BURHAN

Calcul vectoriel dans le plan : exercices, entraînement

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

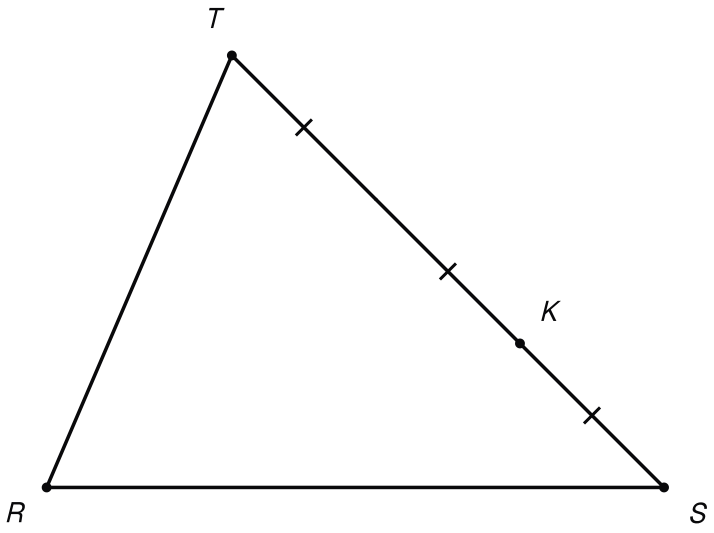
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-vectoriel-dans-le-plan/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul vectoriel dans le plan	Entraînement	7

Exercice 1

Exprimer, puis aligner

RST est un triangle. Le point K vérifie $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ST}$, et le point L vérifie $\overrightarrow{RL} = 2\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$.



Le triangle RST et le point K placé sur le côté [ST], au premier tiers en partant de S.

1.

Exprimer $\overrightarrow{RK}$ en fonction de $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Début :** passe par S : $\overrightarrow{RK} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SK}$. **Point délicat :** décompose aussi $\overrightarrow{ST}$ en passant par R.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles, en passant par S, on a $\overrightarrow{RK} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SK}$, avec $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ST}$. On décompose aussi $\overrightarrow{ST}$ en passant par R :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} &= \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} \\ &= -\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}.\end{aligned}$$

On remplace, puis on regroupe (règles de calcul sur le produit par un réel) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RK} &= \overrightarrow{RS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ST} \\ &= \overrightarrow{RS} - \frac{1}{3}\overrightarrow{RS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{RT} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{RS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{RT}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{RK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{RT}$.

2.

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{RL}$ et $\overrightarrow{RK}$.

INDICE

Début : multiplie l'écriture de $\overrightarrow{RK}$ par un réel bien choisi. **Point délicat :** le même réel doit convenir pour les deux coefficients.

CORRIGÉ

Le réel 3 transforme les deux coefficients $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ en 2 et 1. On multiplie donc l'écriture de $\overrightarrow{RK}$ par 3 ; d'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned} 3\,\overrightarrow{RK} &= 2\,\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT} \\ &= \overrightarrow{RL}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{RL} = 3\,\overrightarrow{RK}$: le vecteur $\overrightarrow{RL}$ est le triple du vecteur $\overrightarrow{RK}$.

3.

En déduire que les points R, K, L sont alignés, puis situer K par rapport au segment $[RL]$.

INDICE

Outil : la propriété d'alignement de trois points. **Point délicat :** pour situer K, écris $\overrightarrow{RK}$ en fonction de $\overrightarrow{RL}$ et lis une abscisse.

