2 — 0,75 pts

Comparer les réels $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ et $2\sqrt{5}$.

3.a — 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 3| \leq 2$, puis interpréter le résultat en termes de distance et le représenter sur une droite graduée.

3.b — 1 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x + 1| > 3$, et représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

4 — 1 pts

On donne $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$. Encadrer $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, puis donner, pour chacun de ces deux nombres, la valeur approchée à 10^{-3} près qui est le centre de son encadrement.

INDICE

Pour encadrer une différence, encadrer d'abord $-\sqrt{2}$, en changeant le sens des inégalités.

5 — 1,5 pts

Soit x un réel de l'intervalle $[1; 3]$. Montrer que $\left|x^2 - 4\right| \leq 5\,|x - 2|$. En déduire que, si de plus $|x - 2| \leq 10^{-2}$, alors $\left|x^2 - 4\right| \leq 5 \times 10^{-2}$.

SOURCES

BURHAN