BURHAN

Calcul vectoriel dans le plan : exercices, niveau examen

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-vectoriel-dans-le-plan/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul vectoriel dans le plan	Niveau examen	5

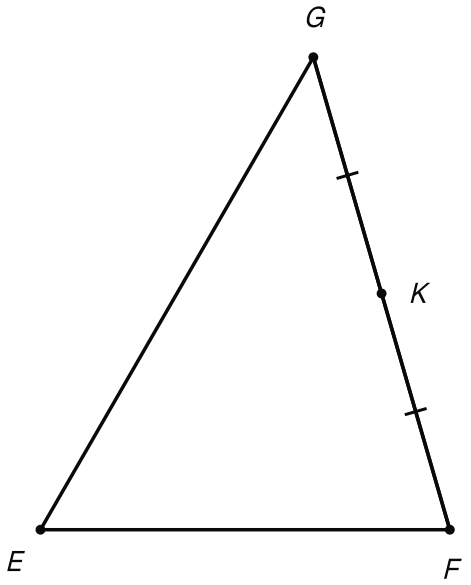
Exercice 1 5 pts

Trois points alignés dans un triangle

EFG est un triangle, et K est le milieu de $[FG]$. Les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{EP} = 2\,\overrightarrow{EF},$$
$$\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EG}.$$

Fais la figure sur ton cahier ; tu la compléteras au fil des questions.



Le triangle EFG de départ, avec le point K placé au milieu du côté [FG].

1. 1 pts

a) Écrire $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{EP}$. Que représente F pour le segment $[EP]$? b) Donner l'abscisse de Q dans le repère (E, G), puis situer Q. c) Construire P et Q sur ta figure, avec $EF = 3$ cm et $EG = 4$ cm.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, puis la définition de l'abscisse. **Début :** multiplie l'égalité qui définit P par $\frac{1}{2}$. **Ensuite :** pour construire, reporte les longueurs à partir de E.

CORRIGÉ

a) On multiplie par $\frac{1}{2}$ les deux membres de $\overrightarrow{EP} = 2\,\overrightarrow{EF}$ (règles de calcul) :

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EP}.$$

D'après les caractérisations vectorielles du milieu, F est le milieu de $[EP]$.

b) D'après la définition de l'abscisse, Q a pour abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère (E, G). Comme $0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$, la propriété « abscisse, segment et demi-droite » place Q sur le segment $[EG]$, avec $EQ = \frac{2}{3} \times EG$.

c) Le point P est sur la demi-droite $[EF)$, au-delà de F, avec $EP = 2 \times 3 = 6$ cm. Le point Q est sur le segment $[EG]$, avec $EQ = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$ cm, soit environ $2{,}7$ cm.

Conclusion. F est le milieu de $[EP]$; Q, d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère (E, G), est sur le segment $[EG]$; on construit P à 6 cm de E et Q à environ $2{,}7$ cm de E.

2. 1 pts

a) Utiliser le milieu K de $[FG]$ pour écrire $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{EK}$. b) En déduire $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.

INDICE

Outil : la caractérisation du milieu valable pour tout point du plan, ici le point E.

CORRIGÉ

a) Le point K est le milieu de $[FG]$. La caractérisation vectorielle du milieu qui vaut pour n'importe quel point du plan, prise au point E, donne :

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = 2\,\overrightarrow{EK}.$$

b) On multiplie les deux membres par $\frac{1}{2}$ (règles de calcul) :

$$\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EG}.$$

Conclusion. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = 2\,\overrightarrow{EK}$, d'où $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EG}$.

3. 1,5 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$, en passant par le point E. b) Exprimer de même $\overrightarrow{PK}$. c) Vérifier que $\overrightarrow{PK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis les règles de calcul. **Début :** $\overrightarrow{PE} = -2\overrightarrow{EF}$. **Point délicat :** pour la vérification, calcule séparément les deux coefficients de $\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par E, avec $\overrightarrow{PE} = -\overrightarrow{EP} = -2\overrightarrow{EF}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EQ} \\ &= -2\overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EG}.\end{aligned}$$

b) De même, avec la question 2, puis les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PK} &= \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EK} \\ &= -2\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \\ &\quad + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}.\end{aligned}$$

c) On calcule séparément les deux coefficients de $\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$ (règles de calcul) : $\frac{3}{4} \times (-2) = -\frac{3}{2}$ et $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Donc :

$$\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}.$$

C'est l'écriture de $\overrightarrow{PK}$ trouvée au b).

Conclusion. Les écritures obtenues donnent bien $\overrightarrow{PK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$.

4. 1 pts

a) En déduire que les points P, K, Q sont alignés, en citant la propriété utilisée. b) Donner l'abscisse de K dans le repère (P, Q) et situer K par rapport au segment $[PQ]$.

INDICE

Outil : la propriété d'alignement de trois points, puis la propriété « abscisse, segment et demi-droite ».

CORRIGÉ

a) Vérifions d'abord que $P \neq Q$. Si $\overrightarrow{PQ}$ était nul, on aurait $\frac{2}{3}\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$, soit $\overrightarrow{EG} = 3\overrightarrow{EF}$: les points E, F, G seraient alignés, ce qui contredit l'hypothèse « EFG est un triangle ».

D'après la question 3, $\overrightarrow{PK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$: les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{PQ}$, de même origine P, sont colinéaires. D'après la propriété d'alignement de trois points, P, K, Q sont alignés.

b) D'après la définition de l'abscisse, K a pour abscisse $\frac{3}{4}$ dans le repère (P, Q). Comme $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$, la propriété « abscisse, segment et demi-droite » place K sur le segment $[PQ]$.

Conclusion. Les points P, K, Q sont alignés ; K, d'abscisse $\frac{3}{4}$ dans le repère (P, Q), est sur le segment $[PQ]$.

