BURHAN

Calcul vectoriel dans le plan : exercices, application

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

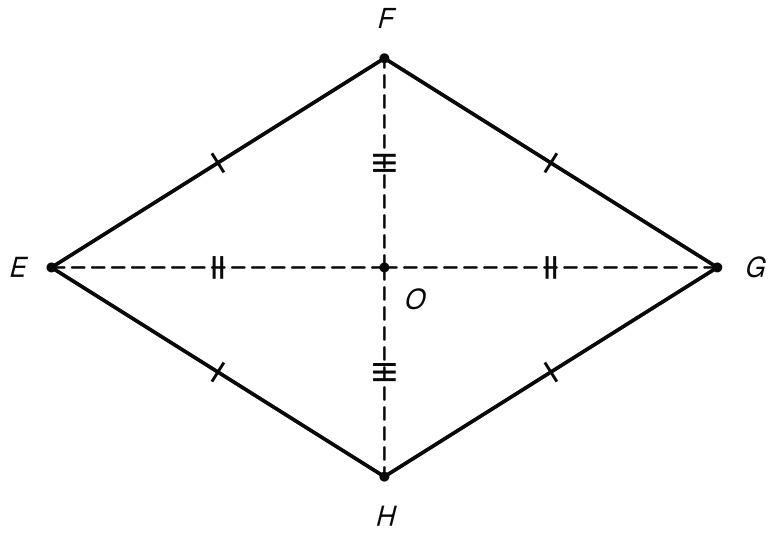
Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-vectoriel-dans-le-plan/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul vectoriel dans le plan	Application	8

Exercice 1

Égalités de vecteurs dans un losange

$EFGH$ est un losange de centre O : ses diagonales $[EG]$ et $[FH]$ se coupent en leur milieu O. Trace la figure sur ton cahier.



Le losange EFGH et ses deux diagonales, qui se coupent en leur milieu O.

1.

Citer un vecteur égal à $\overrightarrow{EF}$, puis un vecteur égal à $\overrightarrow{EO}$, dont les extrémités sont des points de la figure.

INDICE

Outil : un losange est un parallélogramme. **Début :** suis le tour E, F, G, H et lis les côtés opposés dans le même sens. **Point délicat :** l'ordre des lettres.

CORRIGÉ

Vecteur égal à $\overrightarrow{EF}$. Les diagonales $[EG]$ et $[FH]$ du losange ont le même milieu O. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, lue avec les points E, F, H, G :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}.$$

Vecteur égal à $\overrightarrow{EO}$. Le point O est le milieu de $[EG]$. D'après la définition vectorielle du milieu :

$$\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}.$$

Conclusion. Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ est égal à $\overrightarrow{EF}$, et le vecteur $\overrightarrow{OG}$ est égal à $\overrightarrow{EO}$.

2.

Écrire $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$ avec un seul vecteur.

INDICE

Outil : la règle du parallélogramme. **Début :** les deux vecteurs partent de E ; repère le parallélogramme qu'ils dessinent.

CORRIGÉ

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ ont la même origine E, et le losange $EFGH$ est un parallélogramme dont G est le sommet opposé à E. D'après la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}.$$

Conclusion. La somme $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$ s'écrit avec le seul vecteur $\overrightarrow{EG}$.

3.

Simplifier $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}$, puis $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FG}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu, puis la relation de Chasles. **Point délicat :** remplace d'abord $\overrightarrow{FG}$ par un vecteur égal qui part de E.

CORRIGÉ

Première somme. Le point O est le milieu de $[EG]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu :

$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}.$$

Seconde somme. Dans le parallélogramme $EFGH$, la définition de l'égalité de deux vecteurs donne $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$. On remplace, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FG} &= \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{HH} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux sommes sont nulles : $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$.

Exercice 2

Simplifier trois sommes

R, S, T, U et V sont cinq points du plan.

1.

Simplifier $\vec{a} = \overrightarrow{TU} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{UR}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Début :** commence par $\overrightarrow{RT}$, puis cherche le vecteur qui part de T.

CORRIGÉ

On peut changer l'ordre des termes d'une somme de vecteurs (propriétés de l'addition). On les place de façon que les lettres s'enchaînent, puis on applique la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TU} + \overrightarrow{UR} \\ &= \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UR} \\ &= \overrightarrow{RR} \\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{a} = \vec{0}$.

