BURHAN

Calcul vectoriel dans le plan

Tronc Commun · Sciences · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/tc/sciences/mathematiques/calcul-vectoriel-dans-le-plan/cours

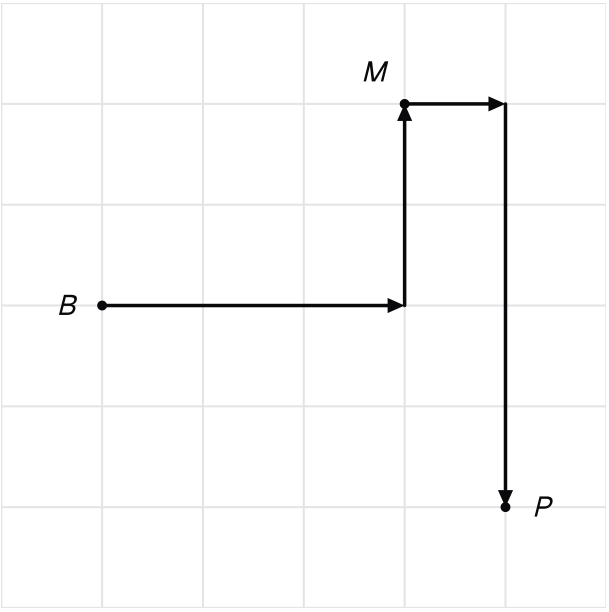
Chapitre	Semestre
Calcul vectoriel dans le plan	Semestre 1

Deux déplacements, un seul

Le quartier de Salma est un quadrillage de rues : les unes vont d'ouest en est, les autres du sud au nord.

Un matin, elle part de la boulangerie. Elle marche 3 pâtés de maisons vers l'est, puis 2 vers le nord : elle arrive au marché. Ensuite, elle marche 1 pâté vers l'est, puis 4 vers le sud : elle arrive à la pharmacie.

Dessine ce trajet sur ton cahier, sur un quadrillage.



Sur le quadrillage des rues, le trajet de Salma : de la boulangerie B au marché M, puis du marché à la pharmacie P, pâté par pâté.

Devine : Un seul déplacement

Salma veut aller de la boulangerie à la pharmacie en un seul déplacement. Lequel ?

A. 4 pâtés vers l'est et 6 vers le nord.

Faux.

Le second trajet descend vers le sud : ses 4 pâtés vers le sud l'emportent sur les 2 pâtés montés. Il reste 2 pâtés vers le sud.

B. Un trajet de 10 pâtés de maisons.

Faux.

Le total $3+2+1+4$ compte les pâtés parcourus. Le déplacement direct est plus court.

C. 4 pâtés vers l'est et 2 vers le sud.

Juste.

Juste : vers l'est, $3+1=4$; vers le nord, 2 montés puis 4 descendus.

D. 2 pâtés vers l'est et 2 vers le sud.

Faux.

Les deux trajets vont vers l'est : leurs pâtés vers l'est s'ajoutent.

Correction

Vers l'est. Salma fait 3 pâtés, puis 1 : 4 en tout.

Vers le nord. Elle monte de 2, puis descend de 4 : elle finit 2 pâtés au sud de son départ.

Conclusion. Le déplacement unique est de 4 pâtés vers l'est et 2 vers le sud. Il ne dépend que du départ et de l'arrivée.

Un déplacement comme celui-ci a une direction, un sens et une longueur : c'est un **vecteur**. Enchaîner deux déplacements, c'est **additionner** deux vecteurs.

Dans ce chapitre, tu apprends à calculer avec des vecteurs. Tu t'en sers ensuite pour démontrer que trois points sont alignés, ou que deux droites sont parallèles. Tu repères aussi un point d'une droite par un seul nombre.

Chaque figure se fait sur ton cahier, à la règle et au compas.

Rappels : égalité de deux vecteurs et somme de vecteurs

Deux vecteurs égaux

Rappel du collège. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ décrit la translation qui envoie A sur B. Il a une **direction**, celle de la droite (AB). Il a un **sens**, de A vers B. Il a une **longueur**, la distance AB.

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur. Au lycée, on traduit cette égalité par un parallélogramme.

Devine : Un parallélogramme

Trace un parallélogramme $ABCD$ sur ton cahier, sommets dans cet ordre. Quel vecteur est égal à $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{CD}$

Faux.

Même direction et même longueur, mais $\overrightarrow{CD}$ va de C vers D : il est de sens contraire.

B. $\overrightarrow{DC}$

Juste.

Juste : $\overrightarrow{DC}$ a la direction, le sens et la longueur de $\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{BC}$

Faux.

Le côté $[BC]$ n'est pas parallèle à (AB) : la direction n'est pas la même.

D. $\overrightarrow{AC}$

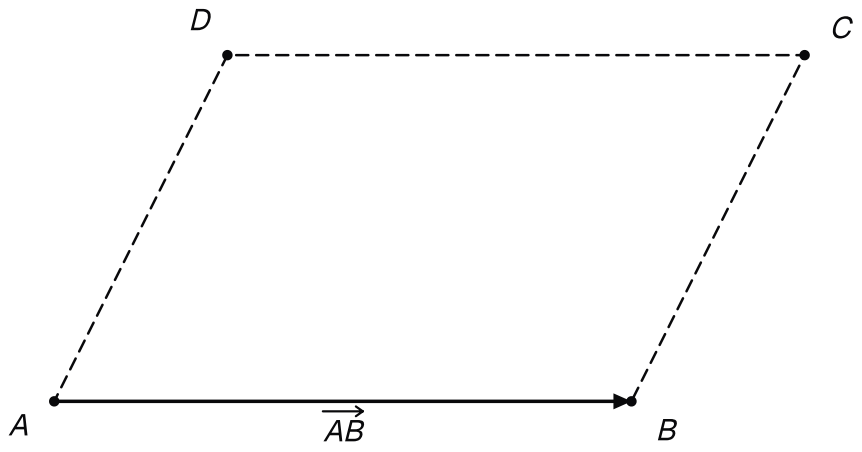
Faux.

Le segment $[AC]$ est une diagonale : il n'est pas parallèle à (AB).

Correction

Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur. Sur la figure, on va de A vers B, et de D vers C, dans le même sens.

Conclusion. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est son opposé.



Un parallélogramme ABCD dont les sommets se suivent dans l'ordre du tour, avec le vecteur AB tracé sur le côté [AB].

Définition : Égalité de deux vecteurs

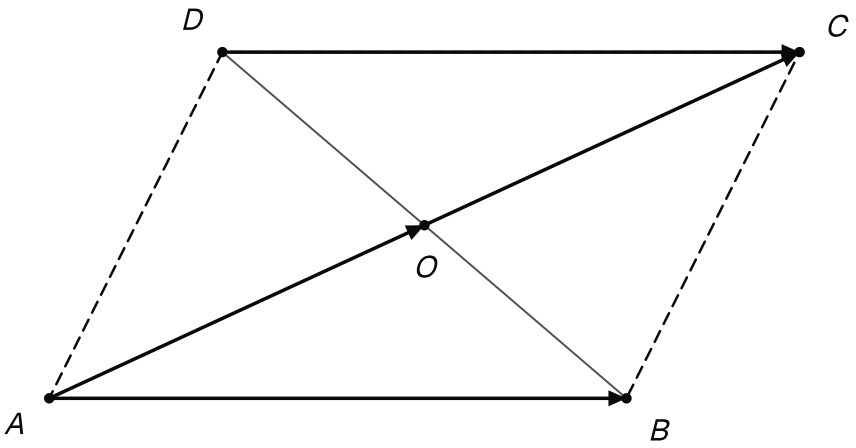
Soit A, B, C, D quatre points du plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsque les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu, c'est-à-dire lorsque $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'**opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$; on le note $-\overrightarrow{AB}$.
- Un point A et un vecteur $\vec{u}$ étant donnés, il existe un **unique** point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Exemple : lire des égalités dans un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O : ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu O.

- Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont donc le même milieu O. La définition de l'égalité de deux vecteurs donne alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
- Le point O est le milieu de $[AC]$: on lit sur la figure $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.
- L'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$, et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.



Dans le parallélogramme ABCD de centre O, le vecteur AB et le vecteur DC ont même direction, même sens et même longueur ; sur la diagonale [AC], le vecteur AO et le vecteur OC sont égaux.

Attention : l'ordre des sommets

✗ « $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. »

✓ On suit le tour de la figure : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ va dans l'autre sens : c'est $-\overrightarrow{AB}$. Avant d'écrire une égalité, repère où va chaque flèche sur ta figure.

La somme et la relation de Chasles

Devine : Deux déplacements enchaînés

Dans le parallélogramme $ABCD$, on fait le déplacement $\overrightarrow{AB}$, puis le déplacement $\overrightarrow{BC}$. Quel déplacement unique les remplace ?

A. $\overrightarrow{AC}$

Juste.
Juste : on part de A et on arrive en C, en passant par B.

B. $\overrightarrow{CA}$

Faux.
Le départ est A et l'arrivée C : le vecteur va de A vers C.

C. $\overrightarrow{BD}$

Faux.
Les deux déplacements passent par B, mais le départ est A.

D. $\overrightarrow{AD}$

Faux.
Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal à $\overrightarrow{BC}$, le second déplacement seul : il manque le premier.

Correction
Le premier déplacement mène de A à B, le second de B à C. Le déplacement unique mène de A à C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

C'est la **relation de Chasles**, que tu as vue au collège.

Définition : Somme de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point du plan. On place le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$; on admet qu'elle ne dépend pas du point A choisi.

