BURHAN

Calcul vectoriel dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-vectoriel-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul vectoriel dans le plan	Niveau examen	5

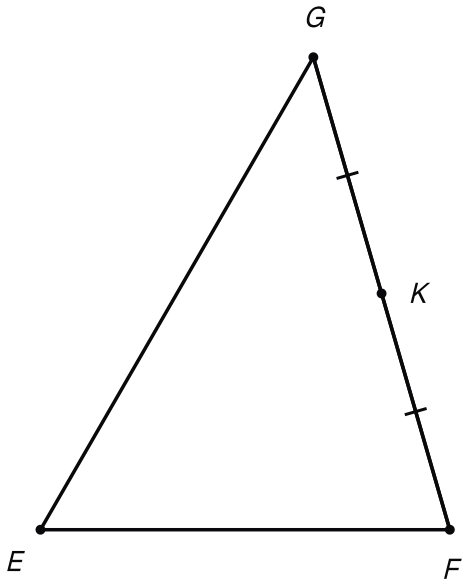
Exercice 1 — 5 pts

Trois points alignés dans un triangle

EFG est un triangle, et K est le milieu de $[FG]$. Les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{EP} = 2\,\overrightarrow{EF},$$
$$\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EG}.$$

Fais la figure sur ton cahier ; tu la compléteras au fil des questions.



Le triangle EFG de départ, avec le point K placé au milieu du côté [FG].

1. — 1 pts

a) Écrire $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{EP}$. Que représente F pour le segment $[EP]$? b) Donner l'abscisse de Q dans le repère (E, G), puis situer Q. c) Construire P et Q sur ta figure, avec $EF = 3$ cm et $EG = 4$ cm.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, puis la définition de l'abscisse. **Début :** multiplie l'égalité qui définit P par $\frac{1}{2}$. **Ensuite :** pour construire, reporte les longueurs à partir de E.

2. — 1 pts

a) Utiliser le milieu K de $[FG]$ pour écrire $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{EK}$. b) En déduire $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

INDICE

Outil : la caractérisation du milieu valable pour tout point du plan, ici le point E.

3. 1,5 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$, en passant par le point E. b) Exprimer de même $\overrightarrow{PK}$. c) Vérifier que $\overrightarrow{PK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis les règles de calcul. **Début :** $\overrightarrow{PE} = -2\overrightarrow{EF}$. **Point délicat :** pour la vérification, calcule séparément les deux coefficients de $\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$.

4. 1 pts

a) En déduire que les points P, K, Q sont alignés, en citant la propriété utilisée. b) Donner l'abscisse de K dans le repère (P, Q) et situer K par rapport au segment $[PQ]$.

INDICE

Outil : la propriété d'alignement de trois points, puis la propriété « abscisse, segment et demi-droite ».

5. 0,5 pts

a) On suppose que $PQ = 8$ cm. Calculer PK. b) En déduire KQ.

INDICE

Début : K est sur $[PQ]$: quelle fraction de PQ vaut PK ?

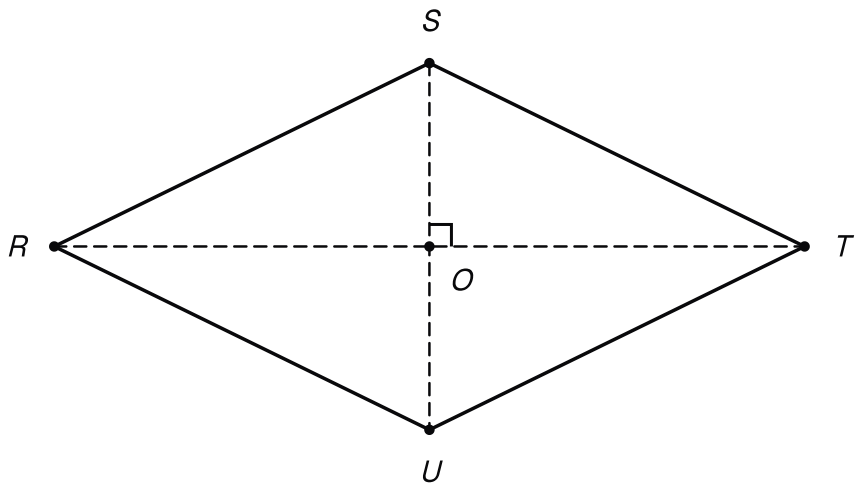
Exercice 2 — 5 pts

Un losange caché dans un losange

$RSTU$ est un losange de centre O. Rappel du collège : ses diagonales $[RT]$ et $[SU]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu O ; réciproquement, un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Les points M et N sont définis par :