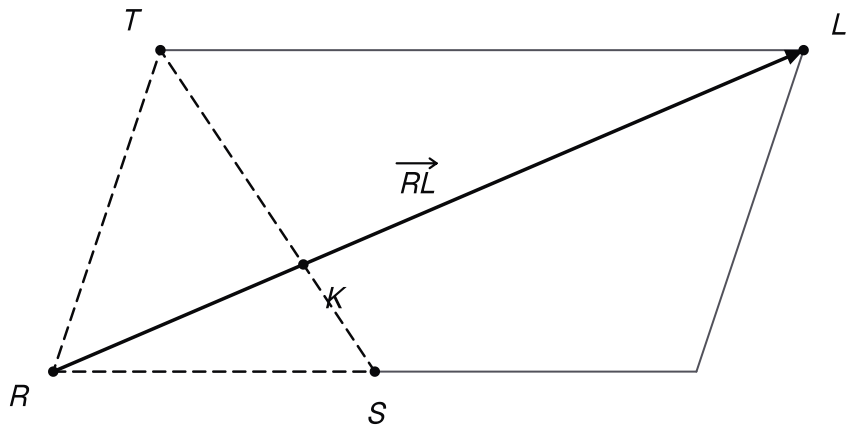
CORRIGÉ

Points distincts. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires, car RST est un triangle. Si $\overrightarrow{RL}$ était nul, on aurait $\overrightarrow{RT} = -2\,\overrightarrow{RS}$, ce qui est exclu. Donc $\overrightarrow{RL} \neq \vec{0}$ et $R \neq L$; comme $\overrightarrow{RK} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{RL}$, on a aussi $R \neq K$.

Alignement. D'après la question 2, les vecteurs $\overrightarrow{RK}$ et $\overrightarrow{RL}$, de même origine R, sont colinéaires. D'après la propriété d'alignement de trois points, R, K, L sont alignés.

Position de K. L'égalité $\overrightarrow{RK} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{RL}$ donne l'abscisse de K dans le repère (R, L) : $\frac{1}{3}$. Comme $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$, la propriété « abscisse, segment et demi-droite » place K sur le segment $[RL]$.

Conclusion. Les points R, K, L sont alignés, et K est sur le segment $[RL]$, au tiers de ce segment en partant de R.



Le point L s'obtient avec le parallélogramme construit sur deux fois le vecteur RS et sur le vecteur RT ; le point K se trouve sur [RL], au tiers en partant de R.

Exercice 2

Les milieux des côtés d'un quadrilatère

$EFGH$ est un quadrilatère quelconque. On note P, Q, R, S les milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$. Fais la figure sur ton cahier.

1.

Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{EG}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par F. **Début :** écris $\overrightarrow{PF}$ et $\overrightarrow{FQ}$ comme des moitiés de vecteurs.

CORRIGÉ

Passer par F. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FQ}$.

Moitiés. Le point P est le milieu de $[EF]$: d'après la définition vectorielle du milieu et ses caractérisations, $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. Le point Q est le milieu de $[FG]$, donc $\overrightarrow{FQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$.

Calcul. On met $\frac{1}{2}$ en facteur (règles de calcul), puis la relation de Chasles termine :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

2.

Exprimer de même $\overrightarrow{SR}$ en fonction de $\overrightarrow{EG}$.

INDICE

Début : passe cette fois par le sommet H. **Point délicat :** S est le milieu de $[HE]$, donc $\overrightarrow{SH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.

CORRIGÉ

Passer par H. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HR}$.

Moitiés. Le point S est le milieu de $[HE]$, donc $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{ES} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$. Le point R est le milieu de $[GH]$, donc $\overrightarrow{HR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$.

Calcul. Comme à la question 1 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SR} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.

3.

Quelle est la nature du quadrilatère $PQRS$? Justifier.

INDICE

Outil : la définition de l'égalité de deux vecteurs. **Point délicat :** dans $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, lis les sommets dans le bon ordre.

CORRIGÉ

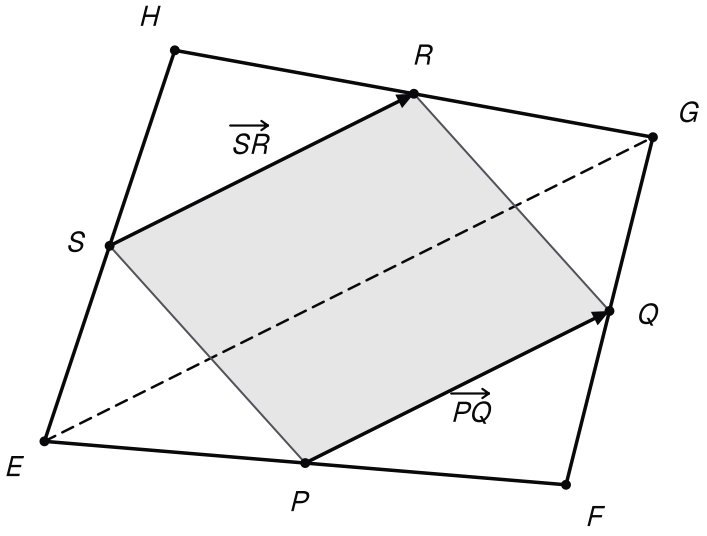
Égalité de vecteurs. D'après les questions 1 et 2, les deux vecteurs valent $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}.$$