2.

Simplifier $\vec{b} = \overrightarrow{RS} - \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TU} - \overrightarrow{VU}$.

INDICE

Outil : l'opposé d'un vecteur. **Début :** écris $-\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{ST}$. **Point délicat :** traite aussi $-\overrightarrow{VU}$ avant d'enchaîner.

CORRIGÉ

Opposés. On remplace chaque soustraction par l'addition de l'opposé : $-\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{ST}$ et $-\overrightarrow{VU} = \overrightarrow{UV}$. Ainsi :

$$\vec{b} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TU} + \overrightarrow{UV}.$$

Chasles. Les lettres s'enchaînent ; on applique trois fois la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TU} + \overrightarrow{UV} \\ &= \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UV} \\ &= \overrightarrow{RV}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{b} = \overrightarrow{RV}$.

3.

Simplifier $\vec{c} = 2\,\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} - \overrightarrow{RT}$.

INDICE

Outil : les règles de calcul : $2\,\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RS}$. **Début :** garde un vecteur $\overrightarrow{RS}$ de côté, et enchaîne les autres termes.

CORRIGÉ

Réécriture. D'après les règles de calcul sur le produit par un réel, $2\,\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RS}$; de plus, $-\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{TR}$. On met un vecteur $\overrightarrow{RS}$ à part :

$$\begin{aligned}\vec{c} = \overrightarrow{RS} \\ + \left(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR}\right).\end{aligned}$$

Parenthèse. D'après la relation de Chasles :

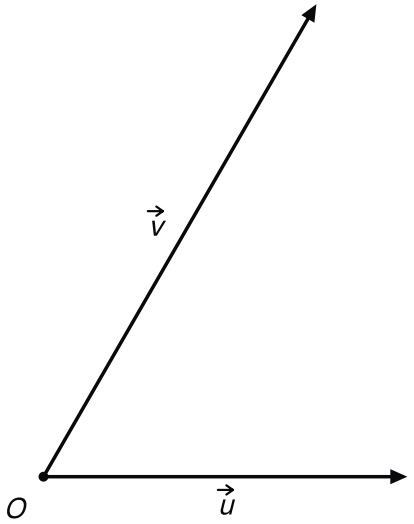
$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{RR} \\ = \vec{0}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{c} = \overrightarrow{RS}$.

Exercice 3

Construire une combinaison de deux vecteurs

On donne un point O et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : $\vec{u}$ mesure 2 cm et $\vec{v}$ mesure 3 cm. Trace-les sur ton cahier.



Les deux vecteurs donnés, u de 2 cm et v de 3 cm, tracés à partir du point O.

1.

Donner la direction, le sens et la longueur du vecteur $3\,\vec{u}$, puis du vecteur $-\frac{2}{3}\,\vec{v}$.

INDICE

Outil : la définition du produit d'un vecteur par un réel. **Point délicat :** le signe du réel décide du sens.

CORRIGÉ

D'après la définition du produit d'un vecteur par un réel :

- le vecteur $3\,\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$ et le même sens, car $3 > 0$; sa longueur vaut $3 \times 2 = 6$ cm ;
- le vecteur $-\frac{2}{3}\,\vec{v}$ a la même direction que $\vec{v}$ et le sens contraire, car $-\frac{2}{3} < 0$; sa longueur vaut $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ cm.

Conclusion. Le vecteur $3\,\vec{u}$ a la direction et le sens de $\vec{u}$ et mesure 6 cm ; le vecteur $-\frac{2}{3}\,\vec{v}$ a la direction de $\vec{v}$, le sens contraire, et mesure 2 cm.

2.

Construire le point P tel que $\overrightarrow{OP} = 3\,\vec{u} - \frac{2}{3}\,\vec{v}$, en décrivant les étapes.

INDICE

Début : place d'abord le point E tel que $\overrightarrow{OE} = 3\,\vec{u}$. **Point délicat :** le second vecteur se reporte à partir de E, et non à partir de O.