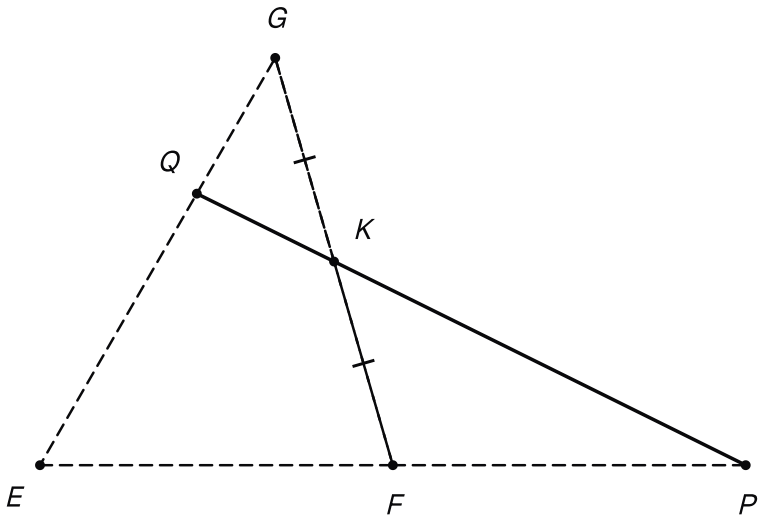


Figure complète : P prolonge [EF] au double, Q est aux deux tiers de [EG], et K se trouve sur le segment [PQ], aux trois quarts en partant de P.

5. 0,5 pts

a) On suppose que $PQ = 8$ cm. Calculer PK. b) En déduire KQ.

INDICE

Début : K est sur $[PQ]$: quelle fraction de PQ vaut PK ?

CORRIGÉ

a) Le point K est sur $[PQ]$, avec $\overrightarrow{PK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$ et $\frac{3}{4} > 0$. D'après la définition du produit par un réel, $PK = \frac{3}{4} \times 8 = 6$ cm.

b) Comme K est entre P et Q, $KQ = PQ - PK = 8 - 6 = 2$ cm.

Conclusion. $PK = 6$ cm et $KQ = 2$ cm.

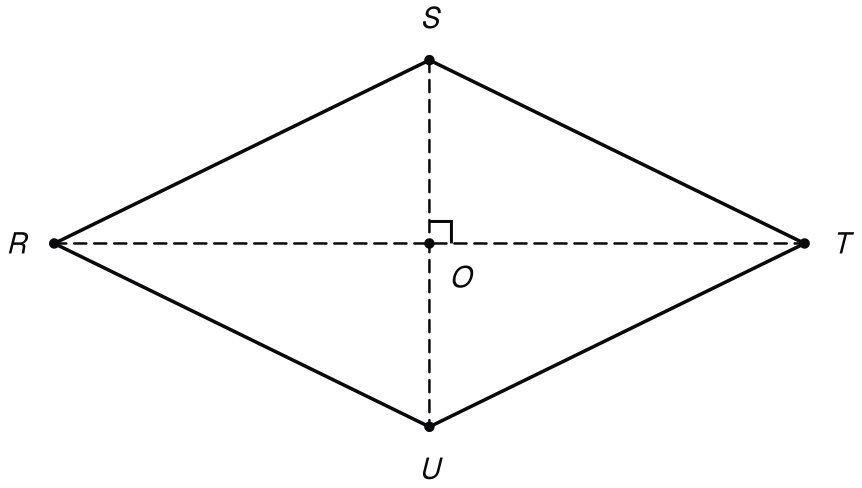
Exercice 2 — 5 pts

Un losange caché dans un losange

$RSTU$ est un losange de centre O. Rappel du collège : ses diagonales $[RT]$ et $[SU]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu O ; réciproquement, un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Les points M et N sont définis par :

$$\overrightarrow{RM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{TN} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{TR}.$$



Le losange RSTU et ses deux diagonales perpendiculaires, qui se croisent en son centre O.

1. — 1 pts

a) Écrire $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$. b) En déduire $\overrightarrow{RM}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, pour le segment $[RT]$.

CORRIGÉ

a) Le point O est le milieu de $[RT]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, $\overrightarrow{RO} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{RT}$; on multiplie par 2 :

$$\overrightarrow{RT} = 2\,\overrightarrow{RO}.$$

b) On remplace dans la définition de M ; d'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RM} &= \frac{1}{3} \times 2\,\overrightarrow{RO} \\ &= \frac{2}{3}\,\overrightarrow{RO}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{RT} = 2\,\overrightarrow{RO}$ et $\overrightarrow{RM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{RO}$.

2. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{RN}$ en fonction de $\overrightarrow{RT}$, en passant par le point T. b) En déduire $\overrightarrow{RN}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Point délicat :** $\overrightarrow{TR} = -\overrightarrow{RT}$.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par T, avec $\overrightarrow{TN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{TR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{RT}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RN} &= \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TN} \\ &= \overrightarrow{RT} - \frac{1}{3}\overrightarrow{RT} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{RT}.\end{aligned}$$

b) Avec la question 1 et les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RN} &= \frac{2}{3} \times 2\,\overrightarrow{RO} \\ &= \frac{4}{3}\overrightarrow{RO}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{RN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RT}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{RN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{RO}$.

3. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{RO}$. b) En déduire que O est le milieu du segment $[MN]$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par R. **Ensuite :** calcule $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ et choisis la bonne caractérisation du milieu.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par R, avec $\overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{RO}$ et les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RM}\\&=-\overrightarrow{RO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{RO}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{RO},\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RN}\\&=-\overrightarrow{RO}+\frac{4}{3}\overrightarrow{RO}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{RO}.\end{aligned}$$

b) On additionne les deux résultats :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\\&=-\frac{1}{3}\overrightarrow{RO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{RO}\\&=\vec{0}.\end{aligned}$$

D'après les caractérisations vectorielles du milieu, O est le milieu de $[MN]$.

Conclusion. $\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{RO}$ et $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RO}$; leur somme est nulle, donc O est le milieu du segment $[MN]$.

4. 1 pts

a) Quel est le milieu du segment $[SU]$? b) En déduire la nature du quadrilatère $SMUN$. c) Préciser cette nature à l'aide des diagonales du losange $RSTU$.