D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, lue avec les points P, Q, S, R, le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Parallélisme. Les sommets E et G sont distincts, donc $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} \neq \vec{0}$: ainsi $P \neq Q$, et de même $S \neq R$. Les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{SR}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{EG}$; d'après la propriété « colinéarité et parallélisme », les côtés (PQ) et (SR) sont parallèles à la diagonale (EG).

Conclusion. Le quadrilatère $PQRS$ est un parallélogramme, éventuellement aplati, dont les côtés (PQ) et (SR) sont parallèles à la diagonale (EG).



Dans le quadrilatère EFGH, les vecteurs PQ et SR sont égaux à la moitié du vecteur EG : le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

Exercice 3

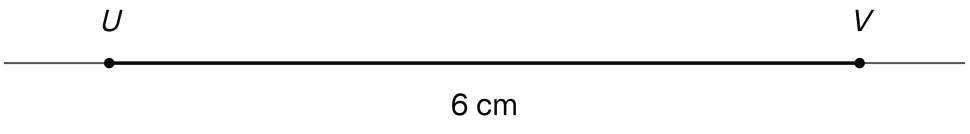
Deux points sur une droite

U et V sont deux points tels que $UV = 6$ cm. Les points M et N vérifient :

$$\overrightarrow{MU} + 2\,\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{UV}$$

et

$$3\,\overrightarrow{NU} - \overrightarrow{NV} = \vec{0}.$$



La droite (UV) et le segment [UV] de longueur 6 cm, sur lesquels on cherchera les points M et N.

1.

Exprimer $\overrightarrow{UM}$ en fonction de $\overrightarrow{UV}$, puis situer le point M.

INDICE

Outil : la relation de Chasles : $\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UV}$. **Point délicat :** isole $\overrightarrow{MU}$, puis passe à son opposé $\overrightarrow{UM}$.

CORRIGÉ

Passer par U. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UV}$. On remplace dans l'égalité qui définit M et l'on développe (règles de calcul) :

$$\overrightarrow{MU} + 2\,\overrightarrow{MU} + 2\,\overrightarrow{UV} = \overrightarrow{UV}.$$

On ajoute $-2\,\overrightarrow{UV}$ aux deux membres :

$$3\,\overrightarrow{MU} = -\overrightarrow{UV}.$$

Isoler $\overrightarrow{UM}$. Avec $\overrightarrow{MU} = -\overrightarrow{UM}$, l'égalité devient $3\,\overrightarrow{UM} = \overrightarrow{UV}$; on multiplie par $\frac{1}{3}$:

$$\overrightarrow{UM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{UV}.$$

Position. L'abscisse de M dans le repère (U, V) est $\frac{1}{3}$, et $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$: d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », M est sur le segment $[UV]$, avec $UM = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ cm.

Conclusion. $\overrightarrow{UM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{UV}$; le point M est sur le segment $[UV]$, à 2 cm de U.

2.

Même travail pour le point N.

INDICE

Début : écris $\overrightarrow{NV} = \overrightarrow{NU} + \overrightarrow{UV}$. **Point délicat :** l'abscisse obtenue est négative.

CORRIGÉ

Passer par U. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{NV} = \overrightarrow{NU} + \overrightarrow{UV}$. L'égalité qui définit N devient :

$$3\,\overrightarrow{NU} - \overrightarrow{NU} - \overrightarrow{UV} = \vec{0},$$

soit $2\,\overrightarrow{NU} = \overrightarrow{UV}$.