En particulier, pour tous points A, B, C du plan, on a la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Exemple : la relation de Chasles

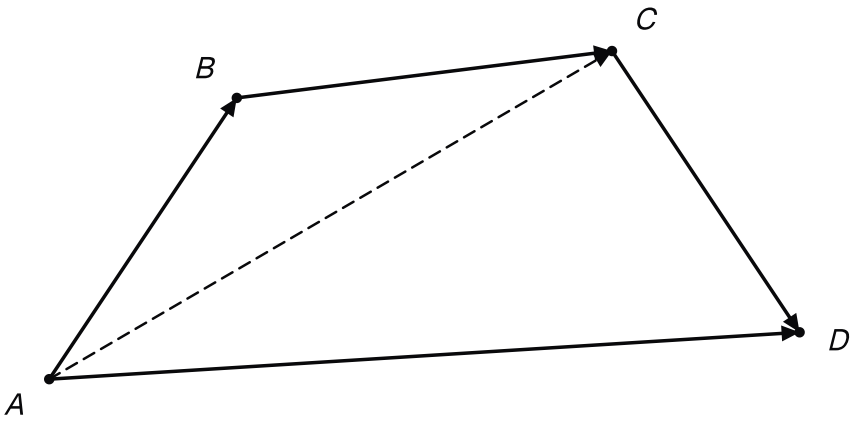
Soit A, B, C, D quatre points quelconques. Fais une figure sur ton cahier.

Une fois. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Deux fois de suite. On passe d'abord par B, puis par C :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Dans l'autre sens. On **décompose** un vecteur en passant par un point : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.



Quatre points A, B, C, D : le chemin A, B, C, D donne le vecteur AC en route, puis le vecteur AD à l'arrivée.

Calculer avec des sommes

Propriété : Propriétés de l'addition des vecteurs

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan :

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}, \qquad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}),$$
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}, \qquad \vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}.$$

La **différence** $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+(-\vec{v})$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Tu l'utilises déjà depuis le collège.

Exemple : simplifier une somme

Soit A, B, C, D quatre points. On simplifie $\vec{s}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

La différence. Elle devient une somme : $-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DB}$.

L'ordre des termes. Par commutativité, $\vec{s}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$.

La relation de Chasles. Les lettres s'enchaînent, on l'applique deux fois :

$$\begin{aligned}\vec{s}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\\&=\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\vec{s}=\overrightarrow{AB}$.

La méthode, un piège, puis à toi

Méthode : simplifier une somme de vecteurs

1. **Transforme les différences** : $-\overrightarrow{AB}$ devient $\overrightarrow{BA}$.
2. **Range les termes** : l'extrémité de chaque vecteur doit être l'origine du suivant.
3. **Applique la relation de Chasles**, autant de fois que nécessaire.
4. **Supprime les vecteurs nuls** : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Attention : des lettres qui s'enchaînent

✗ « $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. »

✓ La relation de Chasles exige que l'extrémité du premier vecteur soit l'origine du second. Ici, les deux vecteurs partent de A : elle ne s'applique pas telle quelle. Tu verras juste après la règle qui convient. De même, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ne se simplifie pas sans autre information.

À toi : Trois simplifications

Soit A, B, C, D quatre points. Simplifie $\vec{u} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$, puis $\vec{v} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$, puis $\vec{w} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Applique la méthode : les différences en sommes, puis les termes rangés.
Indice 2
Pour $\vec{v}$, écris $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$. Pour $\vec{w}$, commence par $\overrightarrow{DA}$.
Indice 3
Point délicat : une somme qui revient à son point de départ vaut $\vec{0}$.

Réponse
Calcul de $\vec{u}$. Par commutativité, puis d'après la relation de Chasles, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Calcul de $\vec{v}$. On remplace la différence : $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$. D'après la relation de Chasles, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

Calcul de $\vec{w}$. Par commutativité, on range les termes :

$$\vec{w} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

D'après la relation de Chasles, appliquée trois fois, $\vec{w} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

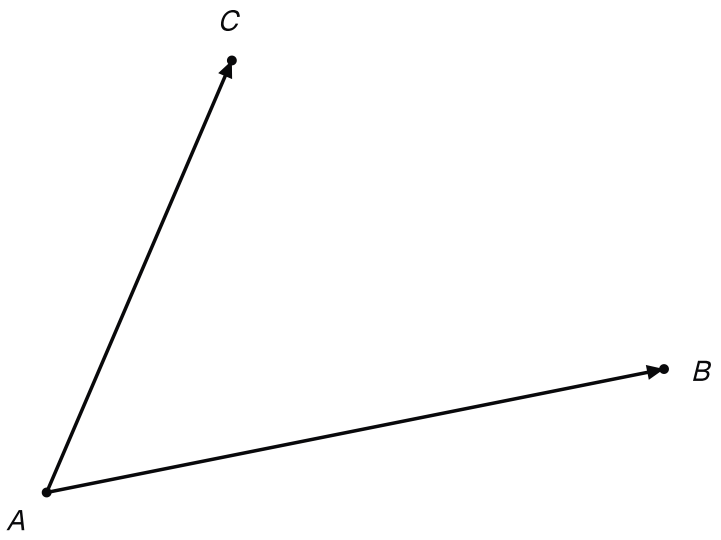
Conclusion. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \vec{0}$.

Règle du parallélogramme et différence

Deux forces sur un même point

En clair. Deux cordes tirent un même anneau, placé au point A. La première tire selon $\overrightarrow{AB}$, la seconde selon $\overrightarrow{AC}$. En physique, les deux forces ont l'effet d'une seule : leur somme.

Ici, les deux vecteurs partent du même point : leurs lettres ne s'enchaînent pas. La relation de Chasles seule ne suffit donc pas.



L'anneau est au point A : les deux cordes tirent selon le vecteur AB et le vecteur AC, qui partent du même point.

Devine : Deux forces, une seule

Trace un triangle ABC, puis le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme : son tour est A, B, D, C. À quel vecteur la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est-elle égale ?

A. $\overrightarrow{BC}$

Faux.

La relation de Chasles ne s'applique pas à deux vecteurs de même origine.

B. $\overrightarrow{CB}$

Faux.

Ce vecteur est la différence $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, pas la somme.

C. $\overrightarrow{AD}$

Juste.

Juste : la somme part de A et suit la diagonale du parallélogramme.

D. $\overrightarrow{DA}$

Faux.

> La diagonale est la bonne, mais le sens est inversé : la somme part de A.
>
> **Correction**
> Sur ta figure, la somme part de A et suit la diagonale $[AD]$ du parallélogramme : elle vaut $\overrightarrow{AD}$. La propriété qui suit le démontre.

La règle et sa preuve

Ta figure suggère que la somme suit une diagonale. **Pourquoi est-ce vrai ?** Un parallélogramme fournit un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$, qui part de B. La relation de Chasles fait alors le reste.

Propriété : Règle du parallélogramme et différence de deux vecteurs

Soit A, B, C trois points du plan.

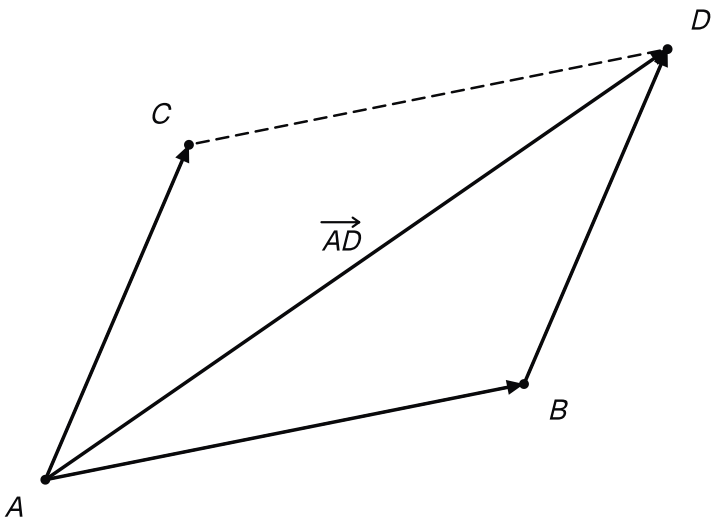
- Si D est le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme, éventuellement aplati, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
- Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Démonstration

Étape 1. Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme : ses diagonales $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, appliquée aux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ (les segments $[AD]$ et $[CB]$ ont le même milieu), on a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Étape 2. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Étape 3. Par définition de la différence et de l'opposé, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$. Par commutativité de l'addition, puis d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.



Dans le parallélogramme ABDC, le vecteur BD est égal au vecteur AC : il part de B, et la relation de Chasles conduit de A à D.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux vecteurs de même origine ne s'additionnent pas directement par la relation de Chasles. On remplace l'un d'eux par un vecteur égal, qui part de l'extrémité de l'autre : le parallélogramme le fournit.

Pour une différence, on la change d'abord en somme avec l'opposé. Puis on range les termes.

Vérifie : L'étape de la différence

Dans l'étape 3 de la preuve, quelle propriété permet d'écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$?

A. La relation de Chasles.

Faux.

Elle sert juste après, pour passer de $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{CB}$.

B. La définition de l'opposé.

Faux.

Elle a servi avant, pour écrire $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$.

C. La règle du parallélogramme.

Faux.

Aucun parallélogramme n'intervient dans la partie sur la différence.

D. La commutativité de l'addition.

Juste.

Juste : on échange l'ordre des deux termes pour que les lettres s'enchaînent.

Correction

On échange les deux termes : c'est la commutativité de l'addition, une propriété admise. Les lettres s'enchaînent alors : de C vers A, puis de A vers B. La relation de Chasles donne $\overrightarrow{CB}$.