$$\overrightarrow{RM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{TN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{TR}.$$



Le losange RSTU et ses deux diagonales perpendiculaires, qui se croisent en son centre O.

1. — 1 pts

a) Écrire $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$. b) En déduire $\overrightarrow{RM}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, pour le segment $[RT]$.

2. — 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{RN}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$, en passant par le point T. b) En déduire $\overrightarrow{RN}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Point délicat :** $\overrightarrow{TR} = -\overrightarrow{RT}$.

3. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$. b) En déduire que O est le milieu du segment $[MN]$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par R. **Ensuite :** calcule $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ et choisis la bonne caractérisation du milieu.

4. 1 pts

a) Quel est le milieu du segment $[SU]$? b) En déduire la nature du quadrilatère $SMUN$. c) Préciser cette nature à l'aide des diagonales du losange $RSTU$.

INDICE

Outil : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. **Point délicat :** les points M et N sont sur la droite (RT).

5. 1 pts

a) Donner l'abscisse de M, de O et de N dans le repère (R,T). b) Ranger les points R, M, O, N, T dans l'ordre où on les rencontre en allant de R vers T.

INDICE

Outil : la définition de l'abscisse dans le repère (R,T).

Exercice 3 — 5 pts

Le trajet d'un bateau

Un bateau part d'un port P. Sur la carte, on décrit ses déplacements à l'aide de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires :

- il va d'abord jusqu'à une bouée Q, avec $\overrightarrow{PQ} = 2\,\vec{u}$;
- il rejoint ensuite une île R, avec $\overrightarrow{QR} = 3\,\vec{v}$;
- enfin, il atteint un phare S, avec $\overrightarrow{RS} = -\vec{u} + \vec{v}$.

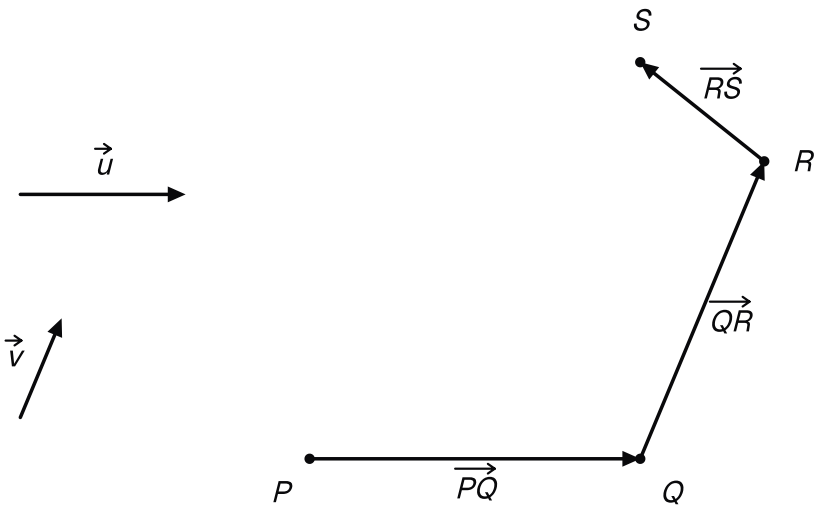


Schéma du trajet du bateau : trois déplacements successifs, du port P à la bouée Q, puis à l'île R, puis au phare S, décrits à l'aide des vecteurs u et v.