CORRIGÉ

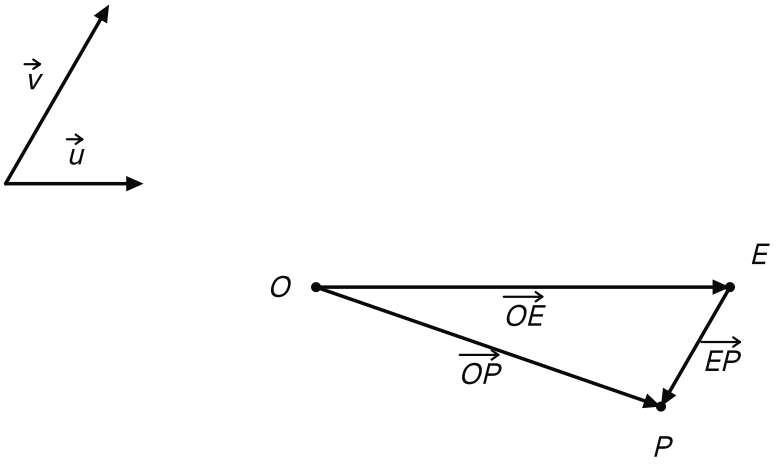
Premier report. On place le point E tel que $\overrightarrow{OE} = 3\,\vec{u}$: il est à 6 cm de O, dans le sens de $\vec{u}$.

Second report. À partir de E, et non de O, on place le point P tel que $\overrightarrow{EP} = -\frac{2}{3}\,\vec{v}$: il est à 2 cm de E, dans le sens contraire de $\vec{v}$.

Vérification. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EP} \\ &= 3\,\vec{u} - \frac{2}{3}\,\vec{v}.\end{aligned}$$

Conclusion. Le point P, obtenu en reportant $3\,\vec{u}$ depuis O puis $-\frac{2}{3}\,\vec{v}$ depuis E, vérifie bien $\overrightarrow{OP} = 3\,\vec{u} - \frac{2}{3}\,\vec{v}$.



Pour obtenir P, on avance de trois fois u depuis O jusqu'à E, puis on recule des deux tiers de v depuis E.

3.

Construire de même le point Q tel que $\overrightarrow{OQ} = -\vec{u} + 2\,\vec{v}$, puis exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

INDICE

Outil : la relation de Chasles, en passant par O. **Point délicat :** $\overrightarrow{PO}$ est l'opposé de $\overrightarrow{OP}$.

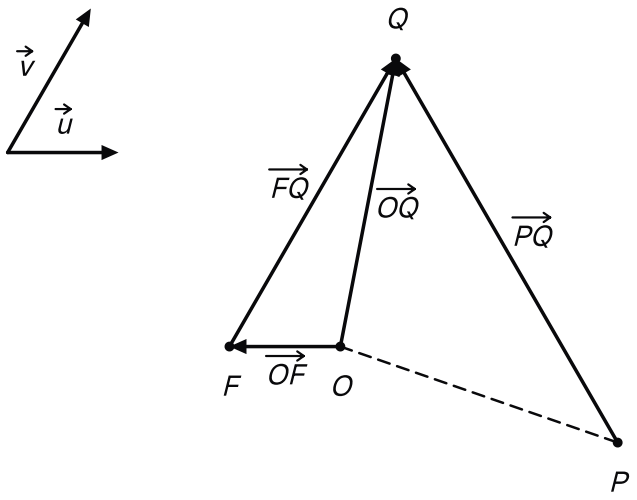
CORRIGÉ

Construction de Q. On place F tel que $\overrightarrow{OF} = -\vec{u}$, à 2 cm de O dans le sens contraire de $\vec{u}$. À partir de F, on place Q tel que $\overrightarrow{FQ} = 2\,\vec{v}$, à 6 cm de F dans le sens de $\vec{v}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FQ}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OQ} = -\vec{u} + 2\,\vec{v}$.

Calcul de $\overrightarrow{PQ}$. On passe par O (relation de Chasles), avec $\overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP}$. La dernière ligne regroupe les termes en $\vec{u}$ et en $\vec{v}$ (règles de calcul) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} \\ &= -3\,\vec{u} + \frac{2}{3}\,\vec{v} - \vec{u} + 2\,\vec{v} \\ &= -4\,\vec{u} + \frac{8}{3}\,\vec{v}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{PQ} = -4\,\vec{u} + \frac{8}{3}\,\vec{v}$.