Exemple : somme et différence dans un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ partent tous deux de A.

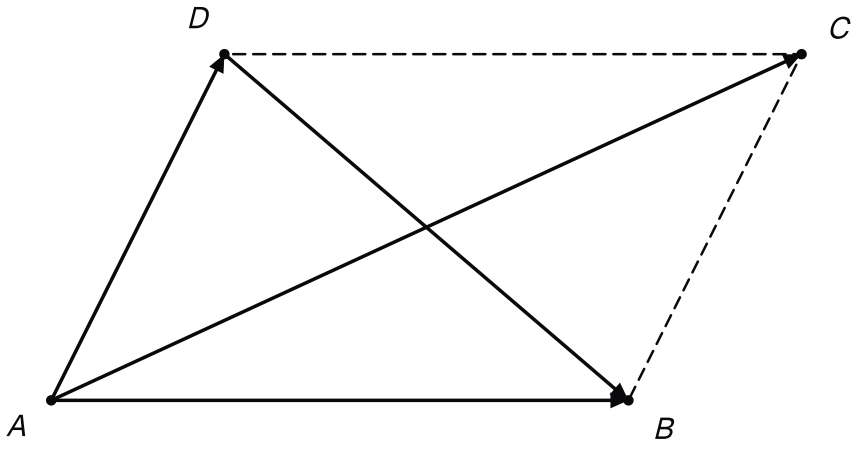
Somme. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Par la règle du parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Différence. D'après la règle de la différence :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

Contrôle. Sur ta figure, la somme suit la diagonale $[AC]$, la différence suit l'autre diagonale, de D vers B.



Dans le parallélogramme ABCD, la somme du vecteur AB et du vecteur AD suit la diagonale de A vers C ; leur différence suit l'autre diagonale, de D vers B.

Un piège, puis à toi

Attention : vecteurs et longueurs

✗ « $AB = 3$ cm et $BC = 4$ cm, donc $AC = 7$ cm. »

✓ La relation de Chasles porte sur des **vecteurs** : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Pour les longueurs, on a seulement $AC \leq AB + BC$, ici $AC \leq 7$ cm. L'égalité n'a lieu que si B appartient au segment $[AC]$. C'est le piège du trajet de Salma : 10 pâtés parcourus, mais un déplacement plus court.

À toi : Deux calculs depuis un sommet

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Simplifie $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, puis $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Les deux vecteurs partent de B : pense à la règle du parallélogramme et à la règle de la différence.
Indice 2
Le quadrilatère $BADC$ est le parallélogramme $ABCD$, parcouru à partir de B.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$ va de A vers C, et non de C vers A.

Réponse
Somme. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$: le quadrilatère $BADC$ est un parallélogramme. Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Différence. D'après la règle de la différence, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

Contrôle. On a $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ et, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: on retrouve le même vecteur.

Conclusion. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

Multiplier un vecteur par un réel

Aller plus loin, ou dans l'autre sens

En clair. Reprends un déplacement $\vec{u}$ sur le quadrillage de Salma. Refais-le deux fois de suite : tu obtiens un déplacement de même direction et de même sens, deux fois plus long. On le note $2\,\vec{u}$.

Fais-le à l'envers : la direction reste, le sens change. On le note $-\vec{u}$. Multiplier par un réel non nul garde toujours la direction.

Devine : Un point à placer

Soit A et B deux points tels que $AB = 3$ cm, et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Où se trouve le point C tel que $\overrightarrow{AC} = -2\,\vec{u}$?

A. Sur $[AB)$, à 6 cm de A.
Faux.
Le signe moins change le sens : C n'est pas du côté de B.

B. Sur (AB), du côté opposé à B, à 6 cm de A.

Juste.

Juste : sens contraire, et longueur $2 \times 3 = 6$ cm.

C. Sur (AB), du côté opposé à B, à 5 cm de A.

Faux.

Le nombre 5 vient de $3 + 2$: on multiplie la longueur par 2, on n'ajoute pas 2.

D. Hors de la droite (AB).

Faux.

Multiplier par un réel non nul garde la direction : C est sur la droite (AB).

Correction

Le vecteur $-2\,\vec{u}$ a la direction de $\vec{u}$, le sens contraire, et une longueur deux fois plus grande.

Conclusion. C est sur la droite (AB), du côté opposé à B, avec $AC = 2 \times 3 = 6$ cm. Le point A est entre C et B.

La définition

Définition : Produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel.

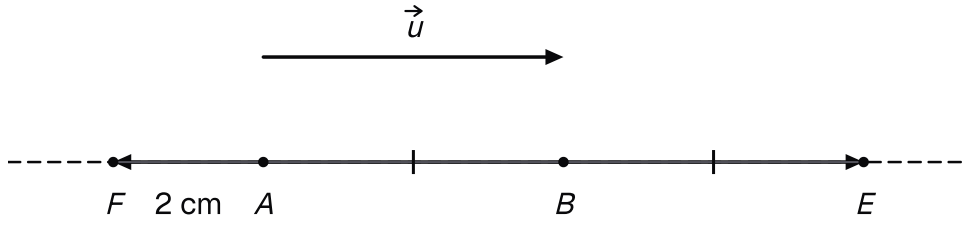
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $k = 0$, on pose $k\,\vec{u} = \vec{0}$.
- Sinon, on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, avec $A \neq B$. Le vecteur $k\,\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$, où C est le point de la droite (AB) tel que :
  - si $k > 0$: C appartient à la demi-droite $[AB)$ et $AC = k \times AB$;
  - si $k < 0$: C appartient à la demi-droite opposée à $[AB)$ et $AC = -k \times AB$.

Ainsi, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$, le vecteur $k\,\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$; il a le même sens si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$.

Exemple : construire deux produits

Soit A et B tels que $AB = 4$ cm, et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- Pour $2\,\vec{u}$: $2 > 0$. On place E sur la demi-droite $[AB)$, avec $AE = 2 \times 4 = 8$ cm. Alors $\overrightarrow{AE} = 2\,\vec{u}$, et B est le milieu de $[AE]$.
- Pour $-\frac{1}{2}\,\vec{u}$: $-\frac{1}{2} < 0$. On place F sur la demi-droite opposée à $[AB)$, avec $AF = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ cm. Alors $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\,\vec{u}$.
- Enfin, $0\,\vec{u} = \vec{0}$: il n'y a aucun point à construire.



Sur la droite (AB), le point E se trouve du côté de B, deux fois plus loin, et le point F du côté opposé, à 2 cm de A.

Les règles de calcul

Devine : Deux produits enchaînés

Reprends le point E : $\overrightarrow{AE} = 2\,\vec{u}$. Place le point H tel que $\overrightarrow{EH} = 3\,\vec{u}$. À quoi le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est-il égal ?

A. $6\,\vec{u}$

Faux.

On enchaîne deux déplacements : les réels s'ajoutent, ils ne se multiplient pas.

B. $\vec{u}$

Faux.

Les deux déplacements ont le même sens : rien ne se retranche.

C. $5\,\vec{u}$

Juste.

Juste : $AH = 8 + 12 = 20$ cm, soit 5×4 cm, dans le sens de $\vec{u}$.

D. $-5\,\vec{u}$

Faux.

Les deux déplacements vont dans le sens de $\vec{u}$: le résultat aussi.

Correction

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{u}$.

Sur la figure, E et H sont sur $[AB)$, avec $AE = 8$ cm et $EH = 3 \times 4 = 12$ cm. Donc $AH = 20$ cm, c'est-à-dire $5 \times AB$.

Conclusion. $\overrightarrow{AH} = 5\,\vec{u}$. Tu constates que $2\,\vec{u} + 3\,\vec{u} = (2+3)\,\vec{u}$.

Propriété : Règles de calcul sur le produit par un réel

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ du plan et tous réels a, b :

$$a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}, \qquad (a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u},$$

$$a\,(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}, \qquad 1\,\vec{u} = \vec{u}, \qquad (-1)\,\vec{u} = -\vec{u}.$$

De plus, $a\,\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque : Un résultat admis

Ce résultat est admis. Le calcul $2\,\vec{u} + 3\,\vec{u} = 5\,\vec{u}$, fait juste avant, en est un cas.

Exemple : réduire une expression

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned} &3\,(\vec{u} + \vec{v}) - 2\,\vec{u} \\ &= 3\,\vec{u} + 3\,\vec{v} - 2\,\vec{u} \\ &= \vec{u} + 3\,\vec{v}. \end{aligned}$$

De même, d'après la règle du produit de deux réels :

$$\begin{aligned} 2\,(-\frac{1}{2}\,\vec{v}) &= (2 \times (-\frac{1}{2}))\,\vec{v} \\ &= -\vec{v}. \end{aligned}$$

Enfin, si $5\,\vec{w} = \vec{0}$, alors $\vec{w} = \vec{0}$, car $5 \neq 0$.

Attention : le réel multiplie chaque terme

✗ « $2\,(\vec{u} + \vec{v}) = 2\,\vec{u} + \vec{v}$. »

✓ $2\,(\vec{u} + \vec{v}) = 2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$: le réel 2 multiplie les deux vecteurs. De même, $-3\,(\vec{u} - \vec{v}) = -3\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$: le signe moins change aussi le signe du second terme.