Isoler $\overrightarrow{UN}$. Avec $\overrightarrow{NU} = -\overrightarrow{UN}$, on obtient $-2\,\overrightarrow{UN} = \overrightarrow{UV}$; on multiplie par $-\frac{1}{2}$:

$$\overrightarrow{UN} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{UV}.$$

Position. L'abscisse de N dans le repère (U, V) est $-\frac{1}{2}$, strictement négative : d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », N n'est pas sur la demi-droite $[UV)$, il est sur la demi-droite opposée. Sa distance à U vaut $UN = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm.

Conclusion. $\overrightarrow{UN} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{UV}$; le point N est sur la demi-droite opposée à $[UV)$, à 3 cm de U.

3.

Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{UV}$, puis calculer la longueur MN.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par U. **Point délicat :** la longueur de $k\overrightarrow{UV}$ vaut $-k \times UV$ lorsque k est négatif.

CORRIGÉ

Vecteur. D'après la relation de Chasles, en passant par U, avec $\overrightarrow{MU} = -\overrightarrow{UM}$ et les questions 1 et 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{UN} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{UV} - \frac{1}{2}\overrightarrow{UV} \\ &= -\frac{5}{6}\overrightarrow{UV}.\end{aligned}$$

Longueur. Le réel $-\frac{5}{6}$ est négatif ; d'après la définition du produit par un réel, $MN = \frac{5}{6} \times UV$, soit $MN = \frac{5}{6} \times 6 = 5$ cm.

Contrôle. Les points M et N sont de part et d'autre de U : $MN = UM + UN = 2 + 3 = 5$ cm.

Conclusion. $\overrightarrow{MN} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{UV}$ et $MN = 5$ cm.

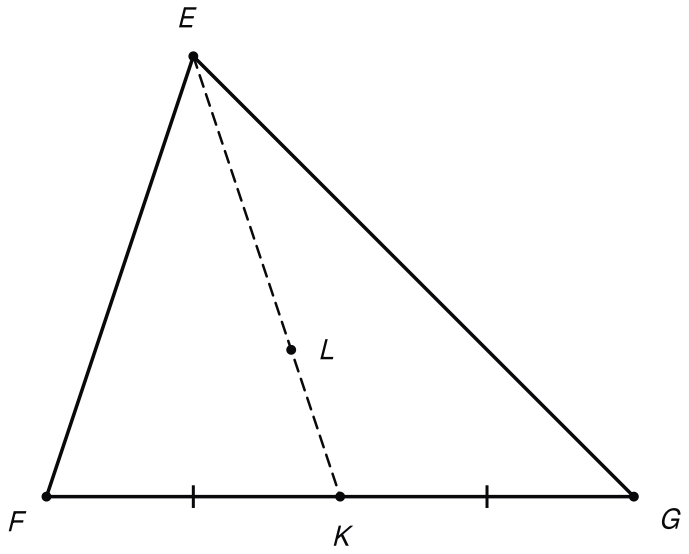


Les points N et M se trouvent de part et d'autre de U sur la droite (UV), à 3 cm et à 2 cm de U, ce qui donne MN égal à 5 cm.

Exercice 4

Une somme nulle dans un triangle

EFG est un triangle et K est le milieu de $[FG]$. Le point L vérifie $\overrightarrow{EL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EK}$.



Le triangle EFG, le milieu K du côté [FG] et le point L placé sur [EK], aux deux tiers en partant de E.

1.

Exprimer $\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG}$ en fonction de $\overrightarrow{LK}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, appliquées au segment $[FG]$ et au point L.

CORRIGÉ

Le point K est le milieu de $[FG]$. La caractérisation vectorielle du milieu qui vaut pour n'importe quel point du plan, prise au point L, donne :

$$\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG} = 2\,\overrightarrow{LK}.$$

Conclusion. La somme $\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG}$ est égale à $2\,\overrightarrow{LK}$.

2.

Exprimer $\overrightarrow{LE}$, puis $\overrightarrow{LK}$, en fonction de $\overrightarrow{EK}$.