INDICE

Outil : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme. **Point délicat :** les points M et N sont sur la droite (RT).

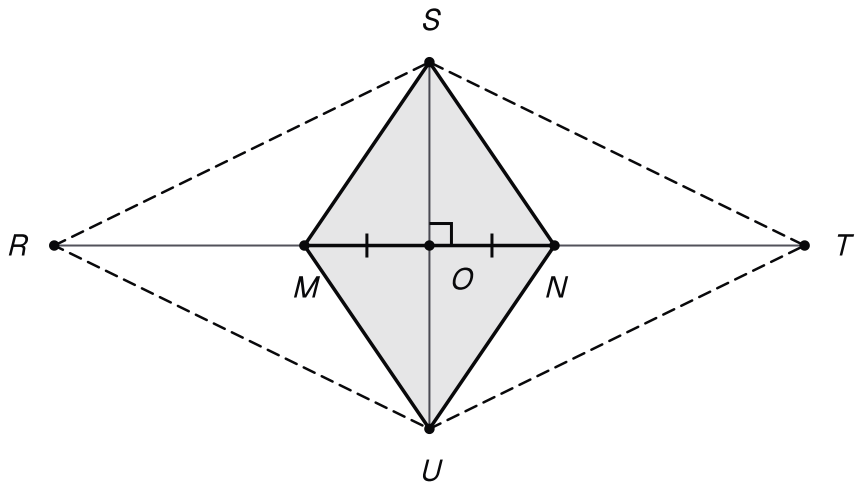
CORRIGÉ

a) Le point O est le centre du losange $RSTU$: c'est le milieu de sa diagonale $[SU]$.

b) Les diagonales $[SU]$ et $[MN]$ du quadrilatère $SMUN$ ont le même milieu O, d'après le a) et la question 3 : $SMUN$ est un parallélogramme. Il n'est pas aplati. En effet, M est sur la droite (RT) et distinct de O, car $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{RO} \neq \vec{0}$; or les droites (RT) et (SU) ne se coupent qu'en O, donc M n'est pas sur la droite (SU).

c) Les diagonales de $SMUN$ sont portées par (SU) et (RT), qui sont perpendiculaires. Or un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Conclusion. Le point O est le milieu de $[SU]$, et $SMUN$ est un losange.



Les sommets S, M, U, N forment un second losange, dessiné à l'intérieur de RSTU et ayant le même centre O.

5. 1 pts

a) Donner l'abscisse de M, de O et de N dans le repère (R, T). b) Ranger les points R, M, O, N, T dans l'ordre où on les rencontre en allant de R vers T.

INDICE

Outil : la définition de l'abscisse dans le repère (R, T).

CORRIGÉ

a) D'après l'énoncé, la question 1 et la question 2 :

$$\overrightarrow{RM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{RO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RT},$$
$$\overrightarrow{RN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RT}.$$

D'après la définition de l'abscisse, les points M, O, N ont pour abscisses respectives $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ dans le repère (R, T).

b) Ces trois abscisses sont comprises entre 0 et 1 : d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », M, O et N sont sur le segment $[RT]$. Leurs distances à R valent $RM = \frac{1}{3} \times RT$, $RO = \frac{1}{2} \times RT$ et $RN = \frac{2}{3} \times RT$. Comme $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 1$, ces distances sont rangées dans l'ordre croissant, et toutes inférieures à RT.

Conclusion. En allant de R vers T, l'ordre est R, M, O, N, T.

Exercice 3 5 pts

Le trajet d'un bateau

Un bateau part d'un port P. Sur la carte, on décrit ses déplacements à l'aide de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires :

- il va d'abord jusqu'à une bouée Q, avec $\overrightarrow{PQ} = 2\,\vec{u}$;
- il rejoint ensuite une île R, avec $\overrightarrow{QR} = 3\,\vec{v}$;
- enfin, il atteint un phare S, avec $\overrightarrow{RS} = -\vec{u} + \vec{v}$.

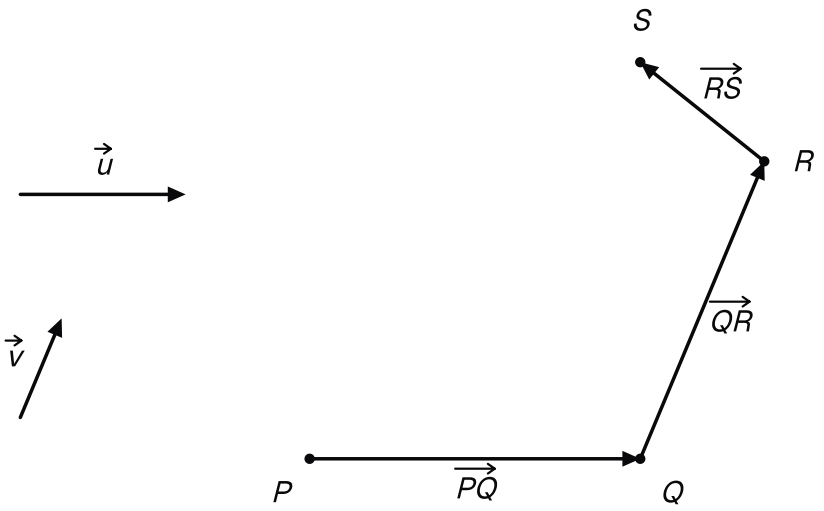


Schéma du trajet du bateau : trois déplacements successifs, du port P à la bouée Q, puis à l'île R, puis au phare S, décrits à l'aide des vecteurs u et v.