Construire un vecteur a u + b v

Méthode : construire un vecteur de la forme a u + b v

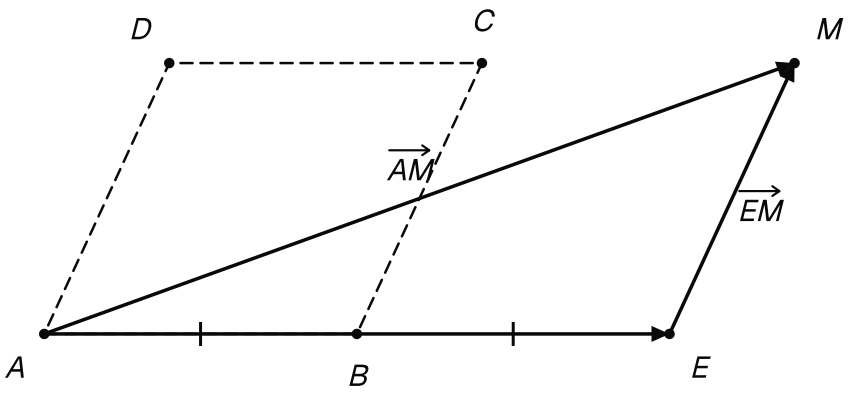
1. **Choisis un point de départ** A.
2. **Place le point** B tel que $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{u}$: direction de $\vec{u}$, sens donné par le signe de a.
3. **Place le point** C tel que $\overrightarrow{BC} = b\,\vec{v}$, en partant de B.
4. **Conclus** par la relation de Chasles : $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Exemple : une construction dans un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On construit le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

- On part de A. On place E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$: E est sur $[AB)$, et B est le milieu de $[AE]$.
- En partant de E, on place M tel que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{AD}$.
- D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Garde ce point M : il resservira plus loin.



Le point M s'atteint depuis A en deux étapes : on va jusqu'à E, deux fois plus loin que B, puis on reporte le vecteur AD depuis E.

Exprimer un vecteur

Méthode : exprimer un vecteur en fonction de deux vecteurs donnés

1. **Décompose** le vecteur par la relation de Chasles, en passant par des points de la figure.
2. **Remplace** chaque morceau par son expression connue : égalités de la figure, données de l'énoncé.
3. **Réduis** avec les règles de calcul, jusqu'à une écriture $a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AD}$.

Exemple : deux vecteurs exprimés

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et K le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$. On exprime $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Calcul de $\overrightarrow{AK}$. D'après la relation de Chasles :

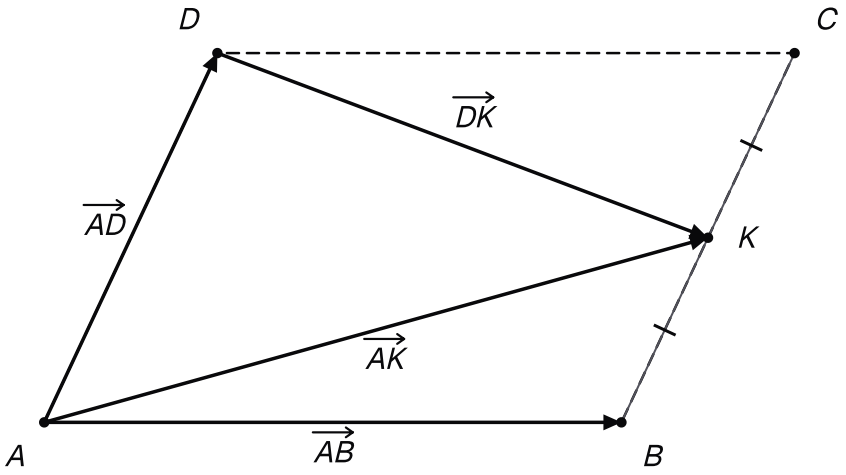
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, car $ABCD$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AD}$.

Calcul de $\overrightarrow{DK}$. D'après la relation de Chasles, en passant par A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DK} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} \\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.



Le point K est le milieu du côté [BC] ; les vecteurs AK et DK s'écrivent à l'aide des vecteurs AB et AD.

À toi : Exprimer deux vecteurs

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$. Exprime $\overrightarrow{BP}$, puis $\overrightarrow{CP}$, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Décompose chaque vecteur par la relation de Chasles, en passant par A.

Indice 2

Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Indice 3

Point délicat : $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; les deux signes changent.

Réponse

Calcul de $\overrightarrow{BP}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{CA}$. Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Calcul de $\overrightarrow{CP}$. De même, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$. D'après les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \\ &\quad + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

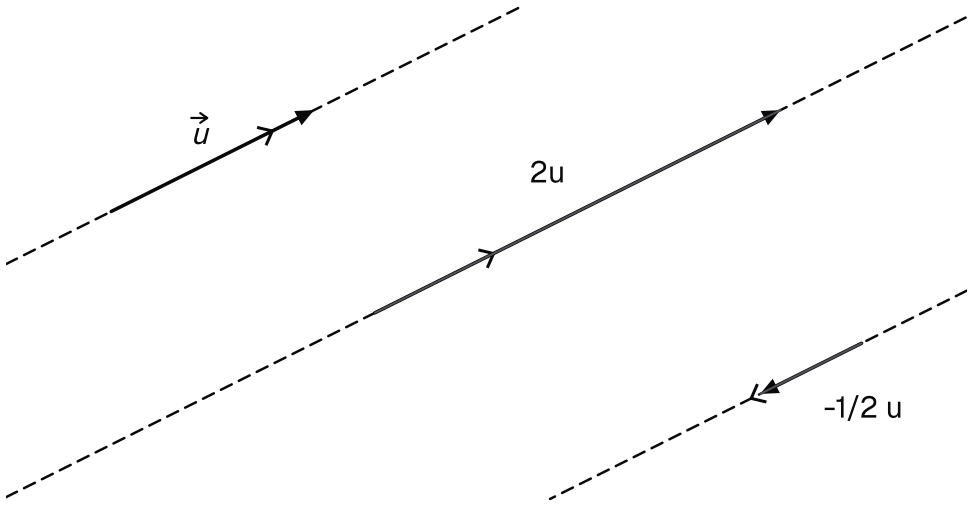
Conclusion. $\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Vecteurs colinéaires et droites parallèles

Même direction

En clair. Les vecteurs $\vec{u}$, $2\,\vec{u}$ et $-\frac{1}{2}\,\vec{u}$ ont tous la même direction. Leurs flèches sont portées par des droites parallèles. On dit qu'ils sont **colinéaires**.

Pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires, on cherche un réel k qui fait passer de l'un à l'autre.



Trois flèches portées par trois droites parallèles : le vecteur u, son double et le vecteur moins un demi u, qui va dans l'autre sens.

Devine : Même direction

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati. Lequel de ces vecteurs a la même direction que $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{AD}$

Faux.

Le côté $[AD]$ est voisin de $[AB]$: il n'est pas parallèle à (AB).

B. $\overrightarrow{BD}$

Faux.

Le segment $[BD]$ est une diagonale : il coupe (AB) en B.

C. $\overrightarrow{AC}$

Faux.

Le segment $[AC]$ est une diagonale : il coupe (AB) en A.

D. $\overrightarrow{CD}$

Juste.

Juste : (CD) est parallèle à (AB), et $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

Correction

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles : (CD) est parallèle à (AB). De plus, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, soit $k = -1$. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont portés par des droites qui coupent (AB).

Définition : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$, car $\vec{0} = 0\,\vec{u}$.

Exemple : reconnaître des vecteurs colinéaires

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, $\vec{w} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{s} = -4\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$. D'après les règles de calcul, $-2\,\vec{w} = -4\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$. Donc $\vec{s} = -2\,\vec{w}$: ces vecteurs sont colinéaires, avec $k = -2$.
- Dans le parallélogramme $ABCD$, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$: ils sont colinéaires, avec $k = -1$.
- Le vecteur nul est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, car $\vec{0} = 0\,\overrightarrow{AB}$.

Colinéarité et droites parallèles

Deux droites parallèles ont la même direction. Leurs vecteurs devraient donc être colinéaires, et réciproquement. **Pourquoi est-ce vrai ?** On reporte le vecteur $\overrightarrow{CD}$ à partir du point A. Le point obtenu tombe sur la droite (AB) exactement lorsque les deux droites sont parallèles.

Propriété : Colinéarité et parallélisme

Soit A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

(Deux droites confondues sont considérées comme parallèles.)

Démonstration

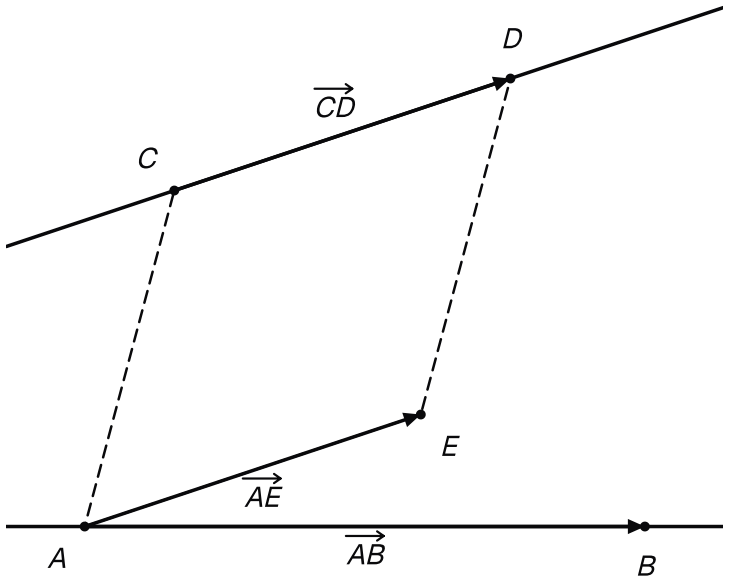
Étape 1. Supposons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires. Ils sont non nuls, donc $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k \neq 0$ (si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$, alors $k \neq 0$ et $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{AB}$ d'après les règles de calcul). Soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$. Par définition du produit par un réel, E est un point de (AB) distinct de A, donc

$(AE) = (AB)$. Comme $AEDC$ est un parallélogramme, (CD) est parallèle à (AE) ; s'il est aplati, ses quatre sommets sont alignés et $(CD) = (AE)$. Donc (CD) est parallèle à (AB).