INDICE

Début : $\overrightarrow{LE}$ est l'opposé de $\overrightarrow{EL}$. **Ensuite :** pour $\overrightarrow{LK}$, passe par E avec la relation de Chasles.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{LE}$. C'est l'opposé de $\overrightarrow{EL}$:

$$\overrightarrow{LE} = -\overrightarrow{EL} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EK}.$$

Vecteur $\overrightarrow{LK}$. D'après la relation de Chasles, en passant par E :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{LE} + \overrightarrow{EK} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{EK} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{EK}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{LE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EK}$.

3.

En déduire la somme $\overrightarrow{LE} + \overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG}$.

INDICE

Début : remplace $\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG}$ grâce à la question 1. **Point délicat :** écris tout en fonction du seul vecteur $\overrightarrow{EK}$.

CORRIGÉ

On remplace $\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG}$ grâce à la question 1, puis on écrit tout en fonction de $\overrightarrow{EK}$ avec la question 2 et les règles de calcul :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{LE} + \overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG} \\ &= \overrightarrow{LE} + 2\,\overrightarrow{LK} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{EK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EK} \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{LE} + \overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LG} = \vec{0}$.

Exercice 5

Le vol de deux drones

Un drone vole à hauteur constante : on raisonne dans un plan. Il décolle d'une base D et fait trois déplacements en ligne droite :

- le premier, de vecteur $\vec{u}$, l'amène en E ;
- le deuxième, de vecteur $2\,\vec{v}$, l'amène en F ;
- le troisième, de vecteur $-3\,\vec{u}$, l'amène en G.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Sur ton cahier, prends $\vec{u}$ de longueur 2 cm et $\vec{v}$ de longueur $1{,}5$ cm.

1.

Construire les points E, F, G sur ton cahier, puis exprimer $\overrightarrow{DG}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

INDICE

Début : reporte chaque déplacement à partir du point d'arrivée du précédent. **Outil :** la relation de Chasles, en passant par E et F. **Ensuite :** regroupe les termes en $\vec{u}$.

CORRIGÉ

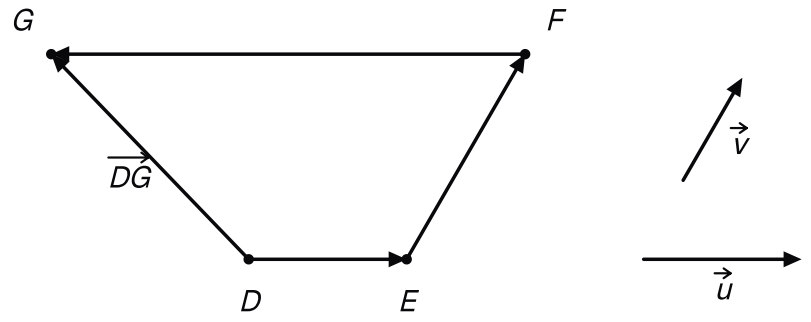
Construction. On reporte chaque déplacement à partir du point d'arrivée du précédent :

- E est à 2 cm de D, dans le sens de $\vec{u}$;
- F est à $2 \times 1{,}5 = 3$ cm de E, dans le sens de $\vec{v}$;
- G est à $3 \times 2 = 6$ cm de F, dans le sens contraire de $\vec{u}$.

Calcul. D'après la relation de Chasles, en passant par E et F, puis les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \\ &= \vec{u} + 2\,\vec{v} - 3\,\vec{u} \\ &= -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{DG} = -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$.



Le trajet du drone : de D à E selon le vecteur u, de E à F selon deux fois le vecteur v, puis de F à G selon trois fois l'opposé du vecteur u.

2.

Un second drone part de D et va en ligne droite jusqu'au point H tel que $\overrightarrow{DH} = \vec{v} - \vec{u}$. Comparer $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{DH}$.

INDICE

Début : mets un facteur commun en évidence dans l'écriture de $\overrightarrow{DG}$.

CORRIGÉ

On met 2 en facteur dans l'écriture de $\overrightarrow{DG}$ (règles de calcul), et l'on reconnaît $\overrightarrow{DH} = \vec{v} - \vec{u} = -\vec{u} + \vec{v}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} &= 2\left(-\vec{u} + \vec{v}\right) \\ &= 2\,\overrightarrow{DH}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{DG} = 2\,\overrightarrow{DH}$: le déplacement de D à G est le double du trajet du second drone.