1. 1,5 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. b) Exprimer de même $\overrightarrow{PS}$. c) Une balise B est telle que $\overrightarrow{PB} = \vec{v}$. Comparer $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PB}$, puis préciser la position des droites (QR) et (PB), en citant la propriété.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Début :** pour $\overrightarrow{PS}$, réutilise le résultat du a). **Ensuite :** pour c), écris $\overrightarrow{QR}$ à l'aide de $\overrightarrow{PB}$.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par Q :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \\ &= 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}.\end{aligned}$$

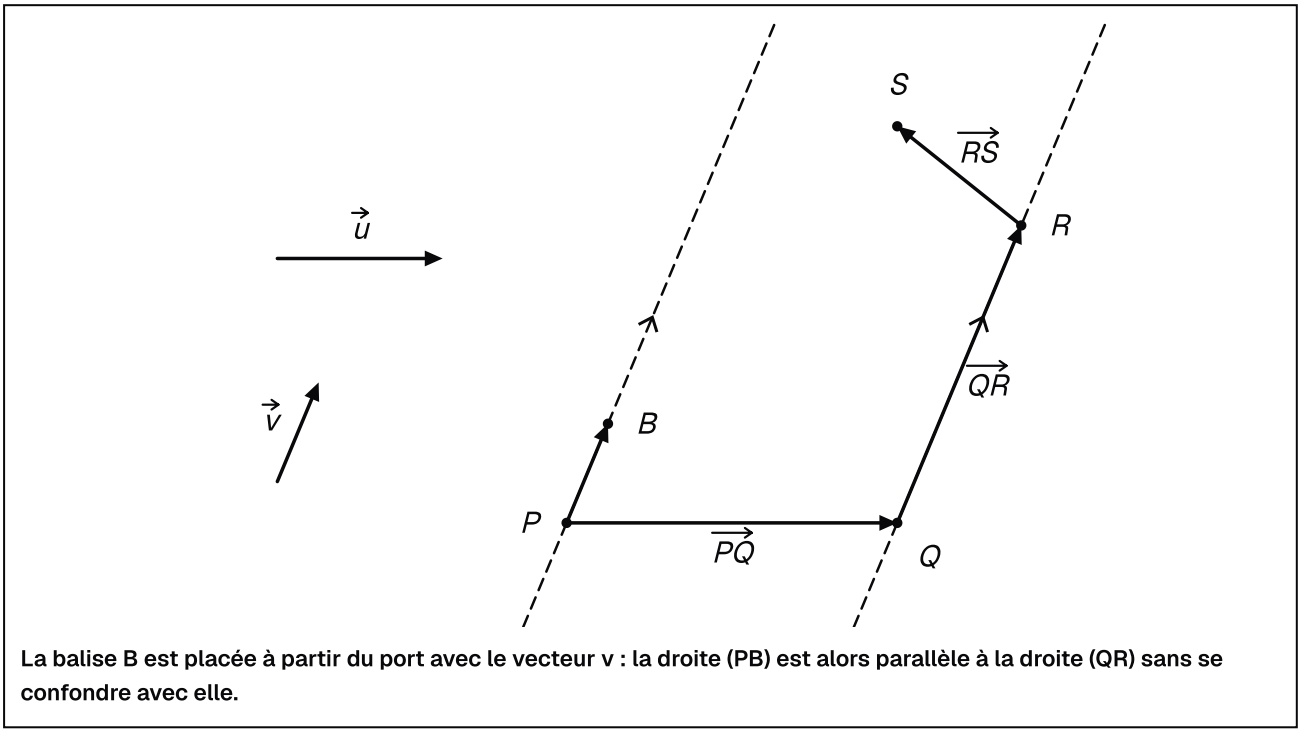
b) De même, en passant par R, puis avec les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} \\ &= 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v} - \vec{u} + \vec{v} \\ &= \vec{u} + 4\,\vec{v}.\end{aligned}$$

c) On a $\overrightarrow{QR} = 3\,\vec{v} = 3\,\overrightarrow{PB}$: les vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires. Le vecteur $\vec{v}$ n'est pas nul, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ; donc $P \neq B$ et $Q \neq R$. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », les droites (QR) et (PB) sont parallèles.

Elles sont distinctes : sinon Q serait sur (PB), et $\overrightarrow{PQ} = 2\,\vec{u}$ serait colinéaire à $\vec{v}$, ce qui est exclu.

Conclusion. $\overrightarrow{PR} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$ et $\overrightarrow{PS} = \vec{u} + 4\,\vec{v}$; comme $\overrightarrow{QR} = 3\,\overrightarrow{PB}$, les droites (QR) et (PB) sont parallèles, et même distinctes.



La balise B est placée à partir du port avec le vecteur v : la droite (PB) est alors parallèle à la droite (QR) sans se confondre avec elle.

2. 1,5 pts

Un canot part du port et va en ligne droite jusqu'au point T tel que $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$. a) Comparer $\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{PT}$. b) En déduire que P, T, S sont alignés. c) Préciser la position de T par rapport au segment $[PS]$.

INDICE

Outil : les règles de calcul, puis la propriété d'alignement de trois points. **Point délicat :** pour c), écris $\overrightarrow{PT}$ comme une fraction de $\overrightarrow{PS}$.