Étape 2. Réciproquement, supposons (AB) et (CD) parallèles, et soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$; $E \neq A$ car $C \neq D$. De même, (AE) est parallèle à (CD), donc à (AB) ; ces deux droites passent par A, donc $(AE) = (AB)$. Posons $k = \frac{AE}{AB}$ si $E \in [AB)$, et $k = -\frac{AE}{AB}$ sinon. Par définition du produit, $k\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour comparer deux droites, on ramène tout au point A : on construit le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$. Le parallélogramme $AEDC$ transporte la direction de (CD) jusqu'en A. La question se joue alors sur une seule droite passant par A.



Le point E, obtenu en reportant le vecteur CD à partir de A, ramène la direction de la droite (CD) au point A.

Vérifie : Une étape de la preuve

Dans l'étape 2 de la preuve, pourquoi les droites (AE) et (AB) sont-elles confondues ?

A. Elles sont parallèles et passent par A.

Juste.

Juste : par un point passe une seule parallèle à une droite donnée.

B. Elles ont la même longueur.

Faux.

Une droite n'a pas de longueur ; et AE n'est pas égal à AB en général.

C. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égaux.

Faux.

C'est faux en général : $\overrightarrow{AE}$ est égal à $\overrightarrow{CD}$, pas à $\overrightarrow{AB}$.

D. Le point E est le milieu de $[AB]$.

Faux.

Rien ne place E au milieu de $[AB]$: sa position dépend de $\overrightarrow{CD}$.

Correction

Par construction, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$: $AEDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati, donc (AE) est parallèle à (CD), donc à (AB). Les droites (AE) et (AB) sont parallèles et ont le point A en commun. Par un point passe une seule parallèle à une droite : elles sont confondues.

Un exemple, un piège, puis à toi

Exemple : démontrer un parallélisme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On place E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\,\overrightarrow{AD}$.

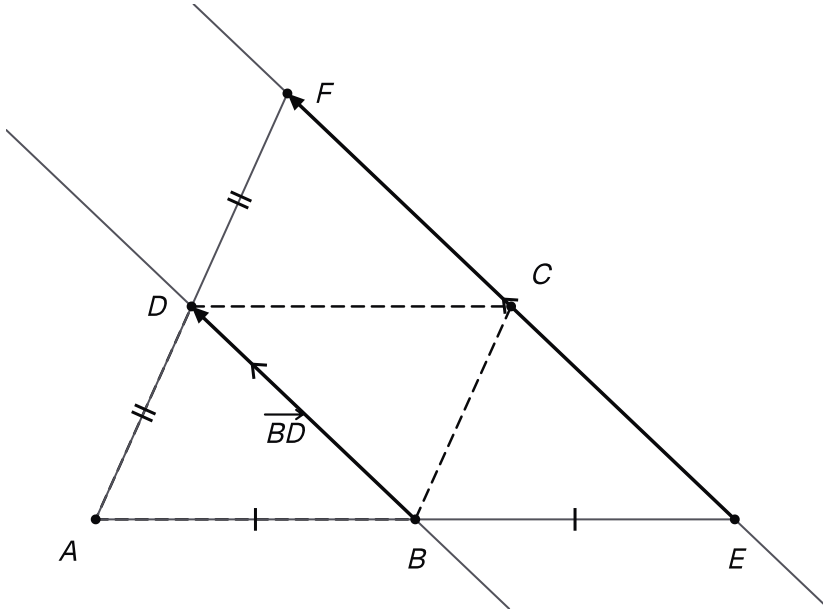
Calcul de $\overrightarrow{EF}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{BD}$. De même, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Colinéarité. D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{BD}$: ces vecteurs sont colinéaires.

Conclusion. Les sommets B et D sont distincts, donc $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{BD}$ n'est pas nul : $E \neq F$. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », (EF) est parallèle à (BD).



En doublant les vecteurs AB et AD depuis A, on obtient E et F ; la flèche EF a la direction de BD et une longueur double.

Exemple : Contre-exemple : deux points distincts sur chaque droite

Si $C = D$, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est nul. Il est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, car $\vec{0} = 0\,\overrightarrow{AB}$. Pourtant, la droite (CD) n'existe pas : on ne peut pas parler de droites parallèles. L'hypothèse $C \neq D$ est donc nécessaire, tout comme $A \neq B$.

Attention : colinéaires ne veut dire ni égaux, ni alignés

✗ « $\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{BD}$, donc les points E, F, B, D sont alignés. »

✓ Des vecteurs colinéaires donnent des droites **parallèles**. Ici, (EF) et (BD) sont parallèles. Pour un alignement, il faut en plus un point commun. De même, colinéaires ne veut pas dire égaux : $\overrightarrow{EF}$ est deux fois plus long que $\overrightarrow{BD}$.

À toi : Un parallélisme à démontrer

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M le point construit plus haut : $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Exprime $\overrightarrow{DM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Déduis-en que les droites (DM) et (AB) sont parallèles. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose $\overrightarrow{DM}$ par la relation de Chasles, en passant par A.
Indice 2
Écris $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, remplace, puis réduis.
Indice 3

Point délicat : les termes en $\overrightarrow{AD}$ s'annulent ; conclus en citant la propriété.

Réponse

Calcul de $\overrightarrow{DM}$. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} \\ &= -\overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{AB} \\ &\quad + \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{DM} = 2\,\overrightarrow{AB}$.

Colinéarité. Les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, avec $k = 2$. Comme $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{DM}$ n'est pas nul : $D \neq M$.

Conclusion. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », les droites (DM) et (AB) sont parallèles.

Trois points alignés : condition de colinéarité

Trois points sur une droite

En clair. Trois points A, B, C sont alignés lorsqu'ils sont sur une même droite. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont alors la direction de cette droite : ils sont colinéaires. Et ils partent du même point A.

Pourquoi est-ce vrai ? Deux droites parallèles qui passent par un même point sont confondues. La propriété précédente fait le reste.

Devine : Alignés ou non ?

Soit A et B deux points distincts, et C le point tel que $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{AB}$. Quelle réponse est juste et correctement justifiée ?

A. Non alignés, car $\overrightarrow{BC}$ ne part pas de A.

Faux.

Peu importe l'origine : la relation de Chasles ramène tout au point A.

B. Alignés, car $\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AB}$.

Faux.

La conclusion est juste, mais pas la raison : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

C. Alignés, car $\overrightarrow{AC} = 4\,\overrightarrow{AB}$.

Juste.

Juste : d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AB}$.

D. On ne peut pas savoir sans mesurer.

Faux.

L'égalité donnée suffit : un calcul vectoriel remplace la mesure.

Correction

D'après la relation de Chasles et les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AB} \\ &= 4\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et partent de A. Les trois points sont alignés : la propriété qui suit le justifie.

La propriété d'alignement

Propriété : Alignement de trois points

Soit A, B, C trois points du plan, avec $A \neq B$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- les points A, B, C sont **alignés** ;
- les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;
- il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB}$.

Ce réel x, lorsqu'il existe, est **unique**.

Démonstration

Étape 1. Si $C = A$, les trois points sont alignés et $\overrightarrow{AC} = \vec{0} = 0\,\overrightarrow{AB}$. Supposons $C \neq A$. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si $(AB) = (AC)$, c'est-à-dire si et seulement si (AB) et (AC) sont parallèles, car elles passent toutes deux par A (unicité de la parallèle passant par un point). D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », cela équivaut à la colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Étape 2. Si $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$, alors $k \neq 0$ car $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, et $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{AB}$ d'après les règles de calcul. Réciproquement, si $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB}$, les vecteurs sont colinéaires par définition. La colinéarité équivaut donc à l'existence de x.

Étape 3. Si $x\,\overrightarrow{AB} = x'\,\overrightarrow{AB}$, alors $(x - x')\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ d'après les règles de calcul ; comme $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, on a $x - x' = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'alignement se ramène au parallélisme : les droites (AB) et (AC) passent toutes deux par A. Si elles sont parallèles, elles sont confondues, car par un point passe une seule parallèle à une droite.

Retiens le geste : pour un alignement, on choisit deux vecteurs **de même origine**.

Le réel x est unique : si $a\,\vec{u} = \vec{0}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $a = 0$, d'après les règles de calcul.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans la preuve, on compare les droites (AB) et (AC), qui passent toutes deux par A. Pourquoi ce point commun compte-t-il ?

A. Deux droites qui passent par A sont toujours parallèles.

Faux.
Deux droites qui passent par A peuvent se couper en A sans être parallèles.

B. Parallèles avec un point commun, elles sont confondues.

Juste.
Juste : par un point passe une seule parallèle à une droite donnée.

C. Il rend les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ égaux.

Faux.
Les vecteurs peuvent avoir des longueurs différentes : ils sont seulement colinéaires.

D. Il donne aux deux droites la même longueur.

Faux.
Une droite n'a pas de longueur : on compare des directions.

Correction
Les droites (AB) et (AC) ont le point A en commun. Si elles sont parallèles, elles sont confondues, car par un point passe une seule parallèle à une droite. Les trois points sont alors sur une même droite. Sans point commun, des droites parallèles peuvent être distinctes.