Le point Q s'obtient en reculant d'un u depuis O jusqu'à F, puis en avançant de deux fois v ; le vecteur PQ relie ensuite P à Q.

Exercice 4

Appliquer les règles de calcul

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.

1.

Réduire $\vec{a} = 3\,(\vec{u} - 2\,\vec{v}) - 2\,(\vec{u} - 3\,\vec{v})$.

INDICE

Outil : les règles de calcul. **Début :** développe chaque parenthèse. **Point délicat :** le signe moins placé devant 2 change les deux signes de la seconde parenthèse.

CORRIGÉ

On développe chaque parenthèse, puis on regroupe les termes, d'après les règles de calcul sur le produit par un réel :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\,\vec{u} - 6\,\vec{v} - 2\,\vec{u} + 6\,\vec{v}\\ &= (3-2)\,\vec{u} + (-6+6)\,\vec{v}\\ &= \vec{u}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{a} = \vec{u}$.

2.

Réduire $\vec{b} = \frac{1}{3}\,(6\,\vec{u} + 3\,\vec{v}) - \vec{v}$.

INDICE

Outil : $a\,(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$. **Début :** calcule $\frac{1}{3} \times 6$ et $\frac{1}{3} \times 3$.

CORRIGÉ

D'après les règles de calcul sur le produit par un réel, $a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$ et $a\,(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$. Avec $\frac{1}{3} \times 6 = 2$ et $\frac{1}{3} \times 3 = 1$:

$$\frac{1}{3}\,(6\,\vec{u} + 3\,\vec{v}) = 2\,\vec{u} + \vec{v}.$$

On remplace dans $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= 2\,\vec{u} + \vec{v} - \vec{v}\\ &= 2\,\vec{u}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{b} = 2\,\vec{u}$.

3.

Trouver le vecteur $\vec{w}$ tel que $2\,\vec{w} + \vec{u} = 3\,\vec{u} - 4\,\vec{v}$.

INDICE

Début : ajoute $-\vec{u}$ aux deux membres. **Ensuite :** multiplie les deux membres par $\frac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Isoler $2\,\vec{w}$. On ajoute $-\vec{u}$ aux deux membres de l'égalité :

$$2\,\vec{w} = 2\,\vec{u} - 4\,\vec{v}.$$

Isoler $\vec{w}$. On multiplie les deux membres par $\frac{1}{2}$; d'après les règles de calcul sur le produit par un réel :

$$\vec{w} = \vec{u} - 2\,\vec{v}.$$

Contrôle. On reporte dans le premier membre :

$$\begin{aligned} &2\,(\vec{u} - 2\,\vec{v}) + \vec{u} \\ &= 2\,\vec{u} - 4\,\vec{v} + \vec{u} \\ &= 3\,\vec{u} - 4\,\vec{v}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le vecteur cherché est $\vec{w} = \vec{u} - 2\,\vec{v}$.

Exercice 5

Reconnaître des vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. On pose :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\,\vec{u} - 3\,\vec{v},\\ \vec{b} &= -4\,\vec{u} + 6\,\vec{v},\\ \vec{c} &= \frac{2}{3}\,\vec{u} - \vec{v}.\end{aligned}$$

1.

Trouver un réel k tel que $\vec{b} = k\,\vec{a}$.

INDICE

Outil : compare les coefficients de $\vec{u}$, puis ceux de $\vec{v}$. **Point délicat :** le même réel doit convenir pour les deux.

CORRIGÉ

On cherche un même réel k pour les deux coefficients. Celui de $\vec{u}$ passe de 2 à -4 : on essaie $k = -2$, et l'on contrôle avec $\vec{v}$, car $(-2)\times(-3) = 6$. D'après les règles de calcul sur le produit par un réel :

$$\begin{aligned}-2\,\vec{a} &= -4\,\vec{u} + 6\,\vec{v}\\ &= \vec{b}.\end{aligned}$$

Conclusion. Le réel $k = -2$ convient : $\vec{b} = -2\,\vec{a}$.

2.

Exprimer $\vec{c}$ en fonction de $\vec{a}$.

INDICE

Début : procède comme à la question 1, avec $\vec{c}$ et $\vec{a}$. **Point délicat :** contrôle avec le coefficient de $\vec{v}$.