CORRIGÉ

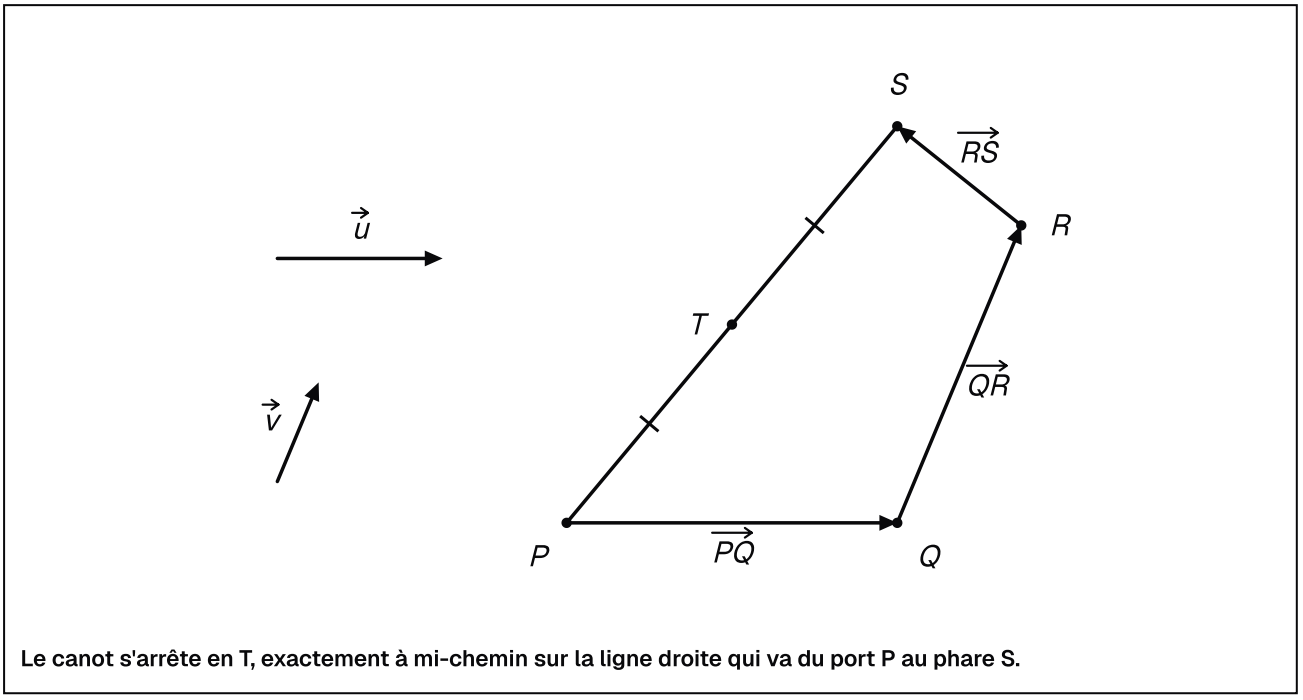
a) On multiplie l'écriture de $\overrightarrow{PT}$ par 2 ; d'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned} 2\,\overrightarrow{PT} &= \vec{u} + 4\,\vec{v} \\ &= \overrightarrow{PS}. \end{aligned}$$

b) Si $\overrightarrow{PT}$ était nul, on aurait $\vec{u} = -4\,\vec{v}$, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ seraient colinéaires : c'est exclu, donc $P \neq T$. D'après le a), les vecteurs $\overrightarrow{PT}$ et $\overrightarrow{PS}$, de même origine P, sont colinéaires. D'après la propriété d'alignement de trois points, P, T, S sont alignés.

c) Le a) donne $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PS}$: d'après les caractérisations vectorielles du milieu, T est le milieu de $[PS]$.

Conclusion. $\overrightarrow{PS} = 2\,\overrightarrow{PT}$; les points P, T, S sont alignés, et T est le milieu du segment $[PS]$.



Le canot s'arrête en T, exactement à mi-chemin sur la ligne droite qui va du port P au phare S.

3. 1 pts

Après le phare, le bateau rejoint un point L, avec $\overrightarrow{SL} = 2\,\vec{u} + 8\,\vec{v}$. a) Exprimer $\overrightarrow{PL}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. b) Vérifier que $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PS}$. c) En déduire l'abscisse de S dans le repère (P, L), puis situer S.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par S. **Point délicat :** l'abscisse de S se lit sur $\overrightarrow{PS}$ écrit en fonction de $\overrightarrow{PL}$.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par S, puis les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PL} &= \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SL}\\ &= \vec{u} + 4\,\vec{v} + 2\,\vec{u} + 8\,\vec{v}\\ &= 3\,\vec{u} + 12\,\vec{v}.\end{aligned}$$

b) D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}3\,\overrightarrow{PS} &= 3\,\vec{u} + 12\,\vec{v}\\ &= \overrightarrow{PL}.\end{aligned}$$

c) D'après la question 2, $\overrightarrow{PS} = 2\,\overrightarrow{PT} \neq \vec{0}$; donc $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PS} \neq \vec{0}$, et $P \neq L$: le repère (P, L) existe. En multipliant par $\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PL}$: l'abscisse de S dans le repère (P, L) est $\frac{1}{3}$. Comme $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$, la propriété « abscisse, segment et demi-droite » place S sur le segment $[PL]$.

Conclusion. $\overrightarrow{PL} = 3\,\overrightarrow{PS}$; le point S, d'abscisse $\frac{1}{3}$ dans le repère (P, L), est sur le segment $[PL]$.

4. 1 pts

a) Donner l'abscisse de T dans le repère (P, L). b) Sur la carte, $PL = 12$ cm. Calculer PS et PT.

INDICE

Outil : les règles de calcul.

CORRIGÉ

a) D'après la question 2 c), la question 3 c) et les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT} &= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PS}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\,\overrightarrow{PL}\\ &= \frac{1}{6}\,\overrightarrow{PL}.\end{aligned}$$

D'après la définition de l'abscisse, T a pour abscisse $\frac{1}{6}$ dans le repère (P, L).

b) Les abscisses de S et de T sont positives ; d'après la définition du produit par un réel, $PS = \frac{1}{3} \times 12 = 4$ cm et $PT = \frac{1}{6} \times 12 = 2$ cm.

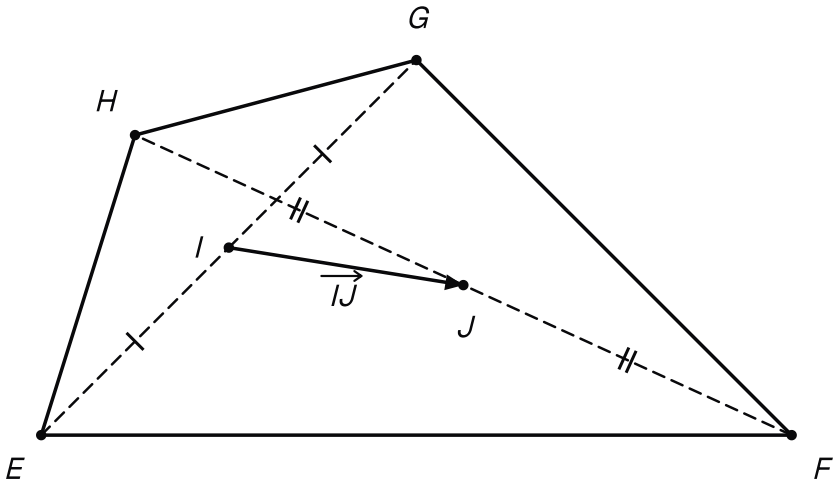
Conclusion. Le point T a pour abscisse $\frac{1}{6}$ dans le repère (P, L) ; sur la carte, $PS = 4$ cm et $PT = 2$ cm.