1. — 1,5 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. b) Exprimer de même $\overrightarrow{PS}$. c) Une balise B est telle que $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$. Comparer $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PB}$, puis préciser la position des droites (QR) et (PB), en citant la propriété.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Début :** pour $\overrightarrow{PS}$, réutilise le résultat du a). **Ensuite :** pour c), écris $\overrightarrow{QR}$ à l'aide de $\overrightarrow{PB}$.

2. — 1,5 pts

Un canot part du port et va en ligne droite jusqu'au point T tel que $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$. a) Comparer $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PT}$. b) En déduire que P, T, S sont alignés. c) Préciser la position de T par rapport au segment $[PS]$.

INDICE

Outil : les règles de calcul, puis la propriété d'alignement de trois points. **Point délicat :** pour c), écris $\overrightarrow{PT}$ comme une fraction de $\overrightarrow{PS}$.

3. 1 pts

Après le phare, le bateau rejoint un point L, avec $\overrightarrow{SL} = 2\,\vec{u} + 8\,\vec{v}$. a) Exprimer $\overrightarrow{PL}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. b) Vérifier que $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PS}$. c) En déduire l'abscisse de S dans le repère (P, L), puis situer S.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par S. **Point délicat :** l'abscisse de S se lit sur $\overrightarrow{PS}$ écrit en fonction de $\overrightarrow{PL}$.

4. 1 pts

a) Donner l'abscisse de T dans le repère (P, L). b) Sur la carte, $PL = 12$ cm. Calculer PS et PT.

INDICE

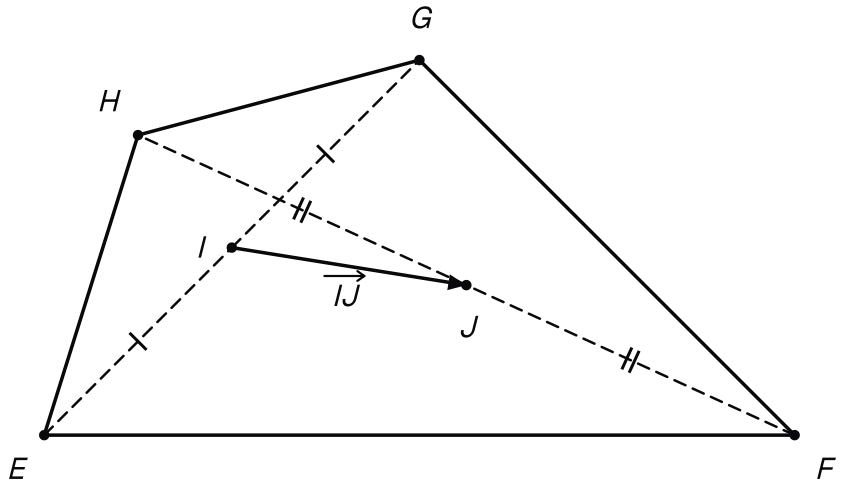
Outil : les règles de calcul.

Exercice 4 5 pts

Le vecteur joignant les milieux des diagonales

$EFGH$ est un quadrilatère quelconque. Le point I est le milieu de la diagonale $[EG]$, et le point J est le milieu de la diagonale $[FH]$.

Fais la figure sur ton cahier : en général, I et J sont deux points distincts.



Un quadrilatère quelconque EFGH, ses deux diagonales et leurs milieux I et J, reliés par le vecteur IJ.

1. 1 pts

a) Décomposer $\overrightarrow{EF}$ par la relation de Chasles, en passant par le point I. b) Décomposer de même $\overrightarrow{GH}$, en passant par le point I.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, avec I comme point intermédiaire.

2. 1,5 pts

a) Le point I est le milieu de $[EG]$: que vaut $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}$? En déduire $\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GI}$. b) Utiliser le milieu J de $[FH]$ pour écrire $\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IH}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{IJ}$. c) En déduire $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu. **Point délicat :** pour b), la caractérisation valable pour tout point du plan s'applique ici au point I et au segment $[FH]$.

3. 1,5 pts

a) Par la même méthode, en passant par I, écrire $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$. b) En déduire que $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}$. c) Retrouver cette égalité sans passer par I ni J : simplifier $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{GF}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles et la question 2. **Point délicat :** pour c), change chaque soustraction en somme de l'opposé, puis réordonne les vecteurs pour qu'ils s'enchaînent. **Ensuite :** les quatre vecteurs obtenus font le tour du quadrilatère.