3.

En déduire que les points D, H, G sont alignés. Donner l'abscisse de G dans le repère (D, H), puis préciser la position de H.

INDICE

Outil : la propriété d'alignement de trois points. **Point délicat :** pour H, écris $\overrightarrow{DH}$ en fonction de $\overrightarrow{DG}$.

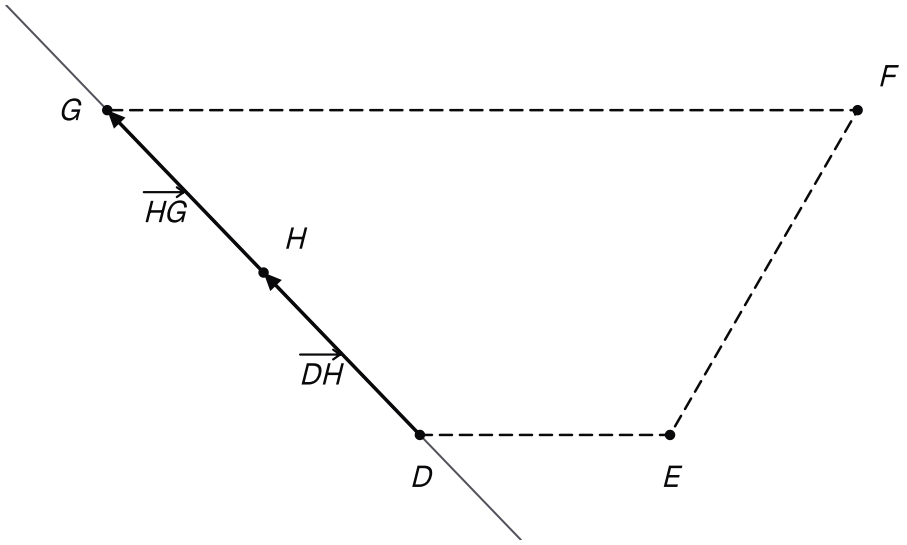
CORRIGÉ

Points distincts. Si $\overrightarrow{DH} = \vec{v} - \vec{u}$ était nul, on aurait $\vec{v} = \vec{u}$, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ seraient colinéaires, ce qui est exclu. Donc $\overrightarrow{DH} \neq \vec{0}$ et $D \neq H$.

Alignement. D'après la question 2, les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{DG}$, de même origine D, sont colinéaires. D'après la propriété d'alignement de trois points, D, H et G sont alignés.

Abscisse de G et position de H. Comme $\overrightarrow{DG} = 2\,\overrightarrow{DH}$, l'abscisse de G dans le repère (D, H) est 2. De plus, $\overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DG}$: d'après les caractérisations vectorielles du milieu, H est le milieu de $[DG]$.

Conclusion. Les points D, H, G sont alignés ; G a pour abscisse 2 dans le repère (D, H), et H est le milieu du segment $[DG]$.

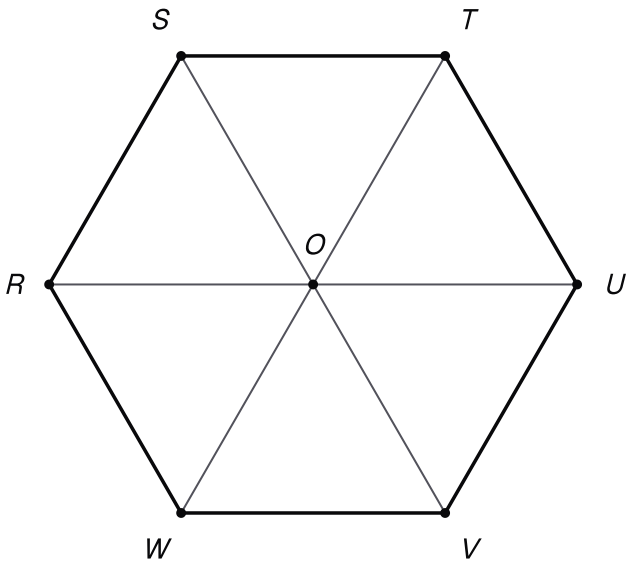


Le point H, atteint par le second drone, se trouve sur le segment [DG], exactement en son milieu.