Exercice 4 — 5 pts

Le vecteur joignant les milieux des diagonales

$EFGH$ est un quadrilatère quelconque. Le point I est le milieu de la diagonale $[EG]$, et le point J est le milieu de la diagonale $[FH]$.

Fais la figure sur ton cahier : en général, I et J sont deux points distincts.



Un quadrilatère quelconque EFGH, ses deux diagonales et leurs milieux I et J, reliés par le vecteur IJ.

1. — 1 pts

a) Décomposer $\overrightarrow{EF}$ par la relation de Chasles, en passant par le point I. b) Décomposer de même $\overrightarrow{GH}$, en passant par le point I.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, avec I comme point intermédiaire.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, avec I comme point intermédiaire :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IF}.$$

b) De même :

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IH}.$$

Conclusion. En passant par I, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IH}$.

2. 1,5 pts

a) Le point I est le milieu de $[EG]$: que vaut $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}$? En déduire $\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GI}$. b) Utiliser le milieu J de $[FH]$ pour écrire $\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IH}$ à l'aide du seul vecteur $\overrightarrow{IJ}$. c) En déduire $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu. **Point délicat :** pour b), la caractérisation valable pour tout point du plan s'applique ici au point I et au segment $[FH]$.

CORRIGÉ

a) Le point I est le milieu de $[EG]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG}=\vec{0}$. On passe aux opposés (règles de calcul) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GI} &= -\overrightarrow{IE}-\overrightarrow{IG}\\ &= -(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IG})\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

b) Le point J est le milieu de $[FH]$. La caractérisation du milieu qui vaut pour n'importe quel point du plan, prise au point I, donne :

$$\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IH}=2\,\overrightarrow{IJ}.$$

c) On additionne les deux égalités de la question 1, puis on regroupe les termes (propriétés de l'addition) :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}\\ &=(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GI})+(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IH})\\ &=\vec{0}+2\,\overrightarrow{IJ}=2\,\overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$, $\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IH}=2\,\overrightarrow{IJ}$, et donc $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}=2\,\overrightarrow{IJ}$.

3. 1,5 pts

a) Par la même méthode, en passant par I, écrire $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$. b) En déduire que $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}$. c) Retrouver cette égalité sans passer par I ni J : simplifier $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{GF}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles et la question 2. **Point délicat :** pour c), change chaque soustraction en somme de l'opposé, puis réordonne les vecteurs pour qu'ils s'enchaînent. **Ensuite :** les quatre vecteurs obtenus font le tour du quadrilatère.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par I :

$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IH},$$
$$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IF}.$$

On additionne et l'on regroupe comme à la question 2 :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}\\&=(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{GI})+(\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IH})\\&=\vec{0}+2\,\overrightarrow{IJ}=2\,\overrightarrow{IJ}.\end{aligned}$$

b) Les sommes $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}$ sont égales au même vecteur $2\,\overrightarrow{IJ}$: elles sont donc égales.

c) On a $-\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{HE}$ et $-\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{FG}$. On réordonne les termes (propriétés de l'addition) pour que les lettres s'enchaînent, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{GF}\\&=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HE}\\&=\overrightarrow{EE}=\vec{0}.\end{aligned}$$

La différence des deux sommes est nulle : on retrouve l'égalité du b).

Conclusion. $\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}=2\,\overrightarrow{IJ}$, d'où $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GF}$; cette égalité se retrouve sans passer par I ni J.

4. 1 pts

Dans cette question, on suppose que $\overrightarrow{EF} = 3\,\overrightarrow{HG}$. a) Écrire $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH}$ en fonction de $\overrightarrow{HG}$, puis en déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{HG}$. b) En déduire que les droites (IJ) et (EF) sont parallèles, en citant la propriété.

INDICE

Outil : les règles de calcul et la question 2, puis la propriété « colinéarité et parallélisme ». **Point délicat :** $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{HG}$; pour b), vérifie d'abord que $I \neq J$ et $E \neq F$.

CORRIGÉ

a) D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{GH} = -\overrightarrow{HG}$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} &= 3\,\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{HG} \\ &= 2\,\overrightarrow{HG}.\end{aligned}$$

Or, d'après la question 2, $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = 2\,\overrightarrow{IJ}$. Donc $2\,\overrightarrow{IJ} = 2\,\overrightarrow{HG}$; on multiplie par $\frac{1}{2}$:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HG}.$$