CORRIGÉ

Le coefficient de $\vec{u}$ passe de 2 à $\frac{2}{3}$, soit $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\times 2$; on contrôle avec $\vec{v}$: $\frac{1}{3}\times(-3) = -1$. D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\,\vec{a} &= \frac{2}{3}\,\vec{u} - \vec{v}\\ &= \vec{c}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{c} = \frac{1}{3}\,\vec{a}$.

3.

Les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ont-ils le même sens que $\vec{a}$? Justifier avec les réels trouvés.

INDICE

Outil : le signe du réel k donne le sens.

CORRIGÉ

Le vecteur $\vec{a}$ n'est pas nul. Si l'on avait $\vec{a} = \vec{0}$, on aurait $2\,\vec{u} = 3\,\vec{v}$, soit $\vec{u} = \frac{3}{2}\,\vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seraient colinéaires, ce qui est exclu. Le vecteur $\vec{a}$ a donc une direction et un sens.

Sens de $\vec{b}$. On a $\vec{b} = -2\,\vec{a}$, avec $-2 < 0$: $\vec{b}$ est de sens contraire à $\vec{a}$, d'après la définition du produit d'un vecteur par un réel.

Sens de $\vec{c}$. On a $\vec{c} = \frac{1}{3}\,\vec{a}$, avec $\frac{1}{3} > 0$: $\vec{c}$ a le même sens que $\vec{a}$.

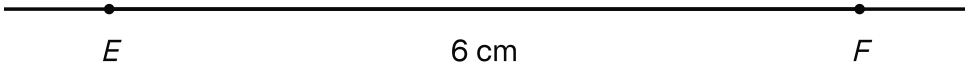
Conclusion. Le vecteur $\vec{c}$ a le même sens que $\vec{a}$; le vecteur $\vec{b}$ n'a pas le même sens que $\vec{a}$: il est de sens contraire.

Exercice 6

Lire et situer des points par leur abscisse

E et F sont deux points tels que $EF = 6$ cm. On définit trois points de la droite (EF) par :

$$\overrightarrow{EP} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EF},$$
$$\overrightarrow{EQ} = -2\,\overrightarrow{EF},$$
$$\overrightarrow{FR} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{FE}.$$



La droite (EF) avec les deux points de départ E et F, distants de 6 cm.

1.

Donner l'abscisse de P, puis celle de Q, dans le repère (E, F).

INDICE

Outil : la définition de l'abscisse : on lit le réel x dans $\overrightarrow{EM} = x\,\overrightarrow{EF}$.

CORRIGÉ

D'après la définition de l'abscisse, un point M de la droite (EF) a pour abscisse dans le repère (E, F) le réel x tel que $\overrightarrow{EM} = x\,\overrightarrow{EF}$. Les égalités de l'énoncé se lisent directement :

- $\overrightarrow{EP} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EF}$, donc P a pour abscisse $\frac{2}{3}$;
- $\overrightarrow{EQ} = -2\,\overrightarrow{EF}$, donc Q a pour abscisse -2.

Conclusion. Dans le repère (E, F), le point P a pour abscisse $\frac{2}{3}$ et le point Q a pour abscisse -2.

2.

Calculer l'abscisse de R dans le repère (E, F). Que représente le point R pour le segment $[EF]$?

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Point délicat :** le vecteur donné part de F, alors que l'abscisse se lit sur un vecteur qui part de E.

CORRIGÉ

Vecteur d'origine E. Le vecteur donné part de F. On passe par F avec la relation de Chasles, puis on utilise $\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EF}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ER} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FR} \\ &= \overrightarrow{EF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}.\end{aligned}$$

Abscisse. D'après la définition de l'abscisse, R a pour abscisse $\frac{1}{2}$ dans le repère (E, F).

Nature de R. L'égalité $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ est l'une des caractérisations vectorielles du milieu.

Conclusion. Le point R a pour abscisse $\frac{1}{2}$ dans le repère (E, F) : c'est le milieu du segment $[EF]$.

3.

Situer chacun des points P, Q, R par rapport au segment $[EF]$ et à la demi-droite $[EF)$, puis calculer EP, EQ et ER.