Exercice 6

Sommes de vecteurs dans un hexagone régulier

$RSTUVW$ est un hexagone régulier de centre O. Rappel du collège : le point O est le milieu de la grande diagonale $[RU]$, et les quadrilatères $RSOW$, $RSTO$ et $ROVW$ sont des losanges. Trace la figure sur ton cahier.



L'hexagone régulier RSTUVW, son centre O et ses trois grandes diagonales, qui découpent la figure en losanges.

1.

Écrire $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RW}$ avec un seul vecteur.

INDICE

Outil : la règle du parallélogramme. **Début :** quel losange de la figure a pour côtés $[RS]$ et $[RW]$?

CORRIGÉ

Le losange $RSOW$ est un parallélogramme : ses côtés $[RS]$ et $[RW]$ partent de R, et O est le sommet opposé à R. D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RW} = \overrightarrow{RO}.$$

Conclusion. La somme $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RW}$ s'écrit avec le seul vecteur $\overrightarrow{RO}$.

2.

Écrire $\overrightarrow{RO}$ en fonction de $\overrightarrow{RU}$, puis exprimer $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RW}$ en fonction de $\overrightarrow{RU}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, pour le segment $[RU]$.

CORRIGÉ

Le point O est le milieu de $[RU]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu :

$$\overrightarrow{RO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{RU}.$$

On remplace $\overrightarrow{RO}$ dans le résultat de la question 1.

Conclusion. $\overrightarrow{RO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{RU}$, et donc $\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RW}=\frac{1}{2}\overrightarrow{RU}$.

3.

Exprimer $\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{RV}$ en fonction de $\overrightarrow{RU}$.

INDICE

Début : décompose $\overrightarrow{RT}$ en passant par S, et $\overrightarrow{RV}$ en passant par W. **Point délicat :** dans les losanges $RSTO$ et $ROVW$, $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{WV}$ sont égaux à $\overrightarrow{RO}$.

CORRIGÉ

Décompositions. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{RV}=\overrightarrow{RW}+\overrightarrow{WV}$.

Deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{RO}$. Les losanges $RSTO$ et $ROVW$ sont des parallélogrammes. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{RO}$ et $\overrightarrow{WV}=\overrightarrow{RO}$.

Calcul. On regroupe les termes (propriétés de l'addition), puis on utilise la question 1, enfin la question 2 :

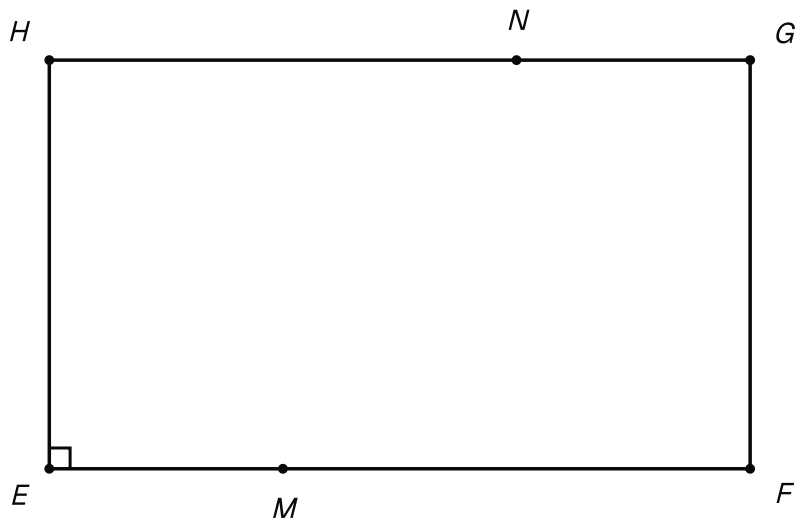
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{RV}\\&=\left(\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{RW}\right)+2\,\overrightarrow{RO}\\&=3\,\overrightarrow{RO}\\&=\frac{3}{2}\overrightarrow{RU}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{RT}+\overrightarrow{RV}=\frac{3}{2}\overrightarrow{RU}$.