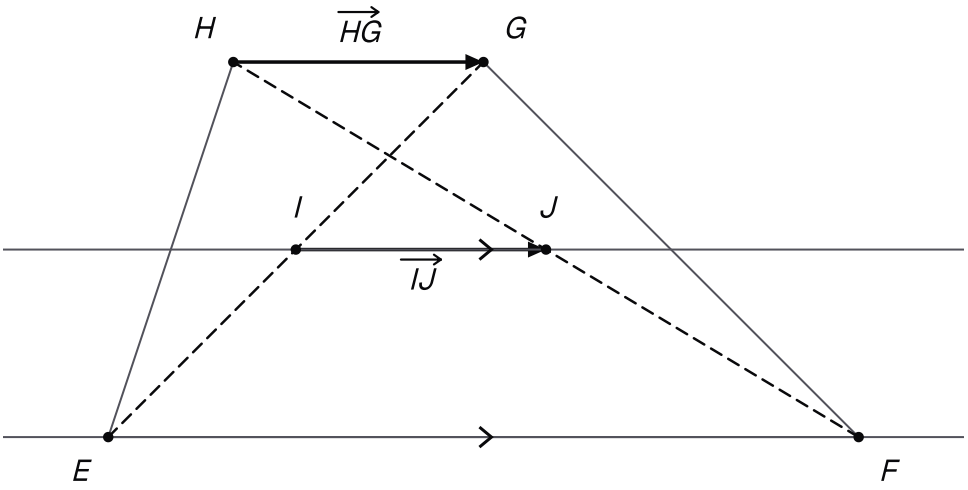
b) Les sommets H et G du quadrilatère sont distincts, donc $\overrightarrow{HG} \neq \vec{0}$; ainsi $\overrightarrow{IJ} \neq \vec{0}$ et $I \neq J$. Les sommets E et F sont eux aussi distincts.

L'hypothèse $\overrightarrow{EF} = 3\,\overrightarrow{HG}$ donne $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}$, donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{EF}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. Par la propriété « colinéarité et parallélisme », les droites (IJ) et (EF) sont donc parallèles.

Conclusion. Sous l'hypothèse $\overrightarrow{EF} = 3\,\overrightarrow{HG}$, on a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HG}$, et les droites (IJ) et (EF) sont parallèles.



Cas particulier où le vecteur EF vaut trois fois le vecteur HG : le vecteur IJ est égal au vecteur HG, et la droite (IJ) est parallèle à (EF).

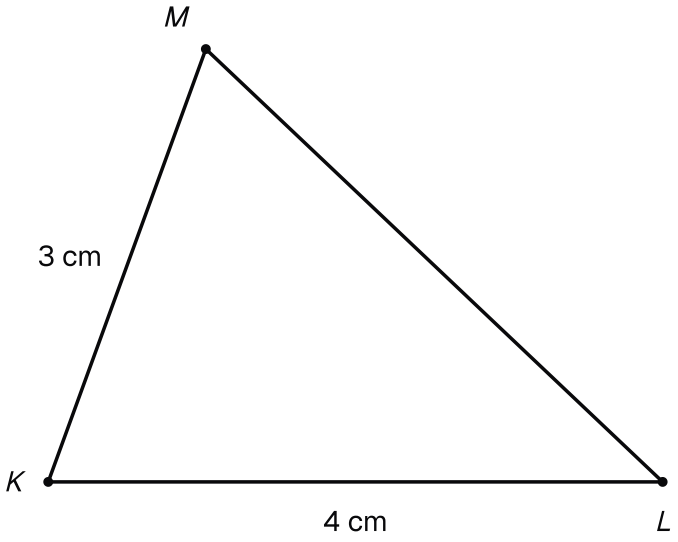
Exercice 5 5 pts

Un parallélogramme construit sur un triangle

KLM est un triangle, avec $KL = 4$ cm et $KM = 3$ cm. Les points N et P sont définis par :

$$\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM},$$
$$\overrightarrow{KP} = 2\,\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}.$$

Trace la figure sur ton cahier, puis complète-la à chaque question.



Le triangle KLM de départ, avec les longueurs des côtés [KL] et [KM].

1. 1,5 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{LN}$ en fonction de $\overrightarrow{KM}$, en passant par le point K. b) En déduire la nature du quadrilatère $KMNL$. c) Construire le point P : placer d'abord le point E tel que $\overrightarrow{KE} = 2\,\overrightarrow{KL}$, puis le point P à partir de E.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis la définition de l'égalité de deux vecteurs. **Point délicat :** pour c), écris $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EP}$ et compare avec la définition de P.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par K, avec $\overrightarrow{LK} = -\overrightarrow{KL}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LN} &= \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KN}\\ &= -\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM}\\ &= \overrightarrow{KM}.\end{aligned}$$

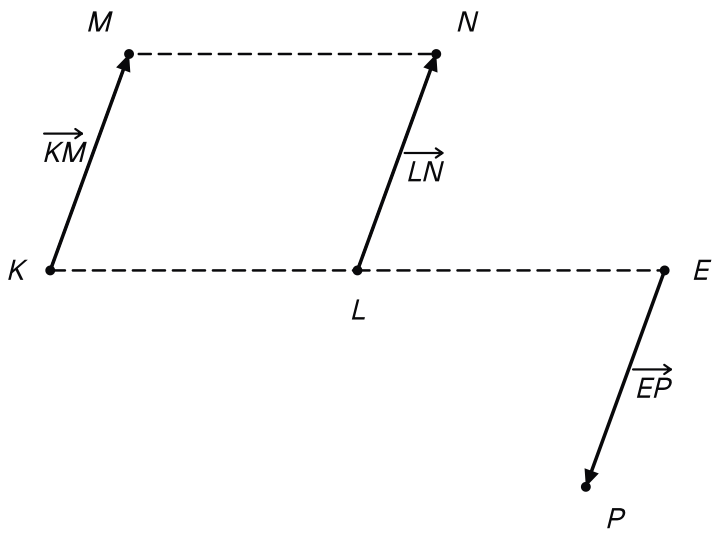
b) On a $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN}$. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, lue avec les points K, M, L, N, le quadrilatère $KMNL$ est un parallélogramme. Il n'est pas aplati, car L n'est pas sur la droite (KM) : KLM est un triangle.

c) D'après la définition du produit d'un vecteur par un réel, E est sur la demi-droite $[KL)$, avec $KE = 2 \times 4 = 8$ cm. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KE} + \overrightarrow{EP}$; on compare avec $\overrightarrow{KP} = 2\,\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}$, où $2\,\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KE}$:

$$\overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{KM}.$$

On trace donc, à partir de E, un segment de 3 cm parallèle à (KM), dans le sens contraire de $\overrightarrow{KM}$: son extrémité est P.

Conclusion. $\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{KM}$, donc $KMNL$ est un parallélogramme ; le point P se place à partir de E grâce à $\overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{KM}$.