Exemple : Contre-exemple : pourquoi deux points distincts

Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul : $x\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ quel que soit x. On n'atteint donc jamais un point C différent de A. Pourtant, les points A, B, C sont alignés. C'est pourquoi la propriété demande $A \neq B$.

La méthode en action

Méthode : démontrer un alignement ou un parallélisme

1. **Choisis deux vecteurs** : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour l'alignement de A, B, C, avec $A \neq B$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour le parallélisme de (AB) et (CD), avec $A \neq B$ et $C \neq D$.
2. **Exprime-les** en fonction des deux mêmes vecteurs de la figure.
3. **Trouve un réel** k tel que l'un soit égal à k fois l'autre.
4. **Conclus** en citant la propriété : alignement de trois points, ou colinéarité et parallélisme.

Exemple : trois points alignés dans un parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati, N le point tel que $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, et F le point tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$. On montre que B, N, F sont alignés.

Deux points distincts. Le point N est sur la droite (DC), et B n'y est pas : $B \neq N$.

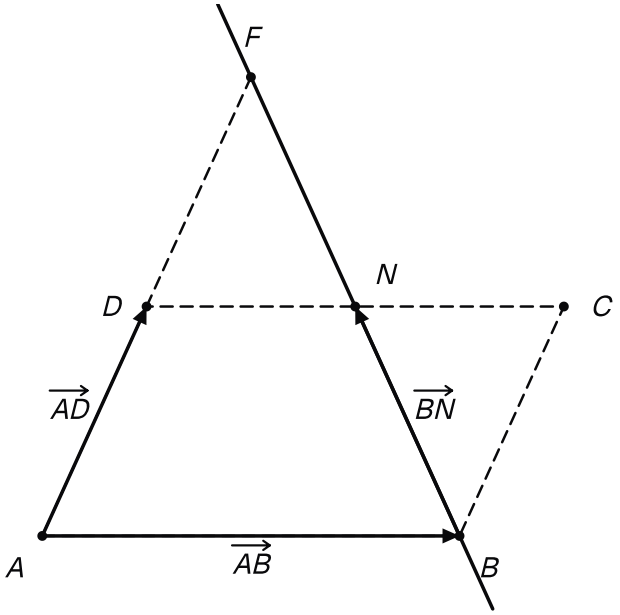
Calcul de $\overrightarrow{BN}$. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}.$$

Or $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Calcul de $\overrightarrow{BF}$. De même, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

Conclusion. D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BN}$. D'après la propriété d'alignement de trois points, B, N et F sont alignés.



Le parallélogramme ABCD, le point N au milieu de [DC] et le point F tel que le vecteur AF vaut deux fois le vecteur AD : les points B, N et F sont sur une même droite.

Exemple : des parallèles dans un trapèze

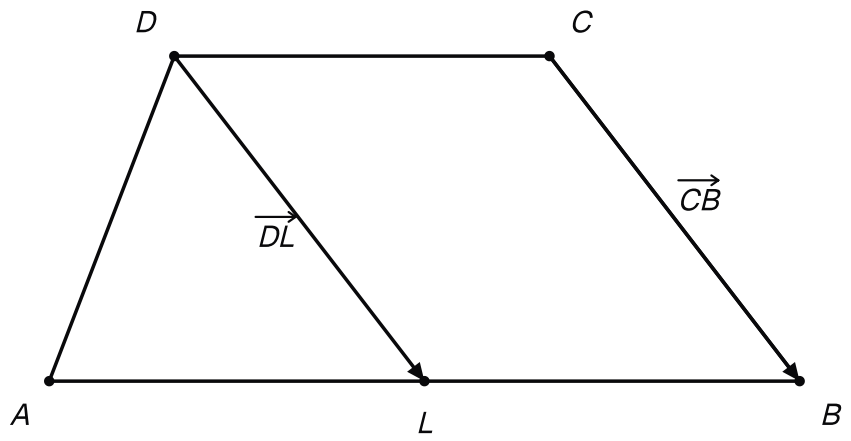
Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[DC]$, avec $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, et L le point tel que $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On montre que les droites (DL) et (CB) sont parallèles. Fais la figure sur ton cahier.

Calcul de $\overrightarrow{DL}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Calcul de $\overrightarrow{CB}$. On a $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On enchaîne les vecteurs d'après la relation de Chasles, et on réduit avec les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Conclusion. Donc $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{CB}$. Les sommets C et B sont distincts : ce vecteur n'est pas nul, et $D \neq L$. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », (DL) est parallèle à (CB).



Le trapèze ABCD, dont la petite base [DC] mesure la moitié de [AB], et le point L au milieu de [AB] : les vecteurs DL et CB sont égaux, donc les droites (DL) et (CB) sont parallèles.

À toi, puis le Coin devoir

À toi : Trois points alignés

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati, S le point tel que $\overrightarrow{AS} = 3\,\overrightarrow{AB}$, et P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AD}$. Montre que les points C, S, P sont alignés. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Vérifie d'abord que $C \neq S$. Puis exprime $\overrightarrow{CS}$ et $\overrightarrow{CP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, en passant par A.
Indice 2
Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.
Indice 3
Point délicat : le réel k peut être négatif ; les vecteurs restent colinéaires.

Réponse
Deux points distincts. Le point S est sur la droite (AB), et C n'y est pas : $C \neq S$.

Calcul de $\overrightarrow{CS}$. Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$. La relation de Chasles, en passant par A, puis les règles de calcul donnent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CS} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS} \\ &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \\ &\quad + 3\,\overrightarrow{AB} \\ &= 2\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Calcul de $\overrightarrow{CP}$. De même, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Conclusion. D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CS}$. D'après la propriété d'alignement de trois points, C, S et P sont alignés. Comme $-\frac{1}{2} < 0$, le vecteur $\overrightarrow{CP}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{CS}$: le point C est entre S et P.

Remarque : Coin devoir : rédiger un alignement

En devoir, la rédaction tient en trois temps : deux vecteurs exprimés, un réel k, la propriété citée. Pour les points B, N, F de l'exemple :

« Le point N est sur (DC), et B n'y est pas : $B \neq N$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$. Donc $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BN}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires. D'après la propriété d'alignement de trois points, B, N et F sont alignés. »

Vérifie toujours que les deux points de base sont distincts. Une conclusion sans propriété citée reste incomplète.

Repérer un point d'une droite : le repère (A, B)

Une règle graduée sur la droite

En clair. Pose une règle graduée sur la droite (AB). Place le zéro en A, et la graduation 1 en B : l'unité est la longueur AB.

Chaque point de la droite reçoit alors un nombre. Il est positif du côté de B, négatif de l'autre côté. Ce nombre suffit à retrouver le point, avec un seul vecteur : $\overrightarrow{AB}$.

Devine : Une graduation

Sur cette règle, le point H est gradué -1. Quelle égalité décrit sa position ?

A. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}$

Faux.

Le point qui vérifie cette égalité est gradué 1 : c'est B lui-même.

B. $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}$

Juste.

Juste : on part de A, et on avance d'une unité dans le sens contraire de B.

C. $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB}$

Faux.

Cette égalité part de B : elle décrit le point A, gradué 0.

D. $\overrightarrow{HA} = -\overrightarrow{AB}$

Faux.

Elle donne $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}$: on retrouve B, pas H.

Correction

Le zéro est en A : on part de A. La graduation -1 est à une unité de A, du côté opposé à B. Donc $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}$, et A est le milieu de $[HB]$.

Définition : Abscisse d'un point dans le repère (A, B)

Soit A et B deux points distincts. Pour tout point M de la droite (AB), l'unique réel x tel que

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$$

s'appelle l'**abscisse** du point M dans le **repère** (A, B) de la droite (AB).

Le point A a pour abscisse 0 et le point B a pour abscisse 1.

Exemple : lire des abscisses

Soit A et B deux points distincts. Dans le repère (A, B) :

- le point H de l'activité vérifie $\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}$: son abscisse est -1 ;
- le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ vérifie, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$: son abscisse est $\frac{3}{2}$;
- A a pour abscisse 0, et B a pour abscisse 1 : la règle graduée le disait déjà.

Sur le segment ou sur la demi-droite ?

Sur la règle, les nombres positifs sont du côté de B. Ceux qui sont compris entre 0 et 1 sont entre A et B. **Pourquoi est-ce vrai ?** Le signe de x fixe le sens de $x\,\overrightarrow{AB}$. Et pour $x \geq 0$, la longueur AM vaut $x \times AB$: on la compare à AB.

Propriété : Abscisse, segment et demi-droite

Soit A et B deux points distincts.

- Pour tout réel x, il existe un **unique** point M de la droite (AB) d'abscisse x dans le repère (A, B).

- Un point M de (AB), d'abscisse x, appartient à la demi-droite $[AB)$ si et seulement si $x \geq 0$.
- Il appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $0 \leq x \leq 1$.

Démonstration

Étape 1. Soit x un réel. D'après la définition de l'égalité de deux vecteurs, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$. D'après la propriété « alignement de trois points », ce point appartient à (AB), et son abscisse est x.

Étape 2. Par définition du produit par un réel : si $x > 0$, M appartient à $[AB)$; si $x = 0$, $M = A$; si $x < 0$, M appartient à la demi-droite opposée et $M \neq A$, donc $M \notin [AB)$. Ainsi $M \in [AB)$ si et seulement si $x \geq 0$.