Exercice 7

Un parallélogramme dans un rectangle

$EFGH$ est un rectangle. Le point M vérifie $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$, et le point N vérifie $\overrightarrow{HN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$.



Le rectangle EFGH, le point M au tiers du côté [EF] en partant de E et le point N aux deux tiers du côté [HG] en partant de H.

1.

Justifier que $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, puis exprimer $\overrightarrow{NG}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$.

INDICE

Outil : un rectangle est un parallélogramme. **Début :** pour $\overrightarrow{NG}$, passe par H. **Point délicat :** $\overrightarrow{NH} = -\overrightarrow{HN}$.

CORRIGÉ

Égalité $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$. Un rectangle est un parallélogramme : ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

Vecteur $\overrightarrow{NG}$. D'après la relation de Chasles, en passant par H, avec $\overrightarrow{NH} = -\overrightarrow{HN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NG} &= \overrightarrow{NH} + \overrightarrow{HG} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HG} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{NG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

2.

En déduire la nature du quadrilatère $EMGN$.

INDICE

Outil : la définition de l'égalité de deux vecteurs. **Point délicat :** compare $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{NG}$, puis lis les sommets dans l'ordre.

CORRIGÉ

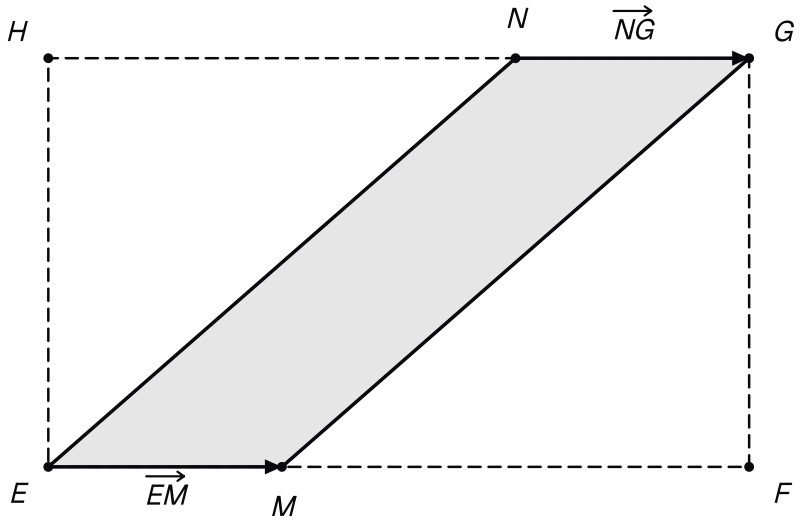
Égalité de vecteurs. D'après l'énoncé et la question 1 :

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NG}.$$

D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, lue avec les points E, M, N, G, le quadrilatère $EMGN$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Non aplati. Le point M est sur le côté $[EF]$ et le point N sur le côté $[HG]$. Ces côtés sont portés par deux droites parallèles distinctes, donc N n'est pas sur la droite (EM).

Conclusion. Le quadrilatère $EMGN$ est un parallélogramme non aplati.



Les vecteurs EM et NG sont égaux, chacun valant le tiers du vecteur EF : le quadrilatère EMGN est un parallélogramme.

3.

Exprimer $\overrightarrow{EN}$ et $\overrightarrow{MG}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$. Vérifier que ces deux vecteurs sont égaux.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Début :** passe par H pour $\overrightarrow{EN}$, et par F pour $\overrightarrow{MG}$. **Point délicat :** $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ dans le rectangle.

CORRIGÉ

Vecteur $\overrightarrow{EN}$. D'après la relation de Chasles, en passant par H, avec $\overrightarrow{HN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EN} &= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HN} \\ &= \overrightarrow{EH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}.\end{aligned}$$

Vecteur $\overrightarrow{MG}$. On passe par F. D'une part $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$; d'autre part $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$, par la définition de l'égalité de deux vecteurs dans le rectangle. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}.\end{aligned}$$

Comparaison. Les deux écritures ne diffèrent que par l'ordre des termes : $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{MG}$, ce qu'annonçait le parallélogramme $EMGN$.

Conclusion. $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{EH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$: les deux vecteurs sont égaux.