Construction des points : KMNL est un parallélogramme, puis P s'obtient à partir de E en reportant le vecteur KM dans le sens contraire.

2. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{LP}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$, en passant par le point K. b) Exprimer de même $\overrightarrow{ML}$. c) En déduire que L est le milieu du segment $[MP]$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis la définition vectorielle du milieu. **Début :** $\overrightarrow{LK} = -\overrightarrow{KL}$.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par K, puis les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LP} &= \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KP} \\ &= -\overrightarrow{KL} + 2\,\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM} \\ &= \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}.\end{aligned}$$

b) De même, en passant par K :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ML} &= \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KL} \\ &= -\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KL} \\ &= \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}.\end{aligned}$$

c) Les deux vecteurs ont la même écriture : $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{LP}$. D'après la définition vectorielle du milieu, L est le milieu de $[MP]$.

Conclusion. $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{LP}$, donc L est le milieu du segment $[MP]$.

3. 1,5 pts

Le point Q est le milieu du segment $[NP]$. a) Exprimer $\overrightarrow{KQ}$ en fonction de $\overrightarrow{KN}$ et $\overrightarrow{KP}$, en passant par le point N. b) En déduire $\overrightarrow{KQ}$ en fonction du seul vecteur $\overrightarrow{KL}$, puis l'abscisse de Q dans le repère (K, L). c) Situer Q par rapport au segment $[KL]$, puis calculer KQ et LQ.

INDICE

Outil : la relation de Chasles et les caractérisations du milieu. **Début :** $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$, puis $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP}$. **Point délicat :** une abscisse peut être supérieure à 1.

CORRIGÉ

a) Le point Q est le milieu de $[NP]$: d'après les caractérisations vectorielles du milieu, $\overrightarrow{NQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$. On passe par N, puis par K pour $\overrightarrow{NP}$ (relation de Chasles), et l'on développe (règles de calcul) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KQ} &= \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NQ}\\ &= \overrightarrow{KN} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP}\right)\\ &= \overrightarrow{KN} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KP}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{KN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KP}.\end{aligned}$$

b) On additionne les écritures de $\overrightarrow{KN}$ et de $\overrightarrow{KP}$ (règles de calcul) :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KP}\\ &= \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM} + 2\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KM}\\ &= 3\overrightarrow{KL}.\end{aligned}$$

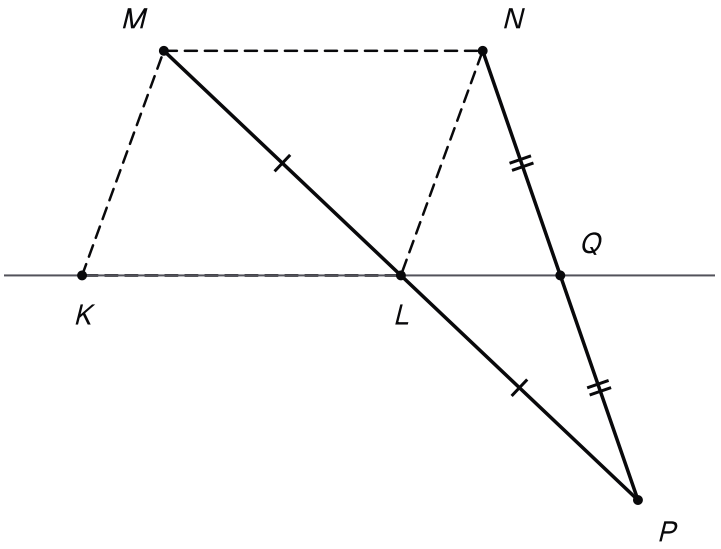
Avec le a), $\overrightarrow{KQ} = \frac{1}{2} \times 3\overrightarrow{KL}$, soit :

$$\overrightarrow{KQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{KL}.$$

Comme $K \neq L$, la propriété d'alignement de trois points place Q sur la droite (KL) ; son abscisse dans le repère (K, L) est $\frac{3}{2}$.

c) On a $\frac{3}{2} \geq 0$ et $\frac{3}{2} > 1$: d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », Q est sur la demi-droite $[KL)$ mais pas sur le segment $[KL]$; il est au-delà de L. Donc $KQ = \frac{3}{2} \times 4 = 6$ cm et, comme L est entre K et Q, $LQ = KQ - KL = 6 - 4 = 2$ cm.

Conclusion. Le point Q, d'abscisse $\frac{3}{2}$ dans le repère (K, L), est sur la demi-droite $[KL)$ au-delà de L ; $KQ = 6$ cm et $LQ = 2$ cm.



Le milieu Q de [NP] tombe sur la droite (KL), au-delà de L, qui se trouve entre K et Q.

4. 1 pts

a) Exprimer $\overrightarrow{LQ}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$. b) En déduire l'abscisse de K dans le repère (L, Q), puis préciser si K appartient à la demi-droite $[LQ)$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, puis la définition de l'abscisse. **Point délicat :** écris $\overrightarrow{LK}$ comme un multiple de $\overrightarrow{LQ}$.

CORRIGÉ

a) D'après la relation de Chasles, en passant par K, avec la question 3 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LQ} &= \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KQ} \\ &= -\overrightarrow{KL} + \frac{3}{2}\overrightarrow{KL} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{KL}.\end{aligned}$$

b) En multipliant par 2, $\overrightarrow{KL} = 2\,\overrightarrow{LQ}$, donc $\overrightarrow{LK} = -2\,\overrightarrow{LQ}$. Comme $L \neq Q$ ($LQ = 2$ cm), le repère (L, Q) existe : l'abscisse de K dans ce repère est -2. Elle est strictement négative : d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », K n'appartient pas à la demi-droite $[LQ)$; il est sur la demi-droite opposée, avec $LK = 2 \times LQ = 4$ cm.

Conclusion. $\overrightarrow{LQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$; le point K a pour abscisse -2 dans le repère (L, Q) et n'appartient pas à la demi-droite $[LQ)$.