INDICE

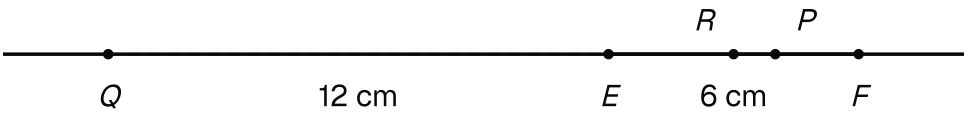
Outil : la propriété qui relie l'abscisse au segment et à la demi-droite. **Point délicat :** pour une abscisse négative, la longueur se calcule avec l'opposé de l'abscisse.

CORRIGÉ

D'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », un point de (EF) d'abscisse x est sur la demi-droite $[EF)$ si et seulement si $x \geq 0$, et sur le segment $[EF]$ si et seulement si $0 \leq x \leq 1$. Pour les longueurs, la définition du produit par un réel donne la distance de E à ce point : $x \times EF$ si $x \geq 0$, et $-x \times EF$ si $x < 0$.

- **Point P.** $0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$: P est sur le segment $[EF]$, donc aussi sur $[EF)$, et $EP = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ cm.
- **Point Q.** $-2 < 0$: Q n'est pas sur $[EF)$, il est sur la demi-droite opposée, et $EQ = 2 \times 6 = 12$ cm.
- **Point R.** $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$: R est sur le segment $[EF]$, donc aussi sur $[EF)$, et $ER = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm.

Conclusion. Les points P et R sont sur le segment $[EF]$, donc sur la demi-droite $[EF)$; le point Q est sur la demi-droite opposée à $[EF)$. On a $EP = 4$ cm, $EQ = 12$ cm et $ER = 3$ cm.

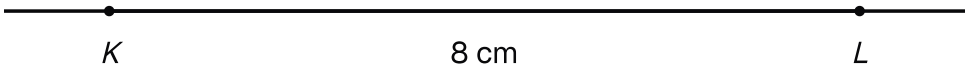


Sur la droite (EF), P et R tombent entre E et F, tandis que Q se trouve de l'autre côté de E.

Exercice 7

Un point défini par une égalité vectorielle

K et L sont deux points tels que $KL = 8$ cm. Le point M vérifie $\overrightarrow{KM} = 3\,\overrightarrow{ML}$.



La droite (KL) avec les deux points donnés K et L, distants de 8 cm.

1.

Écrire $\overrightarrow{ML}$ en passant par le point K, puis remplacer dans l'égalité qui définit M.

INDICE

Outil : la relation de Chasles. **Début :** $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KL}$.

CORRIGÉ

D'après la relation de Chasles, en passant par K, puis avec $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{KM}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ML} &= \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KL} \\ &= -\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KL}.\end{aligned}$$

On remplace dans $\overrightarrow{KM} = 3\,\overrightarrow{ML}$, puis on développe (règles de calcul sur le produit par un réel) :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KM} &= 3\,(-\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KL}) \\ &= -3\,\overrightarrow{KM} + 3\,\overrightarrow{KL}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KL}$, et l'égalité qui définit M devient $\overrightarrow{KM} = -3\,\overrightarrow{KM} + 3\,\overrightarrow{KL}$.

2.

En déduire $\overrightarrow{KM}$ en fonction de $\overrightarrow{KL}$, puis l'abscisse de M dans le repère (K, L).

INDICE

Début : regroupe les termes en $\overrightarrow{KM}$ dans le membre de gauche. **Ensuite :** divise par le coefficient obtenu.

CORRIGÉ

Regrouper. On ajoute $3\,\overrightarrow{KM}$ aux deux membres de l'égalité obtenue à la question 1 :

$$4\,\overrightarrow{KM} = 3\,\overrightarrow{KL}.$$

Isoler. On multiplie les deux membres par $\frac{1}{4}$ (règles de calcul) :

$$\overrightarrow{KM} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{KL}.$$

Abscisse. D'après la définition de l'abscisse, le réel $\frac{3}{4}$ est l'abscisse de M dans le repère (K, L).

Conclusion. $\overrightarrow{KM} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{KL}$, et M a pour abscisse $\frac{3}{4}$ dans le repère (K, L).

3.

Situer le point M, puis calculer KM et ML. Contrôler que $KM = 3 \times ML$.