4. 1 pts

Dans cette question, on suppose que $\overrightarrow{EF}=3\,\overrightarrow{HG}$. a) Écrire $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{HG}$, puis en déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{HG}$. b) En déduire que les droites (IJ) et (EF) sont parallèles, en citant la propriété.

INDICE

Outil : les règles de calcul et la question 2, puis la propriété « colinéarité et parallélisme ». **Point délicat :** $\overrightarrow{GH}=-\overrightarrow{HG}$; pour b), vérifie d'abord que $I\neq J$ et $E\neq F$.

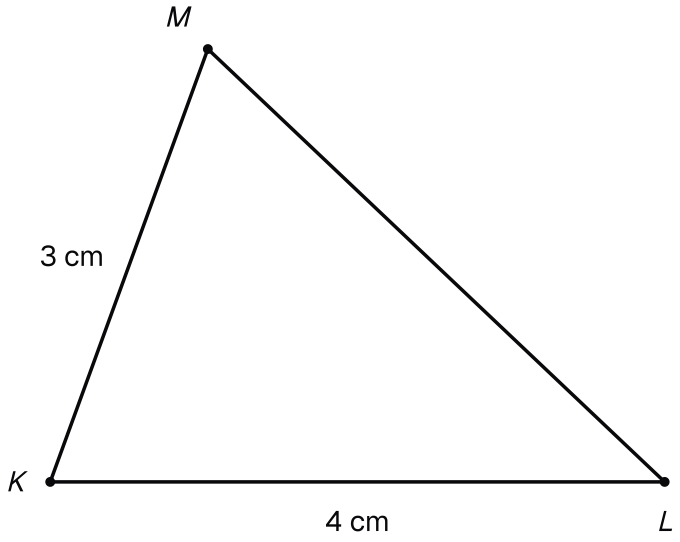
Exercice 5 — 5 pts

Un parallélogramme construit sur un triangle

KLM est un triangle, avec $KL = 4$ cm et $KM = 3$ cm. Les points N et P sont définis par :

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM},$$
$$\overrightarrow{KP} = 2\,\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}.$$

Trace la figure sur ton cahier, puis complète-la à chaque question.



Le triangle KLM de départ, avec les longueurs des côtés [KL] et [KM].

1. — 1,5 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{LN}$ en fonction de $\overrightarrow{KM}$, en passant par le point K. b) En déduire la nature du quadrilatère $KMNL$. c) Construire le point P : placer d'abord le point E tel que $\overrightarrow{KE} = 2\,\overrightarrow{KL}$, puis le point P à partir de E.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis la définition de l'égalité de deux vecteurs. **Point délicat :** pour c), écris $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EP}$ et compare avec la définition de P.

2. — 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{LP}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$, en passant par le point K. b) Exprimer de même $\overrightarrow{ML}$. c) En déduire que L est le milieu du segment $[MP]$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis la définition vectorielle du milieu. **Début :** $\overrightarrow{LK} = -\overrightarrow{KL}$.

3. 1,5 pts

Le point Q est le milieu du segment $[NP]$. a) Exprimer $\overrightarrow{KQ}$ en fonction de $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KP}$, en passant par le point N. b) En déduire $\overrightarrow{KQ}$ en fonction du seul vecteur $\overrightarrow{KL}$, puis l'abscisse de Q dans le repère (K, L). c) Situer Q par rapport au segment $[KL]$, puis calculer KQ et LQ.

INDICE

Outil : la relation de Chasles et les caractérisations du milieu. **Début :** $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$, puis $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP}$. **Point délicat :** une abscisse peut être supérieure à 1.

4. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{LQ}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$. b) En déduire l'abscisse de K dans le repère (L, Q), puis préciser si K appartient à la demi-droite $[LQ)$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis la définition de l'abscisse. **Point délicat :** écris $\overrightarrow{LK}$ comme un multiple de $\overrightarrow{LQ}$.