Étape 3. Un point M appartient à $[AB]$ si et seulement s'il appartient à $[AB)$ et vérifie $AM \leq AB$. Pour $x \geq 0$, on a $AM = x \times AB$, et $x \times AB \leq AB$ équivaut à $x \leq 1$, car $AB > 0$. Si $x < 0$, $M \notin [AB)$ d'après l'étape 2, donc $M \notin [AB]$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La position d'un point se lit sur son abscisse x, en deux questions. Le signe de x dit de quel côté de A il se trouve : c'est la définition du produit par un réel. La comparaison de x avec 1 dit s'il dépasse B : on compare $AM = x \times AB$ à AB.

Vérifie : L'idée de la preuve

Dans l'étape 2 de la preuve, pourquoi un point M d'abscisse $x < 0$ n'est-il pas sur la demi-droite $[AB)$?

A. Parce que sa distance à A est négative.

Faux.
Une distance n'est jamais négative : $AM = -x \times AB$ est positive.

B. Parce que x est inférieur à 1.

Faux.
Les points d'abscisse comprise entre 0 et 1 sont sur $[AB)$: ce critère ne suffit pas.

C. Le produit par un réel négatif change le sens.

Juste.
Juste : par définition du produit, M est sur la demi-droite opposée, et $M \neq A$.

D. Parce que M est au-delà de B.

Faux.
Au-delà de B, l'abscisse dépasse 1 : c'est l'autre côté.

Correction

> Pour $x < 0$, le vecteur $x\,\overrightarrow{AB}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$: c'est la définition du produit par un réel. Le point M est donc sur la demi-droite opposée à $[AB)$. De plus, $M \neq A$, car $x \neq 0$. Or ces deux demi-droites n'ont en commun que le point A : M n'est pas sur $[AB)$.

Placer un point, un piège, puis à toi

Méthode : placer un point défini par une égalité vectorielle

1. **Transforme l'égalité**, par la relation de Chasles et les règles de calcul, jusqu'à la forme $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$.
2. **Lis l'abscisse** x de M dans le repère (A, B).
3. **Situe le point** : sur $[AB]$ si $0 \leq x \leq 1$; sur $[AB)$ si $x \geq 0$; sinon, sur la demi-droite opposée.
4. **Construis-le** à partir de A : la longueur AM vaut $x \times AB$ quand x est positif, et $-x \times AB$ quand x est négatif.

Exemple : placer et situer un point

Soit A et B tels que $AB = 8$ cm, et M le point tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Forme utile. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$. L'égalité devient :

$$2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

D'après les règles de calcul, $2\,\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Abscisse. On retourne le vecteur : $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. L'abscisse de M est $\frac{1}{4}$.

Position. Cette abscisse est comprise entre 0 et 1. D'après la propriété « abscisse, segment et demi-droite », M appartient au segment $[AB]$, avec $AM = 2$ cm, car $\frac{1}{4} \times 8 = 2$.

Exemple : situer des points par leur abscisse

Reprends les points G et H lus plus haut. On applique la propriété « abscisse, segment et demi-droite ».

- G a pour abscisse $\frac{3}{2}$. Comme $\frac{3}{2} \geq 0$, G est sur $[AB)$. Comme $\frac{3}{2} > 1$, il n'est pas sur $[AB]$.
- H a pour abscisse -1. Comme $-1 < 0$, H n'est pas sur $[AB)$: il est sur la demi-droite opposée.

Attention : on part toujours de A

✗ « $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB}$, donc l'abscisse de N est 1. »

✓ L'abscisse se lit sur l'égalité $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$, qui part de A. Ici, $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{AB}$: l'abscisse de N est -1. D'ailleurs, le point d'abscisse 1 est B, et $N \neq B$. Retourne d'abord le vecteur, puis lis le réel.

À toi : Un point à placer

Soit A et B tels que $AB = 6$ cm, et R le point tel que $\overrightarrow{RB} = 3\,\overrightarrow{RA}$. Donne l'abscisse de R dans le repère (A, B). Situe R, puis construis-le. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose $\overrightarrow{RB}$ par la relation de Chasles, en passant par A.
Indice 2
Tu obtiens $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{RA}$: fais apparaître $\overrightarrow{AR}$.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{AR}$; le signe change quand on retourne le vecteur.

Réponse
Forme utile. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB}$. L'égalité devient $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{RA}$, donc $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{RA}$.

Abscisse. D'après les règles de calcul, $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$, puis $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$. L'abscisse de R est $-\frac{1}{2}$.

Position et construction. Cette abscisse est négative : R est sur la demi-droite opposée à $[AB)$. On le construit à partir de A, avec $AR = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm.

Conclusion. Dans le repère (A, B), R a pour abscisse $-\frac{1}{2}$; il est sur la demi-droite opposée à $[AB)$, à 3 cm de A.

Le milieu d'un segment, version vectorielle

Le milieu en vecteurs

Rappel du collège. Le point I est le milieu de $[AB]$ lorsqu'il appartient à $[AB]$ et que $IA = IB$. Au lycée, une seule égalité vectorielle remplace ces deux conditions.

Devine : Le milieu en vecteurs

Soit I le milieu de $[AB]$. Quelle égalité est vraie ?

A. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$
Faux.
Les longueurs sont égales, mais les vecteurs vont dans des sens contraires.

B. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$
Faux.

Même erreur : $\overrightarrow{AI}$ va vers B, alors que $\overrightarrow{BI}$ va vers A.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

Faux.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est deux fois plus long que $\overrightarrow{AI}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Juste.

Juste : même direction, même sens, même longueur.

Correction

Le point I est sur $[AB]$, entre A et B. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la direction de (AB), le sens de A vers B, et la même longueur. Donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

En clair. Avec des vecteurs, aller de A à I, c'est faire le même déplacement que de I à B. Le milieu partage le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en deux déplacements égaux.

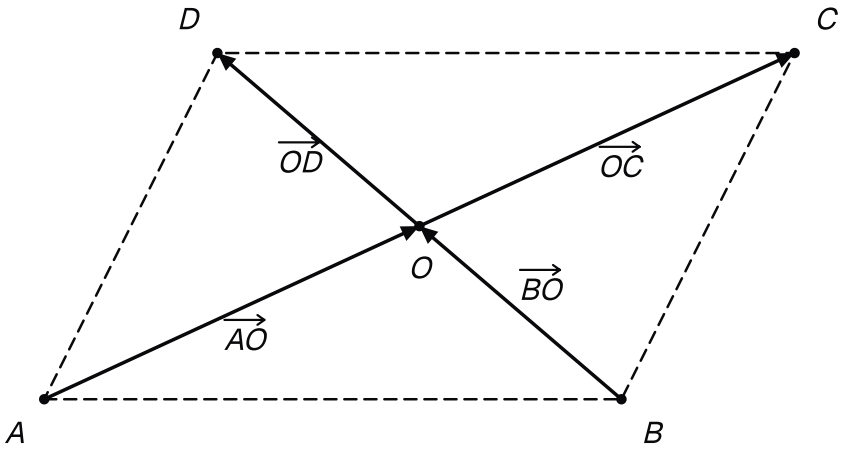
Définition : Milieu d'un segment : définition vectorielle

Soit A et B deux points du plan. Le point I est le **milieu** du segment $[AB]$ lorsque

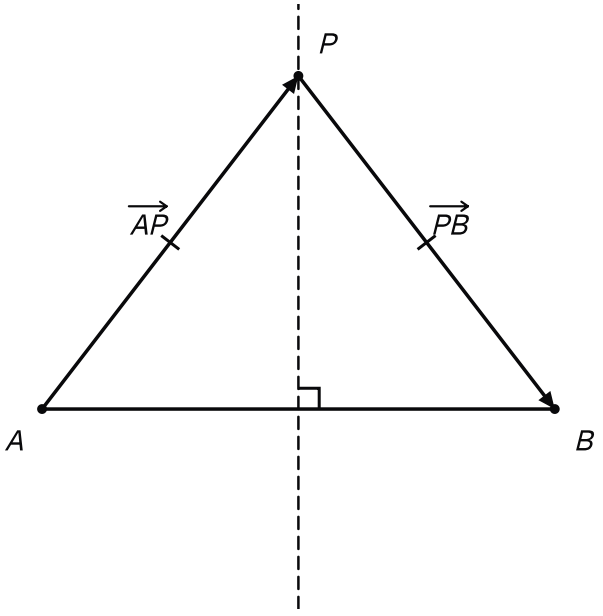
$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

Exemple : Exemple et contre-exemple

- Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Ses diagonales se coupent en leur milieu : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.
- **Contre-exemple.** Des longueurs égales ne suffisent pas. Un point P de la médiatrice de $[AB]$, hors de (AB), vérifie $PA = PB$. Pourtant $\overrightarrow{AP} \neq \overrightarrow{PB}$: ces vecteurs n'ont pas la même direction.



Le parallélogramme ABCD et son centre O : sur chaque diagonale, les deux flèches qui se suivent sont égales, le vecteur AO égale le vecteur OC et le vecteur BO égale le vecteur OD.



Le contre-exemple : P est sur la médiatrice de [AB], donc PA = PB, mais les vecteurs AP et PB n'ont pas la même direction.

Les autres écritures du milieu

Le milieu s'écrit encore de deux autres façons, et il donne une égalité valable en tout point : quatre écritures en tout. **Pourquoi est-ce vrai ?** On passe d'une écriture à la suivante par la relation de Chasles et les règles de calcul. La dernière ramène à la première : les trois premières écritures disent la même chose.

Propriété : Caractérisations vectorielles du milieu

Soit A, B, I trois points du plan. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- I est le milieu du segment $[AB]$;
- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

De plus, si I est le milieu de $[AB]$, alors **pour tout point** M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Démonstration

Étape 1. Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IA}$, donc, d'après les propriétés de l'addition, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Étape 2. Si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AI}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AI}$ d'après les règles de calcul, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Étape 3. Si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ et, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI}$: I est le milieu de $[AB]$.