INDICE

Outil : la propriété « abscisse, segment et demi-droite ». **Point délicat :** $ML = KL - KM$, car M est entre K et L.

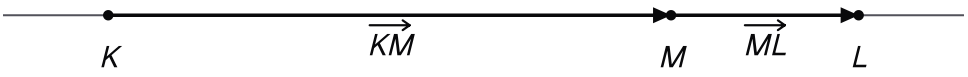
CORRIGÉ

Position. On a $0 \leq \frac{3}{4} \leq 1$: d'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », le point M est sur le segment $[KL]$.

Longueurs. D'après la définition du produit par un réel, $KM = \frac{3}{4} \times 8 = 6$ cm. Comme M est entre K et L, $ML = KL - KM = 8 - 6 = 2$ cm.

Contrôle. $3 \times ML = 3 \times 2 = 6$, qui est bien la longueur KM.

Conclusion. Le point M est sur le segment $[KL]$, avec $KM = 6$ cm et $ML = 2$ cm ; on a bien $KM = 3 \times ML$.

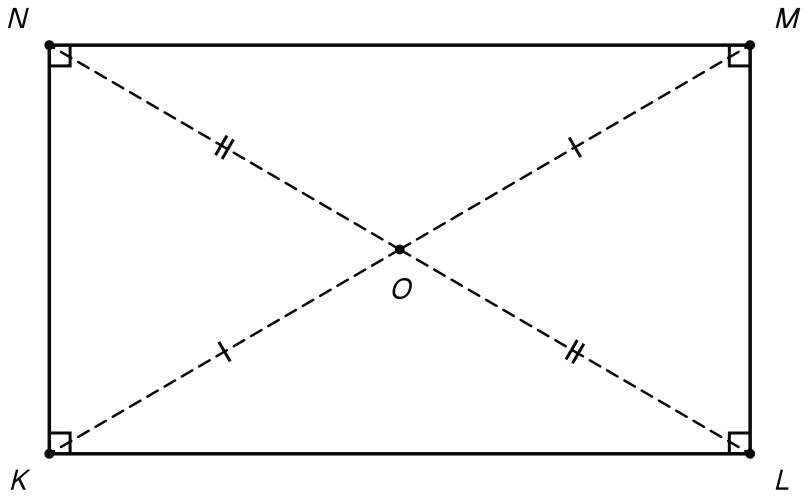


Le point M partage le segment [KL] en deux morceaux de 6 cm et 2 cm, le premier triple du second.

Exercice 8

Le centre d'un rectangle

$KLMN$ est un rectangle de centre O. Rappel du collège : ses diagonales $[KM]$ et $[LN]$ ont le même milieu, le point O.



Le rectangle KLMN et ses diagonales [KM] et [LN], qui ont le même milieu O.

1.

Justifier que $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ et que $\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

INDICE

Outil : les caractérisations du milieu. **Début :** de quels segments O est-il le milieu ?

CORRIGÉ

Le centre O du rectangle est le milieu de $[KM]$ et le milieu de $[LN]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, appliquées à chacun de ces deux segments :

$$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} = \vec{0},$$
$$\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}.$$

Conclusion. Les sommes $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON}$ sont toutes deux égales au vecteur nul.

2.

Exprimer $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{NO}$.

INDICE

Outil : la caractérisation « pour tout point » du milieu, appliquée au segment $[KM]$ et au point N.

CORRIGÉ

Le point O est le milieu de $[KM]$. La dernière des caractérisations vectorielles du milieu vaut pour n'importe quel point du plan ; on la prend au point N :

$$\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM} = 2\,\overrightarrow{NO}.$$

Conclusion. La somme $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM}$ est égale au vecteur $2\,\overrightarrow{NO}$.

3.

En déduire que $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NL}$.

INDICE

Outil : O est aussi le milieu de $[NL]$. **Point délicat :** écris $\overrightarrow{NO}$ comme la moitié d'un vecteur.

CORRIGÉ

Le point O est aussi le milieu de $[NL]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, $\overrightarrow{NO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NL}$; en multipliant par 2 (règles de calcul), $2\,\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NL}$.

Avec la question 2 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM} &= 2\,\overrightarrow{NO} \\ &= \overrightarrow{NL}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NL}$.