Étape 4. Soit M un point du plan. D'après la relation de Chasles, puis les propriétés de l'addition et les règles de calcul, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$. D'après l'étape 1, cette somme vaut $2\overrightarrow{MI}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour passer d'une écriture du milieu à une autre, on remplace un vecteur par son opposé. Puis on applique la relation de Chasles en passant par I. Pour l'égalité valable en tout point M, on fait passer chaque vecteur par I : la somme $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ apparaît, et elle est nulle.

Vérifie : Une étape de la preuve

Dans l'étape 2 de la preuve, d'où vient l'égalité $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$?

A. De l'égalité des longueurs $AB = 2 \times AI$.

Faux.
Une égalité de longueurs ne donne pas une égalité de vecteurs : il manque la direction et le sens.

B. De la relation de Chasles, avec $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$.

Juste.
Juste : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI}$.

C. De la règle du parallélogramme.

Faux.

Aucun parallélogramme dans cette étape : les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ s'enchaînent.

D. De la définition du produit par un réel.

Faux.

La définition dit ce qu'est $2\,\overrightarrow{AI}$, mais elle n'écrit pas $\overrightarrow{AB}$ comme une somme.

Correction

L'étape 2 part de $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, qui donne $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AI}$. D'après la relation de Chasles, puis en remplaçant $\overrightarrow{IB}$ par $\overrightarrow{AI}$:

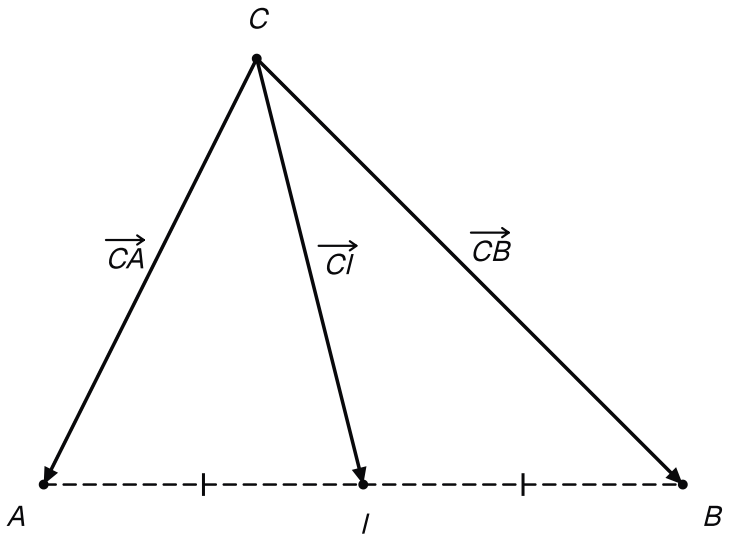
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\\&=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AI}\\&=2\,\overrightarrow{AI}.\end{aligned}$$

La dernière égalité vient des règles de calcul.

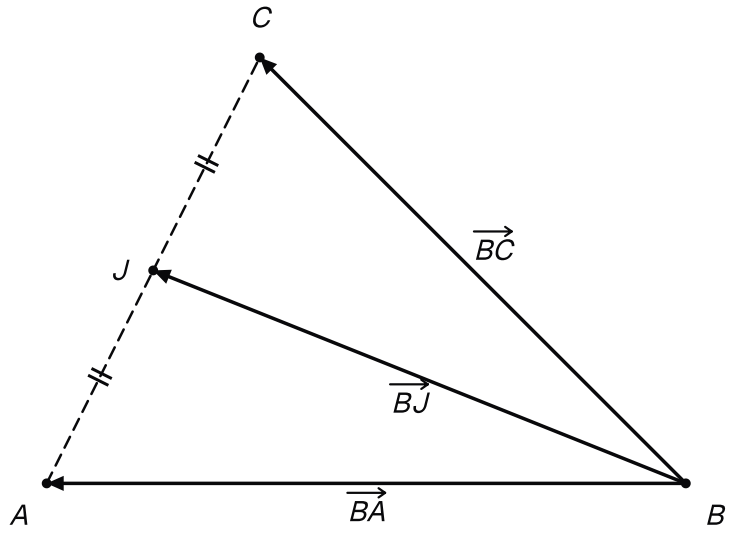
Exemple : le milieu dans un triangle

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Fais la figure sur ton cahier.

- D'après les caractérisations vectorielles du milieu, appliquées avec le point C : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\,\overrightarrow{CI}$.
- Appliquées avec le point B et le milieu J de $[AC]$: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\,\overrightarrow{BJ}$.
- Avec le point I lui-même, on retrouve $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\,\overrightarrow{II}=\vec{0}$.



Depuis le sommet C : les vecteurs CA et CB ont pour somme deux fois le vecteur CI, où I est le milieu de [AB].



Depuis le sommet B : les vecteurs BA et BC ont pour somme deux fois le vecteur BJ, où J est le milieu de [AC].

Un piège, puis la méthode

Attention : n'oublie pas le facteur 2

✗ « I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$. »

✓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{MI}$. Contrôle avec $M=A$: on trouve $\overrightarrow{AB}=2\,\overrightarrow{AI}$, ce qui est juste. Sans le facteur 2, on aurait $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}$, ce qui est faux.

Méthode : utiliser le milieu d'un segment

1. **Repère les milieux** de la figure, et le segment de chacun.
2. **Choisis l'écriture utile** parmi les quatre : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, ou $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\,\overrightarrow{MI}$.
3. **Remplace** dans le calcul, puis réduis avec la relation de Chasles et les règles de calcul.

Exemple : les quatre sommets d'un parallélogramme

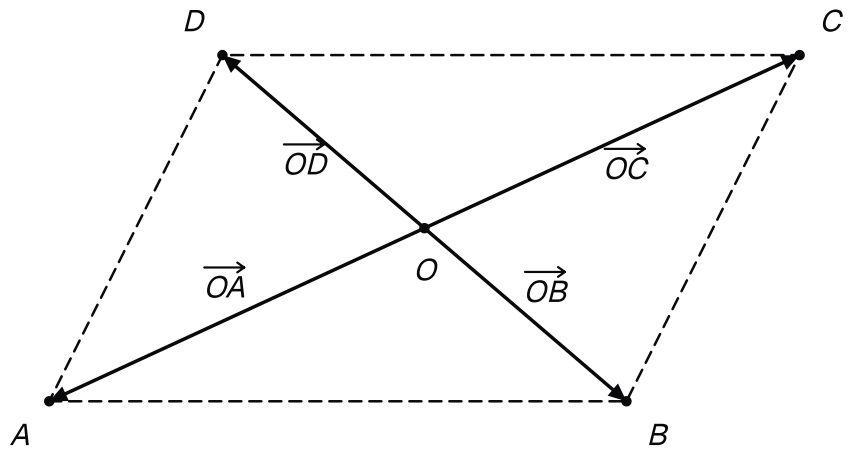
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. On montre que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Deux milieux. Rappel du collège : les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, le point O. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. De même, O est le milieu de $[BD]$, donc $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Regroupement. D'après les propriétés de l'addition, on regroupe les termes :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\\&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})\\&=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.



Les quatre vecteurs issus du centre O du parallélogramme ABCD : OA et OC sont opposés, OB et OD aussi, d'où une somme nulle.

À toi, puis le Coin devoir

À toi : La droite des milieux

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$. Exprime $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Déduis-en que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. Écris ta réponse avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Décompose $\overrightarrow{IJ}$ par la relation de Chasles, en passant par A.
Indice 2
Choisis l'écriture du milieu avec un demi : $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Indice 3
Point délicat : $\overrightarrow{IA}$ vaut $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, et non $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Réponse
Calcul de $\overrightarrow{IJ}$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$.

Comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Comme J est le milieu de $[AC]$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D'après les règles de calcul, puis la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Colinéarité. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Comme $B \neq C$, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ n'est pas nul : $I \neq J$.

Conclusion. D'après la propriété « colinéarité et parallélisme », (IJ) est parallèle à (BC).

Remarque **: Coin devoir : rédiger avec un milieu**

En devoir, on nomme le milieu et l'écriture choisie, puis on calcule. Exemple : $ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

« Le point O est le milieu de $[BD]$. D'après les caractérisations vectorielles du milieu, appliquées avec le point A, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AO}$. Par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AO}$. »

Précise toujours le point auquel tu appliques la propriété.

Ce qu'il faut savoir faire

À retenir **: quel outil pour quelle question**

- **Simplifier une somme** : différences en sommes, termes rangés, relation de Chasles.
- **Additionner deux vecteurs de même origine** : règle du parallélogramme.
- **Construire** $a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$: d'abord $a\,\vec{u}$, puis $b\,\vec{v}$ à partir de son extrémité.
- **Exprimer un vecteur** : relation de Chasles par les points de la figure, puis règles de calcul.
- **Parallélisme** : deux vecteurs colinéaires, un réel k, colinéarité et parallélisme.
- **Alignement** : deux vecteurs de même origine, un réel k, alignement de trois points.
- **Placer un point** : la forme $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$, puis le signe de x et sa comparaison avec 1.
- **Milieu** : l'écriture utile parmi les quatre.

Le mot du prof. Tu sais maintenant traduire une figure en calculs, et un calcul en propriété de la figure. Avant chaque égalité, nomme la règle que tu emploies : c'est elle qui rend ta réponse juste. Ces outils te serviront dans les chapitres de géométrie qui suivent, et en physique pour les forces.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul vectoriel dans le plan » (tc · sciences · mathematiques)